

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE
ALGÈBRIQUE PROJECTIF
Autor: Chéniot, Denis
Kapitel: 9. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1 ET DU COROLLAIRE 1.2
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58744>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les lemmes 8.2, 8.4, 8.5 et 8.7 démontrent l'assertion d'injectivité du théorème 1.3.

L'assertion de surjectivité ayant été prouvée au terme du §7, le théorème 1.3 se trouve donc démontré. Y compris, remarquons-le, l'assertion selon laquelle il est possible de considérer artificiellement comme «mauvais» des hyperplans de Λ qui sont en fait «bons». Nulle part, en effet, dans la démonstration qui précède, nous n'avons fait intervenir le fait que les hyperplans «mauvais» fussent vraiment «mauvais». $\square \square$

9. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1 ET DU COROLLAIRE 1.2

1°. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1 À PARTIR DU THÉORÈME 1.3

Pour montrer les assertions du théorème 1.1, le théorème 1.3 va nous permettre une récurrence qui nous ramènera à une situation en basse dimension où un calcul direct est possible. On pense naturellement à une récurrence sur la dimension n de l'espace ambiant $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Mais cela n'est pas commode car nous verrons que, dans l'étape de récurrence où nous utilisons les sections par un pinceau d'hyperplans comme dans le théorème 1.3, la codimension de A peut diminuer dans les sections exceptionnelles si l'on ne suppose pas que $\dim A \geq 1$. Nous ferons donc une récurrence sur $d = \dim A$ amorcée à $d = 0$ avec n donc q quelconques. Nous écarterons le cas trivial où $A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire $q = 0$.

Pour commencer, le cas où A est vide, pour lequel nous avons convenu que $q = n + 1$, correspond donc à $d = -1$ et se trouve hors récurrence. Dans ce cas, $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) = \mathcal{L}$. Or, à homéomorphisme près, $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ peut être obtenu en attachant à \mathcal{L} une $2n$ -boule fermée B^{2n} le long de la $(2n-1)$ -sphère S^{2n-1} formant son bord. On a donc

$$H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathcal{L}) = H_k(B^{2n}, S^{2n-1}) = 0 \quad \text{pour} \quad k \leq 2n - 1$$

(cf. [Gb] chap. 19). Comme dans ce cas $n + q - 2 = 2n - 1$, les conclusions du théorème 1.1 résultent alors de la suite exacte d'homologie relative pour le couple $(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathcal{L})$.

La récurrence débute à $d = \dim A = 0$. Dans ce cas, $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ est composé d'un nombre fini de points avec $p \neq 0$. On a $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ et $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) = \mathcal{L}$. Mais $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ se rétracte par déformation sur un bouquet composé de \mathcal{L} et de $p-1$ $(2n-1)$ -sphères, donc l'inclusion $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ induit des isomorphismes

$$H_k(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \{a_1, \dots, a_p\}) \quad \text{pour} \quad k \leq 2n - 2.$$

Comme cette fois $n + q - 2 = 2n - 2$, les conclusions du théorème 1.1 sont bien valables dans ce cas. Remarquons que, pour $k = n - 2$, nous avons seulement besoin de la surjectivité de l'homomorphisme ci-dessus. Nous pourrions donc nous contenter de la relation $H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \{a_1, \dots, a_p\}, \mathcal{L}) = 0$ pour $k \leq 2n - 2$.

Pour l'étape de récurrence, nous supposons que les conclusions du théorème 1.1 sont valables pour $\dim A = d_0 \geq 0$ et nous allons montrer qu'elles sont alors aussi valables pour $\dim A = d_0 + 1$. Dans la suite de cette partie, A sera donc un ensemble algébrique fermé de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ de codimension q avec $\dim A = d_0 + 1$ et $A \neq \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$; notons que cela implique que $n \geq 2$. Nous allons nous ramener au cas où $\dim A = d_0$ à l'aide du théorème 1.3.

