

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: AFFINELY REGULAR INTEGRAL SIMPLICES
Autor: Bacher, Roland
Kapitel: 3. List of small-faced affinely regular simplices
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58731>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

3. LIST OF SMALL-FACED AFFINELY REGULAR SIMPLICES

An integral simplex S with small faces is affinely regular if and only if the numerated simplices S_v and $S_{v'}$ are equivalent for each pair v, v' of enumerations of S . In other terms, an integral simplex S with small faces of volume $k/n!$ is affinely regular if and only if $\rho_k(S_v) = \rho_k(S_{v'})$ for all enumerations v and v' , hence if and only if the element $\rho_k(S_v)$ is a fixed point under the action of σ_{n+1} on $\rho_k(\Sigma_k)$.

It is sufficient for $\rho_k(S_v)$ to be fixed under the action of a set of generators in order to be a fixpoint of σ_{n+1} acting on $\rho_k(\Sigma_k)$. Let us suppose that $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ is a fixpoint of $\rho_k(\Sigma_k)$. Then, for all $i \in \{1, \dots, n-2\}$:

$$\begin{aligned} (i, i+1) \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}) \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

implies $\alpha_i \equiv \alpha \pmod{k}$ for some $\alpha \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$.

Furthermore

$$(n-1, n) \cdot (\alpha, \dots, \alpha, \alpha) = (-\alpha\alpha^{-1}, \dots, -\alpha\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha, \dots, \alpha)$$

gives $\alpha \equiv -\alpha\alpha^{-1} \equiv -1 \pmod{k}$.

Finally

$$(0, 1) \cdot (-1, -1, \dots, -1) = (1 - (n-1)(-1), -1, \dots, -1) = (-1, \dots, -1)$$

implies $-1 \equiv 1 - (n-1)(-1) \pmod{k}$ namely $0 \equiv n+1 \pmod{k}$ namely $k \mid (n+1)$.

This shows that the simplices listed in the theorem are exactly all the affinely regular simplices with small faces.

We have yet to show that any affinely regular minimal simplex is small-faced. This will be the aim of the next paragraph.

4. ANY AFFINELY REGULAR MINIMAL SIMPLEX HAS SMALL FACES

Lemma 1.2 implies the following corollary:

COROLLARY 4.1. *Every integral simplex of \mathbf{Z}^n with numerated vertices is equivalent to an integral simplex with vertex v_0 at 0 and vertex v_i at the i -th vector-column of an upper triangular matrix ($i > 0$).*

Regularity and Proposition 0.4 imply almost immediately the following: