

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE  
ALGÉBRIQUE PROJECTIF  
**Autor:** Chéniot, Denis  
**Kapitel:** 10. LEMMES D'ALGÉBRICITÉ ET DE GÉNÉRICITÉ  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58744>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 10. LEMMES D'ALGÉBRICITÉ ET DE GÉNÉRICITÉ

Nous avons regroupé dans ce paragraphe les justifications des assertions d'algébricité ou de générnicité utilisées dans la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.3 ou formulées dans leur énoncé même. Nous les obtenons toutes comme corollaires de la proposition principale d'algébricité 10.10 ci-dessous, à l'exception toutefois de la proposition finale 10.20 qui utilise le théorème de Sard. Nous ferons essentiellement des raisonnements d'analyticité susceptibles d'être généralisés au cas d'un espace analytique non projectif. Dans notre cas particulier, nous pourrons conclure à l'algébricité grâce au théorème de Chow affirmant l'identité entre sous-ensembles analytiques fermés et algébriques fermés d'un espace projectif complexe.

Etant donné  $n \geq 0$ , soit

$$\pi: \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$$

la surjection canonique. Pour  $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , nous poserons

$$(10.1) \quad \hat{x} = \pi^{-1}(x) \cup \{0\}.$$

C'est une droite vectorielle de  $\mathbf{C}^{n+1}$ . Si  $P$  est un  $r$ -plan projectif de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec  $0 \leq r \leq n$ , nous poserons aussi

$$(10.2) \quad \hat{P} = \pi^{-1}(P) \cup \{0\}.$$

C'est un  $(r+1)$ -plan vectoriel de  $\mathbf{C}^{n+1}$ . En particulier  $\{\hat{x}\} = \hat{x}$  pour tout  $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ .

Pour  $0 \leq r \leq n$ , nous noterons

$$(10.3) \quad \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \quad \text{l'ensemble des } r\text{-plans projectifs de } \mathbf{P}^n(\mathbf{C}).$$

Nous regarderons  $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  toujours au travers de l'identification canonique

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \Phi: \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{C}^{n+1}) \\ P &\mapsto \hat{P} \end{aligned}$$

avec la grassmannienne  $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{C}^{n+1})$  des sous-espaces vectoriels de dimension  $r+1$  de  $\mathbf{C}^{n+1}$ , le sous-espace  $\hat{P}$  étant défini par (10.2). Nous aurons donc sur  $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  une structure de variété analytique complexe compacte et connexe de dimension  $(r+1)((n+1)-(r+1)) = (r+1)(n-r)$  (cf. [Wh3] 5.13 B et [Di2] (16.11.8) et (16.11.9)). C'est en fait une structure de variété algébrique (cf. [Di1] §3, n° 5). Dans le cas particulier où  $r=0$ , on a l'isomorphisme canonique

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{G}^0(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \\ x &\mapsto \{x\}. \end{aligned}$$

Mais on a aussi un plongement analytique

$$(10.6) \quad \Psi: \mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{C}^{n+1}) \rightarrow \mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C}).$$

avec  $N = \binom{n+1}{r+1} = \frac{(n+1)n \dots (n-r+1)}{(r+1)!}$ , qui à  $F \in \mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{C}^{n+1})$  fait correspondre le

point  $\Psi(F)$  de  $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$  dont des coordonnées homogènes sont données par un système de *coordonnées grassmanniennes* de  $F$ . On obtient un tel système en portant en colonnes d'une matrice les coordonnées des vecteurs d'une base de  $F$  et en en prenant les mineurs d'ordre  $r+1$  (ordonnés par exemple lexicographiquement mais qu'il est plus commode d'indexer par le multiindice des lignes choisies); le point  $\Psi(F)$  ne dépend pas du choix de cette base (cf. [Wh3] 5.13 D). Ce plongement est en fait algébrique (cf. [Di1] §3, n° 5). On a alors aussi le plongement

$$(10.7) \quad \Psi \circ \Phi: \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \rightarrow \mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$$

et, pour  $P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ , on appelle aussi «coordonnées grassmanniennes de  $P$ » les coordonnées grassmanniennes de  $\Phi(P)$ . Dans le cas particulier où  $r=0$ , on a  $N-1=n$  et  $\Psi \circ \Phi$  est un isomorphisme, réciproque de l'isomorphisme (10.5); et pour  $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , les coordonnées grassmanniennes de  $\{x\}$  coïncident avec les coordonnées homogènes de  $x$ . D'après le plongement (10.7), pour montrer l'algébricité d'un sous-ensemble  $\mathcal{E}$  de  $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ , nous pourrons nous contenter d'un raisonnement d'analyticité dans  $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  car, d'après le théorème de Chow (cf. [Wh3] 5.9 G), l'ensemble  $\Psi(\Phi(\mathcal{E}))$  est algébrique fermé si et seulement s'il est analytique fermé dans  $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$  donc si et seulement si  $\mathcal{E}$  est analytique fermé dans  $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ . Notons qu'alors les dimensions au sens algébrique et au sens analytique de  $\mathcal{E}$  coïncident (cf. [H-P] chap. X, §§5 et 14).

Il sera aussi question d'algébricité de sous-ensembles de la variété algébrique  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ . Comme elle se plonge dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$  et qu'on a aussi l'analogue du théorème de Chow pour les sous-ensembles algébriques fermés d'un produit d'espaces projectifs complexes (cf. [Wh3] 5.11 B), un sous-ensemble  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  sera algébrique fermé si et seulement s'il est analytique fermé dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ . Ici aussi les dimensions algébrique et analytique complexe de  $\mathcal{F}$  coïncident.