La première chose, dans cette réduction, est d'intégrer \mathcal{L} à un pinceau \wedge satisfaisant aux hypothèses du théorème 1.3:

LEMME 9.1. *Sous les hypothèses du théorème 1.1 et si $n \geq 2$, il existe un $(n - 2)$ -plan projectif \mathcal{M} contenu dans \mathcal{L} et transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de la stratification \mathfrak{S} de A .*

Démonstration. \mathcal{L} est projectivement isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ et $\mathcal{L} \cap A$ en est un sous-ensemble algébrique fermé. Comme d'autre part \mathcal{L} est transverse à toutes les strates de \mathfrak{S} , la restriction $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}}$ de \mathfrak{S} à \mathcal{L} , composée des $S \cap \mathcal{L}$ non vides pour $S \in \mathfrak{S}$, est une stratification de Whitney de $\mathcal{L} \cap A$ (cf. [Ch1] lemme 2.2.2). D'après le corollaire 10.18 de la proposition d'algébricité 10.10 ci-dessous, il existe donc un hyperplan projectif \mathcal{M} de \mathcal{L} transverse dans \mathcal{L} à toutes les strates de $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}}$. Alors \mathcal{M} est un $(n - 2)$ -plan de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de \mathfrak{S} . En effet, supposons que \mathcal{M} rencontre $S \in \mathfrak{S}$ en x . D'après la transversalité de \mathcal{L} à S dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ d'une part et la transversalité de \mathcal{M} à $S \cap \mathcal{L}$ dans \mathcal{L} d'autre part, on a les relations suivantes entre espaces tangents en x :

$$\begin{aligned} T_x S + T_x \mathcal{L} &= T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \\ T_x(S \cap \mathcal{L}) &= T_x S \cap T_x \mathcal{L} \\ T_x(S \cap \mathcal{L}) + T_x \mathcal{M} &= T_x \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Une vérification algébrique simple montre que ces relations impliquent

$$T_x S + T_x \mathcal{M} = T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{C}),$$

ce qui est le résultat de transversalité annoncé. \square

Soit donc \mathcal{M} comme dans le lemme 9.1 et soit \wedge le pinceau d'hyperplans d'axe \mathcal{M} . Alors \wedge satisfait aux hypothèses du théorème 1.3 vis-à-vis de A et de \mathfrak{S} et \mathcal{L} en est un «bon» hyperplan. Notons, comme dans ce théorème, $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$ les «mauvais» hyperplans de \wedge ; nous pouvons supposer que $s \geq 2$ pour nous conformer aux hypothèses du théorème, en considérant au besoin

comme «mauvais» de «bons» hyperplans, artifice que l'énoncé du théorème 1.3 permet.

Nous adoptons aussi, dans notre situation, les autres notations du théorème 1.3. La conclusion que nous recherchons pour l'étape de récurrence est la surjectivité de l_k pour $k \leq n + q - 2$ et son injectivité pour $k \leq n + q - 3$. Cela résultera du théorème 1.3 si nous montrons que les m_k et m_k^i satisfont à des propriétés de surjectivité ou d'injectivité convenables. Nous allons voir qu'elles sont données par l'hypothèse de récurrence appliquée aux ensembles algébriques fermés $\mathcal{L} \cap A$ et $\mathcal{L}_i \cap A$ pour $1 \leq i \leq s$ respectivement dans \mathcal{L} et \mathcal{L}_i (qui sont projectivement isomorphes à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$) avec \mathcal{M} comme hyperplan.

Il s'agit donc de constater qu'on peut user de l'hypothèse de récurrence dans ces circonstances. Il y a deux choses dont il faut s'assurer :

— que la dimension de l'ensemble algébrique diminue bien et donc que corrélativement la codimension ne diminue pas lorsqu'on passe de $A \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à $\mathcal{L} \cap A \subset \mathcal{L}$ ou aux $\mathcal{L}_i \cap A \subset \mathcal{L}_i$;

— que \mathcal{M} est transverse dans \mathcal{L} aux strates d'une stratification de Whitney de $\mathcal{L} \cap A$ et aussi transverse dans chaque \mathcal{L}_i aux strates d'une stratification de Whitney de $\mathcal{L}_i \cap A$.

Ces exigences sont satisfaites de manière naturelle pour $\mathcal{L} \cap A$ en raison de la transversalité de \mathcal{L} aux strates de \mathfrak{S} . D'une part, en effet, une section transversale fait chuter la dimension de A dès lors que A est non vide. D'autre part, la trace de \mathfrak{S} sur \mathcal{L} est alors une stratification de Whitney de $\mathcal{L} \cap A$ qui convient. Cela est précisé dans les points (i) et (iii) du lemme ci-dessous.

