

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** AUTOMORPHIC SPECTRA ON THE TREE OF  $PSL_2$   
**Autor:** Efrat, Isaac

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58728>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.03.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Then the spectral resolution of  $L^2(F)$  reads

(7)

$$g(n) = \sum_{i=1,2} \langle g, u_i \rangle u_i(n) + 2\pi \int_0^\pi \langle g, \tilde{f}_\theta \rangle \tilde{f}_\theta(n) \frac{d\theta}{(q-1)^2 + 4q \sin^2 \theta}.$$

We end this paper by showing that, as one might expect from the theory of Eisenstein series, the eigenfunctions  $f_\lambda$  can be parametrized as a family of functions that depend holomorphically on a complex parameter. Precisely, let

$$E(n, s) = q^{ns}(q^{s-1} - q^{1-s}) + q^{n(1-s)}(q^s - q^{-s}).$$

Then  $E(n, s)$  is entire in  $s$  and satisfies the functional equation

$$E(n, s) = -E(n, 1-s).$$

Furthermore, a direct computation shows that

$$(TE)(n, s) = (q^s + q^{1-s})E(n, s).$$

There are two ways in which  $\lambda = q^s + q^{1-s}$  can be real. Write  $s = \sigma + it$ .

If  $t = \frac{k\pi}{\log q}$  then  $\lambda = (-1)^k(q^\sigma + q^{1-\sigma})$ , and in particular

$$\lambda = q + 1 \quad (\lambda = -(q + 1))$$

if  $\sigma = 1$  and  $k$  is even ( $k$  is odd). Otherwise we must have  $\sigma = \frac{1}{2}$ . If we write

$t = \frac{\theta}{\log q}$  we obtain our  $\lambda = 2\sqrt{q} \cos \theta$ .

#### REFERENCES

- [B] BIGGS, N. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1974.
- [C1] CARTIER, P. Géométrie et analyse sur les arbres. *Sém. Bourbaki 1971/2*, exposé 407.
- [C2] — Harmonic analysis on trees. *Proc. of Symp. on Pure Mathematics*, vol. XXVI, 1973.
- [D] DRINFELD, V. G. Number of two-dimensional irreducible representations of the fundamental group of a curve over a finite field. *Funct. Anal. Appl.* 15, 4 (1982), 294-295.
- [E0] EFRAT, I. Automorphic spectra on the tree of  $PGL_2$ . *Publ. of MSRI*, No. 08908 (1986).

- [E1] — On the existence of cusp forms over function fields. *J. für die reine und angewandte Math.* 399 (1989), 173-187.
- [E2] — Spectral deformations over graphs of groups. *Invent. Math.* 102 (1990), 447-462.
- [HLW] HARDER, G., W. LI and R. WEISINGER. Dimensions of spaces of cusp forms over function fields. *J. für die reine und angewandte Math.* 319 (1980), 73-103.
- [H] HEJHAL, D. *The Selberg trace formula for  $PSL_2(R)$* . Springer Lecture Notes 1001, 1983.
- [I] IWANIEC, H. Non-holomorphic modular forms and their applications. In Rankin (ed.), *Modular Forms*, Halsted Press, 1984.
- [JL] JACQUET, H. and R. LANGLANDS. *Automorphic forms on  $GL(2)$* . Springer Lecture Notes 114, 1970.
- [L] LI, W. Eisenstein series and decomposition theory over function fields. *Math. Ann.* 240 (1979), 115-139.
- [Sch] SCHLEICH, T. Einige Bemerkungen zur Spectralzerlegung der Hecke-Algebra für die  $PGL(2)$  über Funktionenkörpern. *Bonner Math. Schriften* 71 (1974).
- [S] SERRE, J.-P. *Trees*. Springer Verlag, 1980.
- [T] TERRAS, A. *Harmonic Analysis on Symmetric spaces*. Vol. I, Springer Verlag, 1985.
- [W] WEIL, A. On the analogue of the modular group in characteristic  $p$ . *Collected Papers*, vol. III, Springer Verlag, 1979.

(Reçu le 30 août 1990)

Isaac Efrat

Department of Mathematics  
University of Maryland  
College Park, MD 20742

**Vide-leer-empty**