Etant donnée une sous-variété analytique pure  $S$  de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , avec  $n \geq 0$ , nous considérons, pour  $0 \leq r \leq n$ , l'ensemble

$$(10.8) \quad \mathcal{S}^r(S) = \{(x, P) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \mid x \in S \cap P \text{ et } P \text{ n'est pas transverse en } x \text{ à } S \text{ dans } \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\}.$$

Et, si  $\mathfrak{S}$  est un ensemble de sous-variétés pures de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , nous posons

$$(10.9) \quad \mathcal{S}^r(\mathfrak{S}) = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \mathcal{S}^r(S).$$

Voici alors l'énoncé de la proposition principale de ce paragraphe:

**PROPOSITION 10.10.** *Soit  $A$  un ensemble algébrique fermé de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec  $n \geq 0$  et soit  $\mathfrak{S}$  une stratification de  $A$  satisfaisant à la condition (a) de Whitney (mais pas forcément à la condition (b) et ne possédant pas forcément la propriété de frontière: cf. [Wh2] §§18 et 19, [L-T2] (1.2) et [Ch3]*

2<sup>e</sup> partie, § 5). Alors, avec les notations (10.9) et (10.8) ci-dessus,  $\mathcal{S}^r(\mathfrak{S})$  est un sous-ensemble algébrique fermé de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  pour  $0 \leq r \leq n$ . Pour  $n \geq 1$  et  $r = n - 1$ , on a la majoration  $\dim \mathcal{S}^{n-1}(\mathfrak{S}) \leq n - 1$  (avec la convention  $\dim \emptyset = -1$ ).

*Remarque 10.11.* On peut en fait montrer que, si  $A$  est un sous-ensemble propre de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  (c'est-à-dire distinct de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ ) et non vide et si  $d = \dim A$ , on a, pour  $0 \leq r \leq n$ ,

$$\dim \mathcal{S}^r(\mathfrak{S}) = \begin{cases} r(n-r) + d & \text{si } r + d < n \\ (r+1)(n-r) - 1 & \text{si } r + d \geq n - 1 \end{cases}$$

(cf. [Ch3] 2<sup>e</sup> partie, corollaire 6.9). Nous nous contenterons ici de la majoration  $\dim \mathcal{S}^{n-1}(\mathfrak{S}) \leq n - 1$  pour  $r = n - 1$  qui est plus simple à établir. Elle nous servira à montrer que certains sous-ensembles algébriques sont distincts de l'ambiant.

Nous ferons reposer la démonstration de la proposition 10.10 sur les deux lemmes suivants:

**LEMME 10.12.** *Sous les hypothèses de la proposition 10.10, les ensembles  $\mathcal{S}^r(S)$  pour  $S \in \mathfrak{S}$  sont analytiques locaux d'adhérence analytique dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ .*

**LEMME 10.13.** *Sous les hypothèses de la proposition 10.10, l'ensemble  $\mathcal{S}^r(\mathfrak{S})$  est fermé dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ .*

Le premier lemme est dû à ce que toute strate  $S$  est différence de deux ensembles analytiques fermés; il en résultera grâce à l'analyticité de la modification de Nash de  $\bar{S}$ . Le second lemme provient de la condition (a) de Whitney satisfaite par  $\mathfrak{S}$ . Nous commençons par démontrer ces lemmes:

(10.14) *Démonstration du lemme 10.12.*

Nous ferons comme annoncé mais nous lirons les choses sur cartes. Soit  $S$  une strate de  $\mathfrak{S}$  de dimension  $d$ . Il nous suffit de montrer que l'assertion du lemme est vraie au voisinage de tout point de l'adhérence de  $\mathcal{S}^r(S)$  dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ . Nous allons en fait voir qu'étant donné

$$x \in \bar{S} ,$$

il existe un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  de la forme

$$(10.14.1) \quad \Omega = U \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) ,$$

avec  $U$  voisinage ouvert de  $x$  dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , tel que  $\mathcal{S}^r(S) \cap \Omega$  soit différence de deux ensembles analytiques fermés de  $\Omega$ . Il sera alors clair que  $\mathcal{S}^r(S) \cap \Omega$  est analytique local et le fait que son adhérence dans  $\Omega$  soit analytique résultera de [Wh3] 5.3(U).

En fait  $U$  sera simplement l'ouvert de définition d'une carte standard de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  au voisinage de  $x$ :

$$(10.14.2) \quad \varphi: U \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^n$$

A une permutation des coordonnées près, on peut supposer et nous supposerons que  $U$  est formé des points  $y$  de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  de coordonnées homogènes  $(y_0 : \dots : y_n)$  avec  $y_0 \neq 0$  et que  $\varphi(y) = (y_1/y_0, \dots, y_n/y_0)$ . Nous allons tout lire sur cette carte. Il nous sera commode de poser:

$$(10.14.3) \quad \begin{cases} y' = \varphi(y) & \text{pour } y \in U \\ E' = \varphi(E \cap U) & \text{pour } E \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \end{cases}$$

Alors  $S'$  (qui est non vide puisque  $x \in \bar{S}$ ) est une sous-variété pure de dimension  $d$  de  $\mathbf{C}^n$  et on a

$$\bar{S}' = \varphi(\text{adh}_U(S \cap U)) = \varphi(\bar{S} \cap U) = (\bar{S})'$$

où on a noté  $\text{adh}_U$  pour l'adhérence dans  $U$ . Par définition d'une stratification,  $\bar{S}$  et  $\bar{S} \setminus S$  sont analytiques fermés. La relation ci-dessus montre alors qu'il en est de même pour  $\bar{S}'$  et  $\bar{S}' \setminus S'$  et, d'après [Wh2] lemma 3.13,  $\bar{S}'$  est de dimension constante  $d$ .

Notons d'autre part

$$(10.14.4) \quad H = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus U$$

l'hyperplan projectif à l'infini associé à  $U$ . Alors, pour tout  $P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  tel que  $P \not\subset H$ ,  $P'$  est un  $r$ -plan affine de  $\mathbf{C}^n$ . Pour un tel  $P$ , nous noterons

$$(10.14.5) \quad P'' \quad \text{le } r\text{-plan vectoriel parallèle à } P'.$$

La raison pour considérer  $P''$  est que, si  $P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  et  $y \in P \cap U$  (donc  $P \not\subset H$ ), l'espace tangent à  $P$  en  $y$  se lit à travers la carte (10.14.2) comme

$$(10.14.6) \quad T_y \varphi(T_y P) = T_{y'} P' = P'' ,$$

ce sorte que, si  $P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  et  $y \in P \cap S \cap U$ , on a l'équivalence

$$(10.14.7) \quad \begin{aligned} P \text{ est non transverse en } y \text{ à } S \text{ dans } \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \Leftrightarrow \\ P'' \text{ est non transverse à } T_{y'} S' \text{ dans } \mathbf{C}^n. \end{aligned}$$