La situation n'est plus la même pour les $\mathcal{L}_i \cap A$ puisque précisément les \mathcal{L}_i sont «mauvais». Mais la transversalité de \mathcal{M} dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de \mathfrak{S} permet de satisfaire malgré tout aux deux exigences ci-dessus :

En ce qui concerne la première, en effet, $\mathcal{L}_i \cap A$ se trouve pris en tenailles entre A et $\mathcal{M} \cap A$. Or il y a, d'une part, grâce à la transversalité de \mathcal{M} aux strates de \mathfrak{S} , une chute de dimension de 2 lorsqu'on passe de A à $\mathcal{M} \cap A$, pourvu que $\dim A \geq 1$. Mais nous avons précisément organisé notre récurrence de manière à ce que cette inégalité soit satisfaite lors de l'étape de récurrence. D'autre part, de A à $\mathcal{L}_i \cap A$ et de $\mathcal{L}_i \cap A$ à $\mathcal{M} \cap A$, la dimension ne peut à chaque fois chuter de plus de 1 car il s'agit de sections hyperplanes dans des espaces projectifs complexes. La dimension a donc dû forcément chuter exactement de 1 à chaque fois. Cette question est précisée dans le point (ii) du lemme ci-dessous.

Le point clef dans la déduction du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3 est que $\mathcal{L}_i \cap A$ satisfait aussi à la deuxième exigence. Autrement dit que l'axe \mathcal{M} est «bon» même au sein des hyperplans «mauvais». Nous montrons, en effet, qu'en raison de la transversalité de \mathcal{M} aux strates de \mathfrak{S} , chaque \mathcal{L}_i est transverse à ces strates sauf en un nombre fini de points non situés sur \mathcal{M} . Cela permet de raffiner la trace de \mathfrak{S} sur \mathcal{L}_i en une stratification de Whitney de $\mathcal{L}_i \cap A$ sans rien toucher au voisinage de \mathcal{M} et de répondre ainsi à la question. Cela fait l'objet du point (iv) du lemme ci-dessous.

Les éléments qui nous permettront d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{L} \cap A$ et \mathcal{M} dans \mathcal{L} , d'une part, et à $\mathcal{L}_i \cap A$ et \mathcal{M} dans chaque \mathcal{L}_i , d'autre part, sont donc rassemblés dans le lemme suivant:

LEMME 9.2. *Avec les hypothèses et notations du théorème 1.3, le pinceau \wedge possède les propriétés suivantes:*

- (i) $\dim \mathcal{L} \cap A = \dim A - 1$ si $\dim A \geq 0$;
- (ii) $\dim \mathcal{L}_i \cap A = \dim A - 1$ pour $1 \leq i \leq s$ si $\dim A \geq 1$;
- (iii) *la restriction $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}}$ de \mathfrak{S} à \mathcal{L} (composée des $S \cap \mathcal{L}$ non vides pour $S \in \mathfrak{S}$) est une stratification de Whitney de $\mathcal{L} \cap A$ et \mathcal{M} est transverse dans \mathcal{L} à toutes les strates de $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}}$;*
- (iv) *pour $1 \leq i \leq s$, la restriction $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i}$ de \mathfrak{S} à \mathcal{L}_i peut être raffinée en une stratification de Whitney \mathfrak{S}_i de $\mathcal{L}_i \cap A$ aux strates de laquelle \mathcal{M} soit transverse dans \mathcal{L}_i .*

Avant de démontrer ce lemme, nous menons à son terme l'étape de récurrence avec son aide, achevant ainsi la démonstration du théorème 1.1:

(9.3) *Fin de la démonstration du théorème 1.1.*

Rappelons que dans la situation de l'étape de récurrence, nous avons $\dim A = d_0 + 1 \geq 1$. D'après les points (i) et (iii) du lemme 9.2, nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{L} \cap A$ dans \mathcal{L} avec \mathcal{M} pour hyperplan; comme la codimension de $\mathcal{L} \cap A$ dans \mathcal{L} est encore q , cela nous donne que

$$m_k \text{ est surjectif pour } k \leq (n-1) + q - 2,$$

$$m_k \text{ est injectif pour } k \leq (n-1) + q - 3.$$

D'après les points (ii) et (iv) du lemme 9.2, l'hypothèse de récurrence peut aussi être appliquée, pour $1 \leq i \leq s$, à $\mathcal{L}_i \cap A$ dans \mathcal{L}_i avec \mathcal{M} comme hyperplan et on obtient que, pour $1 \leq i \leq s$,

$$\begin{aligned} m_k^i \text{ est surjectif} & \quad \text{pour} \quad k \leq (n-1) + q - 2, \\ m_k^i \text{ est injectif} & \quad \text{pour} \quad k \leq (n-1) + q - 3. \end{aligned}$$

