

| | |
|---------------------|---|
| Zeitschrift: | L'Enseignement Mathématique |
| Herausgeber: | Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique |
| Band: | 37 (1991) |
| Heft: | 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE |
| Artikel: | PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE |
| Autor: | Ghys, Etienne |
| Kapitel: | 3. Le cas des sphères impaires |
| DOI: | https://doi.org/10.5169/seals-58729 |

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^1) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^2)$$

qui prolonge les difféomorphismes du cercle au disque. Notons u l'élément 1 de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ engendrant le centre de G_p . Le difféomorphisme $\sigma(i(u))$ de B^2 est d'ordre p . Il est conjugué à une rotation d'ordre p d'après 2.1 et fixe donc un unique point x_0 de B^2 .

Puisque u est central dans G_p , tous les éléments de $\sigma(G_p)$ fixent x_0 . Par passage à la différentielle en x_0 , on construit donc un morphisme

$$D: G_p \rightarrow GL(T_{x_0}B^2) \simeq GL(2, \mathbf{R}) .$$

A conjugaison près, on peut supposer que $D(u)$ est une rotation d'ordre p .

LEMME 2.3. *Si $p \geq 3$, le centralisateur d'une rotation d'ordre p dans $GL(2, \mathbf{R})$ est abélien.*

Démonstration. Ce centralisateur coïncide en effet avec le groupe de similitudes de \mathbf{R}^2 . \square

La démonstration du théorème lorsque $n = 1$ est maintenant facile. Le morphisme D , étant à valeurs dans le centralisateur de $D(u)$, a une image abélienne. Il en résulte que D est trivial sur le groupe des commutateurs de G_p et donc sur u d'après 2.2. Mais ceci est absurde puisque $D(u)$ est conjugué à une rotation d'ordre p .

On remarquera que nous n'avons utilisé l'hypothèse sur σ que pour pouvoir affirmer que l'ordre de $\sigma(i(u))$ est exactement p . Nous avons donc montré en fait un résultat plus fort: le groupe G_p et, *a fortiori*, $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$, ne se plongent pas dans $\text{Diff}_0^1(B^2)$. Si l'on tient compte du résultat (difficile) selon lequel $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ est un groupe simple [7], et donc qu'un morphisme de source $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ est injectif ou trivial, on déduit:

THÉORÈME. *Il n'existe aucun morphisme non trivial de $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ vers $\text{Diff}_0^1(B^2)$.*

3. LE CAS DES SPHÈRES IMPAIRES

Si n s'écrit sous la forme $2k - 1$, nous identifierons la sphère S^n avec l'ensemble des points (z_1, \dots, z_k) de \mathbf{C}^k tels que $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$. Soit p

un nombre premier. Nous noterons C_p le sous-groupe de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1})$ formé des difféomorphismes du type

$$f: (z_1, \dots, z_k) \in S^{2k-1} \mapsto (w_1 z_1, \dots, w_k z_k) \in S^{2k-1},$$

où w_1, \dots, w_k sont des racines p -èmes de l'unité. Bien sûr, C_p est un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^k$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^{2k})$$

qui prolonge les difféomorphismes de la sphère à la boule.

LEMME 3.1. *Il existe un unique point x_0 intérieur à B^{2k} qui est fixe par $\sigma(C_p)$.*

Démonstration. Rappelons d'abord qu'un difféomorphisme périodique de période p est localement linéarisable au voisinage d'un point fixe (voir par exemple [2]). Il en résulte que l'ensemble des points fixes d'un tel difféomorphisme est une sous-variété. Lorsque la variété ambiante est la sphère S^n , la sous-variété des points fixes, si elle n'est pas vide, a la même homologie modulo p qu'une sphère de dimension d avec $0 \leq d \leq n$. C'est un exemple classique d'application de la théorie de Smith: voir par exemple [2].

Soit f un élément de C_p tel qu'aucun des w_i qui lui correspondent ne soit égal à 1. Ainsi, f n'a pas de point fixe sur S^{2k-1} . Le difféomorphisme $\sigma(f)$ de B^{2k} a bien sûr au moins un point fixe intérieur à B^{2k} . En collant deux copies du difféomorphisme $\sigma(f)$ de B^{2k} le long du bord S^{2k-1} , on obtient un difféomorphisme F de S^{2k} , double de $\sigma(f)$. Ce difféomorphisme F est d'ordre p , sans point fixe sur S^{2k-1} et possède au moins un point fixe dans chacun des deux hémisphères bordés par S^{2k-1} . L'ensemble de ses points fixes n'est donc pas connexe. Il résulte du rappel que nous venons de faire que l'ensemble des points fixes de F a l'homologie modulo p d'une sphère de dimension 0 et que c'est en fait une sphère de dimension 0, c'est-à-dire un ensemble à deux éléments! Autrement dit, $\sigma(f)$ a un unique point fixe x_0 dans B^{2k} .