Introduisons alors

$$(10.14.8) \quad \mathcal{R} = \{(u, Q) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n) \mid u \in S' \text{ et } Q \text{ n'est pas transverse à } T_u S' \text{ dans } \mathbf{C}^n\} ,$$

$$(10.14.9) \quad \begin{aligned} \delta: V \rightarrow \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n) \quad \text{avec} \quad V = \{P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \mid P \not\subset H\} \\ P \mapsto P' , \end{aligned}$$

$$(10.14.10) \quad \mathcal{E} = \{(y, P) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \mid y \in P\} .$$

On a, d'après (10.14.7),

$$(10.14.11) \quad \mathcal{S}^r(S) \cap \Omega = \mathcal{E} \cap (\varphi \times \delta)^{-1}(\mathcal{R}) .$$

Nous allons nous servir de ce que l'image réciproque d'un ensemble analytique fermé par une application analytique est un ensemble analytique fermé de l'espace de départ (cf. [Wh3] 5.3 (BB)). Remarquons d'autre part que  $\mathcal{E} \cap \Omega \subset U \times V$  donc que l'intersection avec  $\mathcal{S}^r$  d'un

ensemble fermé de  $U \times V$  est fermée dans  $\mathcal{E} \cap \Omega$ . Pour montrer, comme annoncé, que  $\mathcal{L}'(S) \cap \Omega$  est différence de deux ensembles analytiques fermés de  $\Omega$  etachever ainsi la démonstration du lemme 10.12, il nous suffira donc de prouver les trois points suivants:

- (i)  $\mathcal{E}$  est un ensemble analytique fermé;
- (ii)  $V$  est ouvert et  $\delta$  est une application analytique;
- (iii)  $\mathcal{R}$  est différence de deux ensembles analytiques fermés de  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}'(\mathbf{C}^n)$ .

Le point significatif est le troisième. Nous les justifions dans l'ordre.

(i) Nous avons vu que cette assertion implique l'algébricité de  $\mathcal{E}$  et c'est en fait une démonstration directe d'algébricité que nous allons faire. La relation  $y \in P$  est équivalente à  $\hat{y} \in \hat{P}$  (avec les notations (10.1) et (10.2)). Si alors  $Y$  est la matrice colonne formée des coordonnées d'un vecteur non nul de  $\hat{y}$  (c'est-à-dire d'un système de coordonnées homogènes de  $y$ ), et si  $M$  est la matrice  $(n+1) \times (r+1)$  obtenue en portant en colonnes les coordonnées d'une base de  $\hat{P}$ , la relation  $\hat{y} \in \hat{P}$  s'exprime par l'annulation de tous les mineurs d'ordre  $r+2$  de la matrice formée par la juxtaposition de  $Y$  et  $M$ . En développant ces mineurs suivant la première colonne, on obtient des polynômes séparément homogènes, de degré 1 en les coordonnées homogènes de  $y$  et de degré 1 en les mineurs d'ordre  $r+1$  de  $M$ , lesquels forment un système de coordonnées grassmanniennes de  $\hat{P}$ ; l'algébricité de  $\mathcal{E}$  résulte alors de [Wh3] 5.11 A et 5.11 D compte tenu du plongement (10.7).

(ii) Nous allons utiliser les plongements (10.7) de  $\mathbf{G}'(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  dans  $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$  et (10.6) de  $\mathbf{G}'(\mathbf{C}^n)$  dans  $\mathbf{P}^{N'-1}(\mathbf{C})$ . Pour commencer, un élément  $P$  de  $\mathbf{G}'(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  appartient à  $V$  si et seulement si ses systèmes de coordonnées grassmanniennes comportent au moins une coordonnée de multiindice contenant 0 non nulle. La même condition sur les coordonnées homogènes d'un point de  $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$  donne un ouvert  $v$  dont la trace sur l'image du plongement de  $\mathbf{G}'(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  est l'image de  $V$  par ce plongement. Cela montre que  $V$  est ouvert. Pour voir ensuite la relation entre  $P$  et  $P''$ , identifions  $\mathbf{C}^n$  à  $\hat{H} = \{0\} \times \mathbf{C}^n \subset \mathbf{C}^{n+1}$  (cf. fig. 10.1): alors, pour  $P \in V$ , le  $r$ -plan affine  $P'$  est identifié à la projection de  $\hat{P} \cap (\{1\} \times \mathbf{C}^n)$  sur  $\{0\} \times \mathbf{C}^n$  et  $P''$  est identifié à  $\hat{P} \cap (\{0\} \times \mathbf{C}^n)$ . Soit  $((\xi_{11}, \dots, \xi_{n1}), \dots, (\xi_{1r}, \dots, \xi_{nr}))$  une base de  $P''$ . Alors

$$((0, \xi_{11}, \dots, \xi_{n1}), \dots, (0, \xi_{1r}, \dots, \xi_{nr}))$$

est une base de  $\hat{P} \cap (\{0\} \times \mathbf{C}^n)$  et on peut la compléter en une base de  $\hat{P}$  par un vecteur de  $\hat{P}$  n'appartenant pas à  $\{0\} \times \mathbf{C}^n$  dont on peut normaliser la coordonnée d'indice 0 de sorte qu'il s'écrive  $(1, \xi_{10}, \dots, \xi_{n0})$ . Posons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{10} & \xi_{11} & \dots & \xi_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n0} & \xi_{n1} & \dots & \xi_{nr} \end{pmatrix}$$

Un système de coordonnées grassmanniennes de  $\hat{P}$  est donné par les mineurs d'ordre  $r+1$  de  $M$ . On voit alors que ceux de ces mineurs qui contiennent la 1<sup>re</sup> ligne de  $M$  donnent un système de coordonnées grassmanniennes de  $P''$ . Il y a donc une projection de  $\mathbf{C}^N$  dans  $\mathbf{C}^{N'}$  qui, par passage au quotient, donne une application analytique de l'ouvert  $v$  de  $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$