Les hypothèses qui permettent, à l'aide du théorème 1.3, de conclure à la surjectivité de l_k sont donc remplies pour $k \leq n + q - 2$ et celles qui permettent de conclure à son injectivité le sont pour $k \leq n + q - 3$. La récurrence se trouve ainsi terminée à l'aide du théorème 1.3. \square

Remarque 9.4. L'hypothèse de récurrence nous a donné pour les m_k^i des conclusions de surjectivité et d'injectivité un rang plus loin que ce dont nous avons besoin.

Remarque 9.5. Nous avons dit dans l'introduction que la validité du théorème 1.1 était conditionnée par la particularité de l'espace ambiant permettant l'amorce de la récurrence. Nous pouvons maintenant préciser cela. Notre espace ambiant est $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ tout entier et sa section hyperplane générique \mathcal{L} tout entier. Nous avons amorcé la récurrence en nous servant de la relation $H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \{a_1, \dots, a_p\}, \mathcal{L}) = 0$ pour $k \leq 2n - 2$. Nous pourrions en fait tirer parti de la remarque précédente, faire une récurrence sur n sans nous servir du point (ii) du lemme 9.2 et descendre dans la récurrence jusqu'à la situation où soit $n = 1$, soit $A = \emptyset$, ce qui nous donnerait la condition plus simple $H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathcal{L}) = 0$ pour $k \leq 2n - 1$. D'autre part, dans l'étape de récurrence, nous avons appliqué l'hypothèse de récurrence à des situations où l'espace ambiant était une section hyperplane générique ou exceptionnelle de l'espace ambiant de départ: dans notre cas, il s'agissait de \mathcal{L} et des \mathcal{L}_i qui sont tous isomorphes à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ donc du même type que l'espace ambiant de départ, ce qui nous a permis de poursuivre la récurrence. Ce sont là des exigences très particulières. C'est pourquoi, bien qu'au § 11 nous généralisions le théorème 1.3 au cas d'une variété quasi-projective lisse $X \setminus A$, nous ne pourrions en déduire un analogue général du théorème 1.1 qui tienne compte de la codimension de A . Il faudrait, en effet, qu'on ait la relation $H_k(X, \mathcal{L} \cap X) = 0$ pour $k \leq 2 \dim X - 1$ (en supposant X de dimension pure) et que, de plus, cette relation soit héréditaire par sections hyperplanes successives de X . Mais cela ne doit pas être impossible: voir (12.2).

Pour terminer la démonstration du théorème 1.1, il reste maintenant à prouver le lemme 9.2:

(9.6) *Démonstration du lemme 9.2.*

Nous démontrons les points dans l'ordre (iii), (i), (ii), (iv).

Preuve de (iii). Nous avons déjà vu, dans la démonstration du lemme 9.1, que $\mathfrak{S}_{|\mathcal{L}}$ est une stratification de Whitney de $\mathcal{L} \cap A$. Et l'existence de \mathcal{M} y a été prouvée en le prenant

précisément transverse à toutes les strates de $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}}$. Mais, réciproquement, n'importe quel $(n-2)$ -plan \mathcal{M} contenu dans \mathcal{L} et transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de \mathfrak{S} possède cette propriété. En effet, si x est un point commun à \mathcal{M} et à une strate $S \cap \mathcal{L}$ de $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}}$, on a alors les relations

$$\begin{aligned} T_x S + T_x \mathcal{M} &= T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \\ T_x(S \cap \mathcal{L}) &= T_x S \cap T_x \mathcal{L} \\ T_x \mathcal{M} &\subset T_x \mathcal{L} \end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément que

$$T_x(S \cap \mathcal{L}) + T_x \mathcal{M} = T_x \mathcal{L}.$$

Preuve de (i). Pour commencer, A est réunion localement finie (donc finie puisque A est compact) des strates de \mathfrak{S} . Il est aussi réunion de leurs adhérences qui sont analytiques fermées. On a donc, si $x \in A$,