Le lemme est alors une conséquence de la commutativité de C_p et du fait que les f pour lesquels aucun w_i n'est égal à 1 engendrent C_p . \square

Considérons la différentielle de $\sigma(C_p)$ en x_0 . On obtient ainsi un morphisme

$$D: C_p \rightarrow GL(T_{x_0}B^{2k}) \simeq GL(2k, \mathbf{R}).$$

LEMME 3.2. *A conjugaison près, on peut supposer que l'image par D de C_p coïncide avec le sous-groupe $\overline{C_p}$ formé des applications linéaires de $\mathbf{R}^{2k} \simeq \mathbf{C}^k$ du type*

$$(z_1, \dots, z_k) \in \mathbf{C}^k \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k) \in \mathbf{C}^k,$$

avec μ_i racine p -ème de l'unité.

Démonstration. Le fait que $D(C_p)$ soit, à conjugaison près, contenu dans $\overline{C_p}$ résulte de la classification des sous-groupes finis commutatifs de $GL(2k, \mathbf{R})$ dont tous les éléments sont d'ordre p . Nous avons déjà rappelé qu'un difféomorphisme d'ordre fini est localement conjugué à sa différentielle au voisinage d'un point fixe. Il en résulte qu'un difféomorphisme d'ordre fini d'une variété connexe ne peut avoir une différentielle égale à l'identité en un point fixe à moins que ce difféomorphisme ne soit l'identité. En d'autres termes, D est injective et on a donc $D(C_p) = \overline{C_p}$ (à conjugaison près). \square

Remarquons que nous n'affirmons pas que si $f \in C_p$ est défini par (w_1, \dots, w_k) , alors le k -uplet (μ_1, \dots, μ_k) qui définit $D(f)$ coïncide avec (w_1, \dots, w_k) .

On choisit $p > k$ et f un élément de C_p tels que $D(f)$ soit une application linéaire du type:

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k),$$

où les μ_i sont distincts deux à deux et différents de 1. Ceci implique que x_0 est un point fixe isolé de $\sigma(f)$ et les considérations du lemme 3.1 entraînent que x_0 est le seul point fixe de $\sigma(f)$.

LEMME 3.3. *Le centralisateur Z de $D(f)$ dans $GL(2k, \mathbf{R})$ est abélien.*

Démonstration. Tout élément de Z est diagonal, car il préserve les directions propres de $D(f)$. \square

Soit $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f)$ le groupe des difféomorphismes de S^{2k-1} de classe C^∞ commutant avec f et isotopes à l'identité par une isotopie commutant avec f . Le groupe $\sigma \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f) \subset \text{Diff}_0^1(B^{n+1})$ fixe évidemment x_0 et la différentielle en x_0 est dans Z . On a donc un morphisme

$$D: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f) \rightarrow Z$$

qui envoie f sur un élément non trivial.

La contradiction cherchée est dans le lemme suivant, analogue au lemme 2.2. Il ne serait pas difficile de déduire ce lemme d'un théorème profond

de W. Thurston sur la simplicité de certains groupes de difféomorphismes. Il nous semble cependant intéressant de démontrer le lemme de manière complètement explicite.

LEMME 3.4. *L'élément f appartient au groupe des commutateurs de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f)$.*

Démonstration. Soit w_1, \dots, w_k les racines de l'unité telles que

$$f(z_1, \dots, z_k) = (w_1 z_1, \dots, w_k z_k)$$

Puisque $\sigma(f)$ ne fixe que le point x_0 dans B^{n+1} , le difféomorphisme f n'a pas de point fixe dans S^n c'est-à-dire que les w_i sont tous différents de 1. Fixons des entiers non nuls n_1, \dots, n_k tels que:

$$w_j = \exp(2i\pi n_j/p) \quad j = 1, \dots, k.$$

Soit ϕ_t le flot périodique ($\phi_1 = \text{id}$) défini sur S^{2k-1} par:

$$\phi_t(z_1, \dots, z_k) = (\exp(2i\pi n_1 t)z_1, \dots, \exp(2i\pi n_k t)z_k).$$

On a $f = \phi_{1/p}$.