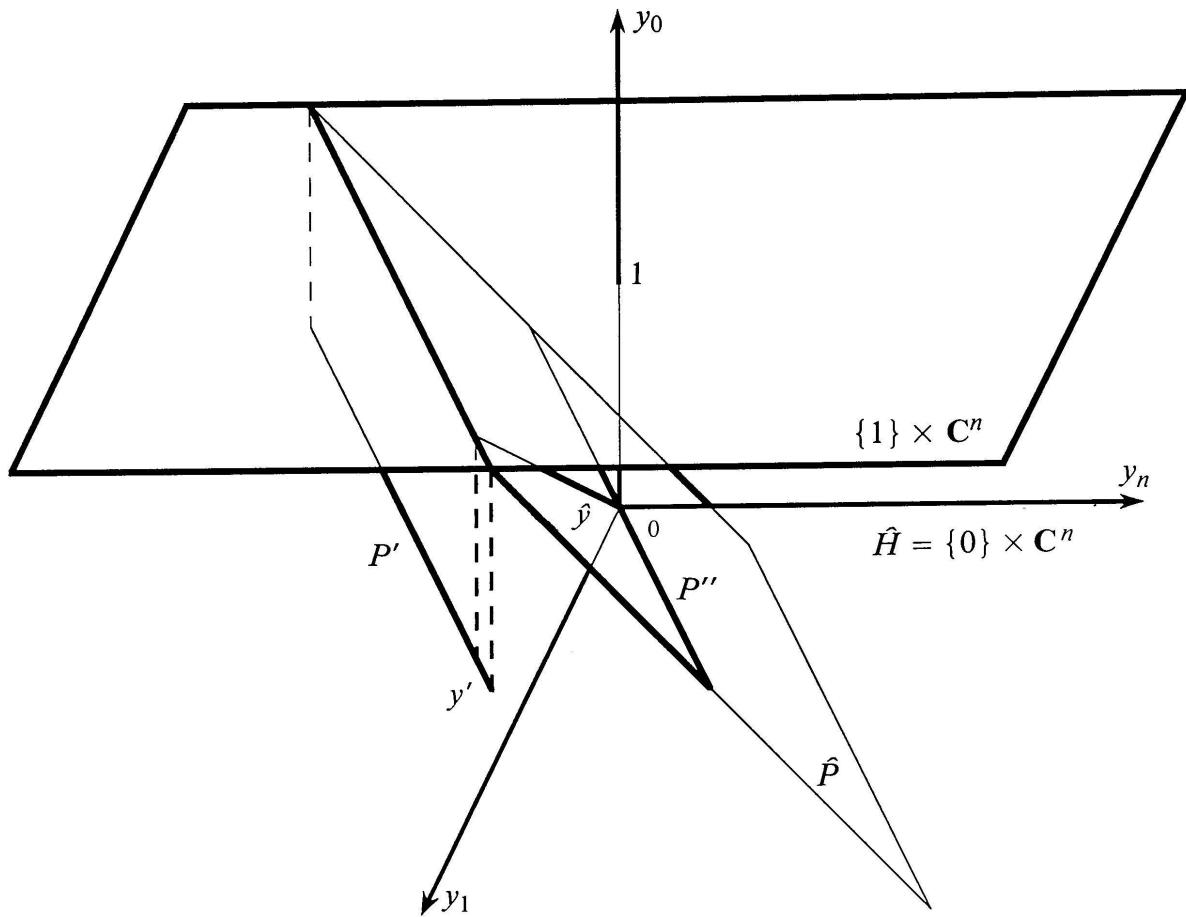


FIGURE 10.1

dans  $\mathbf{P}^{N'-1}(\mathbf{C})$  dont  $\delta$  peut être considérée comme une restriction grâce aux plongements (10.7) et (10.6). Nous avons en fait montré que  $\delta$  est un morphisme algébrique.

(iii) Cette assertion résultera de ce que  $S'$  est différence des deux ensembles analytiques fermés  $\overline{S'}$  et  $\overline{S'} \setminus S'$  et de l'analyticité de la modification de Nash de  $\overline{S'}$  qui est le fait essentiel sur lequel repose la démonstration de ce lemme. Rappelons que  $\overline{S'}$  est de dimension constante  $d$ . Si  $\overline{S'}^0$  désigne la partie lisse de  $\overline{S'}$ , la modification de Nash de  $\overline{S'}$  est alors

$$(10.14.12) \quad \mathcal{N} = \overline{\{(u, T_u \overline{S'}^0) \mid u \in \overline{S'}^0\}} \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n).$$

L'analyticité de  $\mathcal{N}$  est démontrée dans [Wh2] theorem 16.4 à l'aide d'un système de champs de vecteurs analytiques au voisinage de tout point de  $\overline{S'}$  tels que, pour  $u \in \overline{S'}^0$ , les vecteurs correspondants engendrent  $T_u \overline{S'}^0$ ; l'existence de ces champs de vecteurs résulte de la cohérence du faisceau des idéaux des germes de fonctions holomorphes au voisinage de chaque point de  $\overline{S'}$  qui s'annulent sur le germe de  $\overline{S'}$  en ce point (cf. [Wh2] lemma 15.1). Nous allons relier  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{N}$ . Commençons par constater que

$$(10.14.13) \quad \mathcal{N} \cap (S' \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)) = \{(u, T_u S') \mid u \in S'\}$$

puisque l'application  $u \mapsto T_u S'$  de  $S'$  dans  $\mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$  est continue. Posons ensuite

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{(u, T, Q) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n) \mid (u, T) \in \mathcal{N} \\ &\quad \text{et } Q \text{ n'est pas transverse à } T \text{ dans } \mathbf{C}^n\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{Q} = \text{projection de } \mathcal{P} \text{ sur } \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n).$$