$$\dim_x A = \sup_{S \in \mathfrak{S}} \dim_x \bar{S}$$

avec la convention $\dim_x \bar{S} = -1$ pour $x \notin \bar{S}$ (cf. [Wh3] 5.3(K)). Mais chaque strate étant pure, on a $\dim_x \bar{S} = \dim S$ pour tout $x \in \bar{S}$ (cf. [Wh2] lemma 3.13; ce lemme y est énoncé dans un ouvert de \mathbf{C}^n mais est valable dans une variété analytique complexe quelconque: cf. [Ch3] 2^e partie, §5 pour plus de détails). Par conséquent

$$\dim_x A = \sup_{\substack{S \in \mathfrak{S} \\ x \in \bar{S}}} \dim S.$$

(On peut en fait montrer cette égalité sans se servir de l'analyticité de l'adhérence des strates (cf. [Ch3] 2^e partie, corollaire 5.36)). De la même manière, puisque $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}}$ est une stratification de $\mathcal{L} \cap A$, on a, pour $x \in \mathcal{L} \cap A$,

$$\dim_x(\mathcal{L} \cap A) = \sup_{\substack{S \in \mathfrak{S} \\ x \in \overline{S \cap \mathcal{L}}}} \dim(S \cap \mathcal{L}).$$

Mais, si $S \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$, on a, par transversalité de \mathcal{L} à S ,

$$\dim(S \cap \mathcal{L}) = \dim S + \dim \mathcal{L} - \dim \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) = \dim S - 1.$$

Il en résulte que, pour $x \in \mathcal{L} \cap A$,

$$(9.6.1) \quad \dim_x(\mathcal{L} \cap A) \leq \dim_x A - 1.$$

D'un autre côté, on a la formule valable pour une intersection d'ensembles analytiques locaux complexes quelconques (cf. [Wh3] 2.12C)

$$(9.6.2) \quad \dim_x(\mathcal{L} \cap A) \geq \dim_x \mathcal{L} + \dim_x A - \dim \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) = \dim_x A - 1$$

sans avoir à utiliser d'hypothèse de transversalité.

Maintenant, si $\mathcal{L} \cap A \neq \emptyset$, on a, d'après (9.6.1), $\dim(\mathcal{L} \cap A) \leq \dim A - 1$, relation valable aussi quand $\mathcal{L} \cap A = \emptyset$ avec la convention $\dim \emptyset = -1$, dès lors que $\dim A \geq 0$. D'autre part, dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, l'hyperplan projectif \mathcal{L} rencontre

toute composante irréductible de A de dimension ≥ 1 . Il résulte alors de (9.6.2) que, si $\dim A \geq 1$, on a $\dim(\mathcal{L} \cap A) \geq \dim A - 1$, relation qui est aussi trivialement valable pour $\dim A \leq 0$. On obtient donc que $\dim(\mathcal{L} \cap A) = \dim A - 1$ dès lors que $\dim A \geq 0$.

Preuve de (ii). On ne peut raisonner comme en (i) car \mathcal{L}_i n'est en général pas transverse aux strates de \mathfrak{S} . Toutefois l'inégalité suivante, analogue à (9.6.2) qui n'utilise pas cette hypothèse, est toujours valable:

$$(9.6.3) \quad \dim_x(\mathcal{L}_i \cap A) \geq \dim_x A - 1 \quad \text{pour } x \in \mathcal{L}_i \cap A.$$

Nous faisons intervenir d'autre part la transversalité de \mathcal{M} dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de \mathfrak{S} : par la même méthode que dans la preuve de (i), on obtient

$$(9.6.4) \quad \dim_y(\mathcal{M} \cap A) \leq \dim_y A - 2 \quad \text{pour } y \in \mathcal{M} \cap A.$$

Mais on a aussi la formule concernant l'intersection des sous-ensembles analytiques $\mathcal{L}_i \cap A$ et \mathcal{M} dans \mathcal{L}_i qui donne

$$\dim_y(\mathcal{M} \cap A) \geq \dim_y(\mathcal{L}_i \cap A) - 1 \quad \text{pour } y \in \mathcal{M} \cap A.$$

Des deux inégalités précédentes on tire alors

$$(9.6.5) \quad \dim_y(\mathcal{L}_i \cap A) \leq \dim_y A - 1 \quad \text{pour } y \in \mathcal{M} \cap A.$$