Soit N le plus petit multiple commun de p, n_1, \dots, n_k . Ainsi $1/p$ et toutes les périodes des orbites périodiques de ϕ_t sont des multiples entiers de $1/N$.

Comme pour tout flot périodique sans point fixe, on peut recouvrir S^{2k-1} par un nombre fini d'ouverts U_j «trivialisants» pour le fibré de Seifert associé. Plus précisément, U_j est difféomorphe au quotient de $\overset{\circ}{B}{}^{2k-2} \times S^1$ par un difféomorphisme périodique du type

$$(u_1, \dots, u_{k-1}, \theta) \in \overset{\circ}{B}{}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (\alpha_1 u_1, \dots, \alpha_{k-1} u_{k-1}, w\theta) \in \overset{\circ}{B}{}^{2k-2} \times S^1$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, w$ sont des racines N -èmes de l'unité. Dans ces coordonnées, le flot ϕ_t se relève à $\overset{\circ}{B}{}^{2k-2} \times S^1$ par

$$\bar{\phi}_t(u_1, \dots, u_{k-1}, \theta) = (u_1, \dots, u_{k-1}, \exp(2i\pi t)\theta).$$

Rappelons que nous avons construit au paragraphe précédent des courbes A_t et B_t dans $G = PSL(2, \mathbf{R})$ (avec $t \in [0, 2\pi[$) et leurs relevés \tilde{A}_t et \tilde{B}_t dans G_∞ . Notons \bar{A}_t et \bar{B}_t les projections de \tilde{A}_t et \tilde{B}_t dans G_N . Les éléments \bar{A}_t et \bar{B}_t peuvent être considérés comme des difféomorphismes du cercle S^1 commutant avec la rotation d'angle $2\pi/N$. De plus, $[\bar{A}_t, \bar{B}_t]$ est une rotation d'angle t/N .

Soit $\tau_j: S^{2k-1} \rightarrow [0, 2\pi[$ une fonction de classe C^∞ à support compact dans U_j et invariante par ϕ_t . On note aussi $\tau_j: \overset{\circ}{B}{}^{2k-2} \times S^1 \rightarrow [0, 2\pi[$ la fonction

obtenue en composant la projection de $\check{B}^{2k-2} \times S^1$ sur U_j et τ_j . On remarquera que $\tau_j(x, \theta)$ ne dépend pas de θ car τ_j est invariant par ϕ_t . Les applications

$$(x, \theta) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{A}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1$$

$$(x, \theta) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{B}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1$$

passent au quotient en des difféomorphismes de U_j à supports compacts. En prolongeant ces difféomorphismes par l'identité en dehors de U_j , on obtient des difféomorphismes \bar{A}_{τ_j} et \bar{B}_{τ_j} de S^{2k-1} qui commutent évidemment avec f . Par ailleurs,

$$[\bar{A}_{\tau_j}, \bar{B}_{\tau_j}](m) = \phi_{\tau_j(m)/N}(m).$$

Le difféomorphisme f coïncide avec $\phi_{1/p}$. Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit donc d'écrire la fonction constante N/p comme somme de fonctions τ_j du type précédent:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{N} \tau_1 + \dots + \frac{1}{N} \tau_q.$$

En effet, on aura alors

$$f = \phi_{1/p} = [\bar{A}_{\tau_1}, \bar{B}_{\tau_1}] \dots [\bar{A}_{\tau_q}, \bar{B}_{\tau_q}].$$

Pour cela, il suffit d'utiliser une partition de l'unité subordonnée aux U_j et d'en prendre la moyenne sous l'action de S^1 associée à ϕ_t pour la rendre invariante. \square

4. LE CAS DES SPHÈRES PAIRES

Nous identifierons la sphère S^{2k} à l'ensemble des points (z_1, \dots, z_k, t) de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$ tels que $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 + t^2 = 1$. Comme précédemment, nous fixons un nombre premier p et nous considérons le groupe C_p des difféomorphismes de S^{2k} , isotopes à l'identité, du type:

$$f: (z_1, \dots, z_k, t) \in S^{2k} \mapsto (w_1 z_1, \dots, w_k z_k, t) \in S^{2k},$$

où les w_i sont des racines p -èmes de l'unité.

Supposons encore par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k}) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^{2k+1})$$

qui prolonge les difféomorphismes de la sphère à la boule.