D'après (10.14.13), on a

$$\mathcal{R} = \mathcal{Q} \cap (S' \times \mathbf{G}'(\mathbf{C}^n)) .$$

L'assertion (iii) résultera alors de ce que  $S'$  est différence de  $\overline{S'}$  et  $\overline{S'} \setminus S'$  et de l'analyticité de  $\mathcal{Q}$  que nous allons déduire de celle de  $\mathcal{N}$ . Comme  $\mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$  est compact, il nous suffit de montrer que  $\mathcal{P}$  est analytique fermé dans  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{G}'(\mathbf{C}^n)$  pour en déduire, grâce au théorème de l'application analytique propre (cf. [Wh3] 5.4A), que  $\mathcal{Q}$  est analytique fermé dans  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}'(\mathbf{C}^n)$ . Mais l'analyticité de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{G}'(\mathbf{C}^n)$  résulte bien de l'analyticité de  $\mathcal{N}$  dans  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$  car la non transversalité de  $Q$  à  $T$  est donnée par des relations algébriques entre les coordonnées de  $Q$  et  $T$  dans des cartes standard de  $\mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$  et  $\mathbf{G}'(\mathbf{C}^n)$  (cf. [Di2] (16.11.10) et [Wh3] chap. 5, § 13). On a, en effet, des bases de  $Q$  et  $T$  qui sont fonctions affines de ces coordonnées et la non transversalité en question s'exprime par le fait que ce système est de rang  $< n$  donc par l'annulation de déterminants en les composantes des vecteurs de ces bases. Cela achève de justifier l'assertion (iii).

La démonstration du lemme 10.12 que nous avions ramenée aux assertions (i), (ii) et (iii) se trouve ainsi terminée.  $\square$

#### (10.15) *Démonstration du lemme 10.13.*

Pour ce lemme aussi nous raisonnons sur cartes. Il nous suffit de montrer que la trace de  $\mathcal{S}'(\mathfrak{S})$  sur tout élément d'un recouvrement ouvert de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}'(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  est fermée dans cet élément. Nous pouvons réaliser ce recouvrement, comme dans la démonstration qui précède, par des ouverts  $\Omega$  du type (10.14.1) où  $U$  est un ouvert de carte standard de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ . Nous fixons un tel  $U$  en faisant la même hypothèse de commodité qu'après (10.14.2). Nous pouvons donc nous servir de tout ce qui a été fait dans la démonstration (10.14). Nous utiliserons les mêmes notations excepté qu'au lieu de  $\mathcal{R}$  nous noterons  $\mathcal{R}_S$  pour pouvoir faire varier  $S$  dans  $\mathfrak{S}$ . Nous écrirons donc, pour  $S \in \mathfrak{S}$ ,

$$(10.15.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}_S = \{(u, Q) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}'(\mathbf{C}^n) \mid u \in S' \\ \text{et } Q \text{ n'est pas transverse à } T_u S' \text{ dans } \mathbf{C}^n\} \end{aligned}$$

(la notation  $S'$  est définie en (10.14.3)). Nous posons maintenant

$$(10.15.2) \quad \mathcal{R} = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \mathcal{R}_S .$$

La relation (10.14.11) donne alors

$$(10.15.3) \quad \mathcal{S}'(\mathfrak{S}) \cap \Omega = \mathcal{E} \cap (\phi \times \delta)^{-1}(\mathcal{R}) .$$

D'après la remarque qui suit (10.14.11) et la continuité de  $\delta$  démontrée dans l'assertion (ii) de la démonstration (10.14), il nous suffit donc de montrer que  $\mathcal{R}$  est fermé.

Comme  $\mathbf{C}^n$  et  $\mathbf{G}'(\mathbf{C}^n)$  sont métrisables (cf. [Wh3] chap. 5, § 14), nous pouvons raisonner sur des suites. Soit  $((u_k, Q_k)) \rightarrow (u, Q)$  une suite de  $\mathcal{R}$  convergeant vers un point  $(u, Q) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}'(\mathbf{C}^n)$ . Puisque  $A$  est fermé, on a  $u \in A'$  et il existe donc une strate  $T$  de  $\mathfrak{S}$  telle que  $u \in T'$ . Comme d'autre part  $\mathfrak{S}$  est localement finie (dans notre cas, finie), il n'y a au voisinage de  $u$  qu'un nombre fini de  $S'$  pour  $S \in \mathfrak{S}$  et, quitte à procéder à une extraction de suite, nous pouvons supposer que  $u_k \in S'$  pour tout  $k$  pour une strate  $S$  fixe. Soit  $d$  sa dimension. Nous pouvons aussi supposer alors, grâce à la compacité de  $\mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$ , que  $(T_{u_k} S') \rightarrow L$  pour un certain  $d$ -plan  $L$ . Maintenant, par hypothèse,  $Q_k$  est non transverse à

$T_{u_k}S'$  dans  $\mathbf{C}^n$  pour tout  $k$ . Nous avons vu, dans la preuve de l'assertion (iii) de la démonstration (10.14), que l'ensemble des couples  $(R, K) \in \mathbf{G}'(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$  qui sont non transverses dans  $\mathbf{C}^n$  est algébrique fermé. La non transversalité se conserve donc à la limite et  $Q$  est non transverse à  $L$  dans  $\mathbf{C}^n$ . Mais nous avons supposé que la stratification  $\mathfrak{S}$  satisfaisait à la condition (a) de Whitney. Comme cette condition est de nature locale et invariante par isomorphisme analytique, le couple  $(S', T')$  y satisfait au point  $u$ . On a donc  $T_u T' \subset L$ . Le  $r$ -plan  $Q$  est alors *a fortiori* non transverse à  $T_u T'$ , ce qui signifie que  $(u, Q) \in \mathcal{R}_T \subset \mathcal{R}$ . Cela montre que  $\mathcal{R}$  est fermé. La démonstration du lemme 10.13 que nous avions ramenée à cette assertion se trouve ainsi terminée.  $\square$

(10.16) *Démonstration de la proposition 10.10.*

D'après le lemme 10.13,  $\mathcal{S}^r(\mathfrak{S})$  est fermé dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ . Il est donc réunion des adhérences des  $\mathcal{S}^r(S)$  pour  $S \in \mathfrak{S}$ . Comme cette réunion est localement finie (en fait finie), il résulte alors du lemme 10.12 que  $\mathcal{S}^r(\mathfrak{S})$  est analytique (cf. [Wh3] 5.3(I)). Et nous avons vu que cela impliquait que  $\mathcal{S}^r(\mathfrak{S})$  est algébrique.

Ce qui précède montre aussi que

$$(10.16.1) \quad \dim \mathcal{S}^r(\mathfrak{S}) = \sup_{S \in \mathfrak{S}} \dim \overline{\mathcal{S}^r(S)}$$

(cf. [Wh3] 5.3(K)). Mais on a

$$(10.16.2) \quad \dim \overline{\mathcal{S}^r(S)} = \dim \mathcal{S}^r(S) ,$$

égalité valable pour tout ensemble analytique local  $V$  d'adhérence analytique: en effet, il est d'une part clair que  $\dim V \leq \dim \bar{V}$ . D'autre part, étant donné un point lisse de  $\bar{V}$  de dimension maximum  $\delta$ , il possède un voisinage ouvert dans  $\bar{V}$  composé de points lisses de même dimension et ce voisinage rencontre nécessairement  $V$ ; comme  $V$  est localement fermé, les points de rencontre sont aussi des points lisses de dimension  $\delta$  de  $V$ , d'où  $\dim \bar{V} \leq \dim V$ .

Pour majorer  $\dim \mathcal{S}^r(\mathfrak{S})$ , il suffit donc de majorer  $\dim \mathcal{S}^r(S)$  pour  $S \in \mathfrak{S}$ . Lorsque  $\mathcal{S}^r(S) = \emptyset$  (ce qui arrive pour  $r = n$  ou  $\dim S = n$ ), on a la convention  $\dim \emptyset = -1$ . En dehors de ce cas exceptionnel, on peut faire la majoration en évaluant, pour  $x \in S$ , la dimension des fibres  $F_x$  du morphisme d'espaces analytiques  $f: \mathcal{S}^r(S) \rightarrow S$  induit par la projection de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  sur  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ . Ces fibres sont, en effet, des sous-ensembles analytiques fermés de  $\mathcal{S}^r(S)$  (cf. [Wh3] 5.3(BB)) et on a, pour  $(x, P) \in \mathcal{S}^r(S)$ ,

$$(10.16.3) \quad \dim_{(x, P)} \mathcal{S}^r(S) \leq \dim_x S + \dim_{(x, P)} F_x$$

(cf. [Wh3] chap. 4, theorem 6D auquel on peut se ramener par une lecture sur cartes).

L'évaluation de  $\dim_{(x, P)} F_x$  est simple dans le cas où  $n \geq 1$  et  $r = n - 1$ : on a, en effet,  $F_x = \{x\} \times G_x$  où  $G_x$  est alors formé des hyperplans projectifs de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  contenant le  $d$ -plan projectif tangent en  $x$  à  $S$  (avec  $d = \dim S \neq n$ ), c'est-à-dire l'unique  $d$ -plan projectif  $T$  tel que  $x \in T$  et  $T_x T = T_x S$ . Alors aussi, on a un isomorphisme de dualité entre  $\mathbf{G}^{n-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  et  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  (cf. [Di1] §3, n° 5) qui transforme  $G_x$  en un  $(n - d - 1)$ -plan projectif de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ . Ainsi donc, dans ce cas particulier,  $\dim_{(x, P)} F_x = n - d - 1$  et l'inégalité (10.16.3) donne:

$$\dim \mathcal{S}^{n-1}(S) \leq d + (n - d - 1) = n - 1 .$$

Cette majoration et les relations (10.16.1) et (10.16.2) entraînent la majoration de l'énoncé concernant  $\dim \mathcal{P}^{n-1}(\mathcal{S})$ .  $\square$

Voici maintenant les corollaires de la proposition 10.10 justifiant les assertions d'algébricité et de générnicité des paragraphes précédents:

**COROLLAIRE 10.17.** *Soit  $A$  un ensemble algébrique fermé de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec  $n \geq 0$ , muni d'une stratification  $\mathcal{S}$  satisfaisant à la condition (a) de Whitney. Soit  $P$  un  $r$ -plan projectif de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec  $0 \leq r \leq n$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{S}(\mathcal{S}, P)$  des points en lesquels  $P$  rencontre non transversalement dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  une strate de  $\mathcal{S}$  est un sous-ensemble algébrique fermé de  $P$ .*

*Démonstration.* Le sous-ensemble  $\mathcal{S}(\mathcal{S}, P)$  de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  est relié à l'ensemble  $\mathcal{P}^r(\mathcal{S})$  de la proposition 10.10 par la relation

$$\mathcal{S}(\mathcal{S}, P) \times \{P\} = \mathcal{P}^r(\mathcal{S}) \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \{P\}),$$

ce qui montre que  $\mathcal{S}(\mathcal{S}, P)$  est analytique fermé donc algébrique fermé dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ .  $\square$

Le corollaire 10.17 justifie l'algébricité de l'ensemble  $C$  qui intervient dans la preuve du point (iv) du lemme 9.2, point clef dans la démonstration du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3.

**COROLLAIRE 10.18.** *Soit  $A$  un ensemble algébrique fermé de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec  $n \geq 0$ , muni d'une stratification  $\mathcal{S}$  satisfaisant à la condition (a) de Whitney. Alors, pour  $0 \leq r \leq n$ , l'ensemble  $\mathcal{P}^r(\mathcal{S})$  des  $r$ -plans projectifs de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  qui ne sont pas transverses à toutes les strates de  $\mathcal{S}$  est un sous-ensemble algébrique fermé propre de  $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ . Nous convenons, comme dans l'énoncé du théorème 1.1, que chaque  $r$ -plan projectif est transverse à toute strate qu'il ne rencontre pas.*

*Démonstration.* L'ensemble  $\mathcal{P}^r(\mathcal{S})$  est la projection de  $\mathcal{S}^r(\mathcal{S})$  sur le second facteur de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ . Comme  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  est compact, cette projection est propre et il résulte du théorème de l'application propre (cf. [Wh3] 5.4 A) que  $\mathcal{P}^r(\mathcal{S})$  est analytique fermé donc algébrique fermé dans  $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ . Si d'autre part  $f$  est la restriction de cette projection à  $\mathcal{S}^r(\mathcal{S})$ , le même théorème donne  $\dim \mathcal{P}^r(\mathcal{S}) = \text{rg } f \leq \dim \mathcal{S}^r(\mathcal{S})$  où  $\text{rg } f$  désigne le rang de  $f$ . Dans le cas où  $n \geq 1$  et  $r = n - 1$ , la proposition 10.10 donne donc  $\dim \mathcal{P}^{n-1}(\mathcal{S}) \leq n - 1$  et comme  $\dim \mathbf{G}^{n-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) = n$  on a

$$(10.18.1) \quad \mathcal{P}^{n-1}(\mathcal{S}) \neq \mathbf{G}^{n-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})).$$

Nous allons voir par récurrence descendante sur  $r$  qu'en fait

$$(10.18.2) \quad \mathcal{P}^r(\mathcal{S}) \neq \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$$

pour  $0 \leq r \leq n$ . Cette relation est trivialement vraie pour  $r = n$  car  $\mathcal{P}^n(\mathcal{S}) = \emptyset$  et

$\mathbf{G}^n(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) = \{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\}$ . Supposons maintenant que  $n \geq 1$  et que la relation soit vraie pour  $r = r_0 \geq 1$ . Cela signifie qu'il existe un  $r_0$ -plan projectif  $P_0$  qui est transverse à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$  dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ . Mais alors la restriction  $\mathfrak{S}_0$  de  $\mathfrak{S}$  à  $P_0$  est une stratification de  $P_0 \cap A$  satisfaisant à la condition (a) de Whitney (cf. [Ch3] 2<sup>e</sup> partie, proposition 5.42). Et, comme  $P_0$  est projectivement isomorphe à  $\mathbf{P}^{r_0}(\mathbf{C})$ , la relation (10.18.1) pour  $\mathfrak{S}_0$  dans  $P_0$  montre qu'il existe un  $(r_0 - 1)$ -plan projectif  $Q_0$  contenu dans  $P_0$  et transverse dans  $P_0$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}_0$ . Or on voit comme dans la démonstration du lemme 9.1 que  $Q_0$  est alors transverse dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$ , ce qui prouve que  $\mathcal{P}^{r_0-1}(\mathfrak{S}) \neq \mathbf{G}^{r_0-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  et achève la récurrence. Ainsi donc la relation (10.18.2) est vraie pour  $0 \leq r \leq n$ , autrement dit  $\mathcal{P}^r(\mathfrak{S})$  est un sous-ensemble algébrique propre de  $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ .  $\square$

Le corollaire 10.18 justifie la générnicité de l'hyperplan projectif  $\mathcal{L}$  du théorème 1.1 et celle du  $(n - 2)$ -plan projectif  $\mathcal{M}$  du théorème 1.3. Nous nous en sommes aussi servis, au travers de la démonstration du lemme 9.1, dans la récurrence qui permet de déduire le théorème 1.1 du théorème 1.3.

**COROLLAIRE 10.19.** *Soit  $A$  un ensemble algébrique fermé de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec  $n \geq 1$ , muni d'une stratification  $\mathfrak{S}$  satisfaisant à la condition (a) de Whitney et soit  $Q$  un  $r$ -plan projectif de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec  $0 \leq r \leq n - 1$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  des  $(r + 1)$ -plans projectifs de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  contenant  $Q$  est un ensemble algébrique fermé irréductible de  $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ , isomorphe à  $\mathbf{P}^{n-r-1}(\mathbf{C})$ , et l'ensemble  $\mathcal{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q)$  des éléments de  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  qui ne sont pas transverses dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$  en est un sous-ensemble algébrique fermé (les éléments de  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  ne rencontrant pas une certaine strate lui sont considérés comme transverses).*

*Démonstration.* Soit  $R$  un  $(n - r - 1)$ -plan projectif de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  ne rencontrant pas  $Q$ . Considérons, dans  $R$ , des coordonnées homogènes par rapport à une base donnée de  $\hat{R}$  (notation (10.2)) et, dans  $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ , des coordonnées grassmanniennes par rapport à une base de  $\mathbf{C}^{n+1}$  obtenue en complétant la base de  $\hat{R}$  par une base de  $\hat{Q}$ . Les coordonnées grassmanniennes avec lesquelles nous avons défini les plongements (10.6) et (10.7) étaient prises par rapport à la base canonique de  $\mathbf{C}^{n+1}$ ; utiliser une autre base revient à faire subir à  $\mathbf{C}^{n+1}$  un automorphisme linéaire qui induit un automorphisme algébrique de  $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ . Avec les choix que nous avons faits,  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  est formé des éléments de  $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  dont les coordonnées grassmanniennes de multiindices ne contenant pas ceux de la base de  $\hat{Q}$  sont nuls. Et, pour  $P \in \mathcal{L}^{r+1}(Q)$ , les coordonnées homogènes dans  $R$  de l'unique point d'intersection de  $P$  avec  $R$  sont obtenues à partir des coordonnées grassmanniennes de  $P$  en omettant précisément ces zéros. Cela montre que  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  est un sous-ensemble algébrique fermé de  $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  et que l'application qui à tout  $(r + 1)$ -plan projectif contenant  $Q$  fait correspondre son unique point d'intersection avec  $R$  donne un isomorphisme de  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  avec  $R$  donc avec  $\mathbf{P}^{n-r-1}(\mathbf{C})$ . Maintenant, on a, avec les notations du corollaire 10.18,

$$\mathcal{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q) = \mathcal{L}^{r+1}(Q) \cap \mathcal{P}^{r+1}(\mathfrak{S})$$

et la dernière assertion résulte alors du corollaire 10.18.  $\square$

Cela ne veut pas dire que la transversalité aux strates de  $\mathfrak{S}$  soit une propriété générique des éléments de  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  car il se peut qu'on ait  $\mathcal{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q) = \mathcal{L}^{r+1}(Q)$ , par exemple si  $Q$  contient le sous-espace projectif tangent en un point à une strate de  $\mathfrak{S}$  tout en étant de dimension  $\leq n - 2$ . Mais la proposition ci-dessous implique que cette générnicité est assurée si  $Q$  est transverse dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$ . Contrairement au corollaire 10.18, cette proposition ne peut être déduite de la proposition 10.10 par des considérations de dimension et nous aurons recours au théorème de Sard pour la justifier.

**PROPOSITION 10.20.** *Les hypothèses et notations étant celles du corollaire 10.19, supposons de plus que  $Q$  soit transverse dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$ . Alors  $\mathcal{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q)$  est distinct de  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer qu'il existe un  $(r+1)$ -plan projectif contenant  $Q$  et transverse dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$ . Pour chaque strate  $S \in \mathfrak{S}$ , nous allons interpréter cette transversalité en termes de valeurs critiques d'une projection de centre  $Q$ . Cela est rendu possible par le fait que, pour  $x \in S \cap Q$ , tout élément de  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  est transverse en  $x$  à  $S$  dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  puisqu'il contient  $Q$  et que, par hypothèse,  $Q$  possède cette propriété de transversalité. On peut alors choisir un  $(n-r-1)$ -plan projectif  $R$  ne rencontrant pas  $Q$  et considérer la projection sur  $R$  de centre  $Q$

$$p: \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus Q \rightarrow R$$

qui à tout  $y \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus Q$  fait correspondre l'unique point d'intersection  $p(y)$  de  $R$  avec le  $(r+1)$ -plan projectif déterminé par  $Q$  et  $y$ . Alors, si  $x \in S \setminus Q$  et  $P$  est l'unique élément de  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  passant par  $x$ , on a l'implication

$$(10.20.1) \quad \begin{aligned} P \text{ est non transverse en } x \text{ à } S \text{ dans } \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \Rightarrow \\ x \text{ est un point critique de } p|_{S \setminus Q} \end{aligned}$$

(c'est en fait une équivalence à cause de la submersivité de  $p$ ). En effet, si  $j$  est l'injection canonique de  $S \setminus Q$  dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus Q$ , l'application linéaire tangente  $T_x(p|_{S \setminus Q})$  à  $p|_{S \setminus Q}$  est égale à  $T_x p \circ T_x j$  et, d'après le lemme 7.4, si cette application est surjective, alors  $\text{Im } T_x j + \text{Ker } T_x p = T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  (et réciproquement d'après la surjectivité de  $T_x p$ ). Comme  $\text{Im } T_x j = T_x S$  et  $\text{Ker } T_x p = T_x P$ , cette égalité est équivalente à la transversalité de  $P$  à  $S$  en  $x$  dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , ce qui justifie (10.20.1). Alors, compte tenu de la transversalité de  $P$  à  $S$  en tout point de  $S \cap Q$  et de la convention selon laquelle, si  $P$  ne rencontre pas  $S$ , il lui est considéré comme transverse, on a, pour  $P \in \mathcal{L}^{r+1}(Q)$ , cette autre implication (en fait équivalence):

(10.20.2)  $P$  est non transverse à  $S$  dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \Rightarrow$   
le point d'intersection de  $P$  avec  $R$  est valeur critique de  $p|_{S \setminus Q}$ .

Ces valeurs critiques sont les mêmes que celles de l'application de classe  $C^\infty$  sous-jacente entre variétés réelles. D'après le théorème de Sard (cf. [Di2] (16.23.1)), l'ensemble  $K_S$  de ces valeurs critiques est de mesure nulle dans  $R$ . La réunion  $K$  des  $K_S$  pour  $S \in \mathfrak{S}$  étant finie, est donc aussi de mesure nulle et en particulier distincte de  $R$ . Alors, si  $t \in R \setminus K$ , l'élément de  $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$  déterminé par  $Q$  et  $t$  est, d'après (10.20.2), transverse dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$ . Cela montre que  $\mathcal{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q) \neq \mathcal{L}^{r+1}(Q)$ . Notons que ce raisonnement serait encore valable si  $\mathfrak{S}$  était une quelconque famille finie ou dénombrable de sous-variétés.  $\square$

Dans le cas particulier où  $n \geq 2$  et où  $Q$  est un  $(n-2)$ -plan projectif transverse dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$ , le corollaire 10.19 et la proposition 10.20 prouvent que  $\mathcal{P}^{n-1}(\mathfrak{S}, Q)$  est vide ou composé d'un nombre fini de points. Cela justifie la finitude des hyperplans «mauvais» du théorème 1.3.

Toutes les assertions d'algébricité ou de générnicité que nous avons avancées dans l'énoncé des théorèmes 1.1 et 1.3 ou utilisées dans leur démonstration sont maintenant justifiées. Les démonstrations de ces théorèmes sont donc enfin complètes.  $\square \square$

## 11. EXTENSION DU THÉORÈME 1.3 À UNE VARIÉTÉ QUASI-PROJECTIVE LISSE

On peut généraliser sans trop de changements le théorème 1.3 au cas où l'espace ambiant  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  est remplacé par un sous-ensemble algébrique fermé  $X$  de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec l'importante restriction, toutefois, que  $X \setminus A$  soit *lisse*. Le pinceau  $\wedge$  continue à être un pinceau d'hyperplans projectifs dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  mais l'ensemble dont on considère les sections, au lieu d'être le complémentaire  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  d'un ensemble algébrique fermé  $A$ , est une variété quasi-projective lisse  $X \setminus A$ . On doit, dans ce cas, munir  $X$  *tout entier* d'une stratification de Whitney  $\mathfrak{S}^+$  telle que  $A$  soit union de strates, ce qui est toujours possible (cf. [L-T2] (1.2.7)), et l'axe  $\mathcal{M}$  de  $\wedge$  doit être pris transverse dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}^+$ . C'est bien une généralisation de la situation du théorème 1.3 car la stratification  $\mathfrak{S}$  de  $A$  qui y est considérée peut être trivialement étendue en une stratification de Whitney  $\mathfrak{S}^+$  de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  par la strate  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  à laquelle  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{L}$  sont trivialement transverses. Dans notre nouvelle situation, le «bon» hyperplan  $\mathcal{L}$  et les hyperplans «mauvais»  $\mathcal{L}_i$  sont considérés *relativement à*  $\mathfrak{S}^+$ . Cela signifie que, pour la détermination des  $\mathcal{L}_i$ , entrent non seulement en compte la non transversalité à des strates de  $A$  mais au moins aussi, dans l'hypothèse d'une stratification minimale, les points de tangence à  $X \setminus A$ .