Maintenant, comme dans la preuve de (i), la relation (9.6.3) donne $\dim(\mathcal{L}_i \cap A) \geq \dim A - 1$. D'autre part, dans \mathcal{L}_i qui est projectivement isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$, l'hyperplan \mathcal{M} rencontre toute composante irréductible de dimension ≥ 1 de l'ensemble algébrique fermé $\mathcal{L}_i \cap A$. Il résulte alors de (9.6.5) que, si $\dim(\mathcal{L}_i \cap A) \geq 1$, on a $\dim(\mathcal{L}_i \cap A) \leq \dim A - 1$. Mais cette relation est aussi valable quand $\dim(\mathcal{L}_i \cap A) \leq 0$, pourvu que $\dim A \geq 1$. On obtient donc que $\dim(\mathcal{L}_i \cap A) = \dim A - 1$ dès lors que $\dim A \geq 1$. Remarquons que cette égalité peut être mise en défaut si l'on ne suppose pas que $\dim A \geq 1$ lors de l'étape de récurrence: il suffit de considérer l'exemple où A est composé d'un nombre fini de points que ne rencontre pas \mathcal{M} et où \mathcal{L}_i contient certains d'entre eux.

Preuve de (iv): C'est, comme nous l'avons annoncé, le point clef de la déduction du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3.

Nous commençons par montrer que la transversalité de \mathcal{M} aux strates de \mathfrak{S} dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ implique que chaque \mathcal{L}_i est transverse à ces strates sauf peut-être en un nombre fini de points. Fixons donc i et posons

$$(9.6.6) \quad C = \{x \in \mathcal{L}_i \cap A \mid \mathcal{L}_i \text{ n'est pas transverse en } x \text{ dans } \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \\ \text{à la strate de } \mathfrak{S} \text{ passant par } x\}.$$

Comme \mathcal{L}_i contient \mathcal{M} , la transversalité dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ de \mathcal{M} aux strates de \mathfrak{S} implique qu'*a fortiori* \mathcal{L}_i est transverse à ces strates en tout point de rencontre *situé sur* \mathcal{M} . On a donc $\mathcal{M} \cap C = \emptyset$. Cela entraînera la finitude de C car C est en fait un sous-ensemble *algébrique fermé* de \mathcal{L}_i . L'algébricité de C est démontrée au § 10: elle est donnée par le corollaire 10.17 de la proposition d'algébricité 10.10. Comme donc, dans l'espace projectif complexe \mathcal{L}_i , l'hyperplan projectif \mathcal{M} ne rencontre pas l'ensemble algébrique fermé C , on a forcément $\dim C \leq 0$, ce qui montre que C est vide ou composé d'un nombre fini de points c_1, \dots, c_p .

Si $C = \emptyset$, c'est que \mathcal{L}_i est en fait un «bon» hyperplan de Λ , artificiellement considéré comme «mauvais», donc se comporte comme \mathcal{L} . D'après le point (iii) du même lemme on peut prendre dans ce cas $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i}$.

Supposons maintenant que $C \neq \emptyset$. Alors $C = \{c_1, \dots, c_p\}$ avec $p \geq 1$. Nous allons voir que, dans ce cas, on peut prendre, de manière fort naturelle

$$(9.6.7) \quad \mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C} \cup \{\{c_1\}, \dots, \{c_p\}\}.$$

Pour montrer que \mathfrak{S}_i convient, nous commençons par prouver l'assertion suivante:

$$(9.6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C} \text{ est une stratification de Whitney de l'ensemble analytique fermé} \\ (\mathcal{L}_i \cap A) \setminus C \text{ dans } \mathcal{L}_i \setminus C \text{ et } \mathcal{M} \text{ est transverse dans } \mathcal{L}_i \setminus C \text{ à toutes ses strates.} \end{array} \right.$$

Notons que \mathcal{M} est bien contenu dans $\mathcal{L}_i \setminus C$ puisqu'il ne rencontre pas C . Pour montrer (9.6.8), nous constatons que $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C}$ est la restriction à $\mathcal{L}_i \setminus C$ de $\mathfrak{S}|_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus C}$. Comme $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus C$ est un ouvert de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, il est aisé de voir que $\mathfrak{S}|_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus C}$ est une stratification de Whitney de $A \setminus C$ (pour plus de détails, cf. [Ch3] 2^e partie, § 5) aux strates de laquelle \mathcal{M} est transverse. Or, par définition de C , la sous-variété $\mathcal{L}_i \setminus C$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus C$ est transverse à toutes les strates de $\mathfrak{S}|_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus C}$. La situation est alors analogue à celle du point (iii) et conduit donc à une conclusion analogue qui est précisément l'assertion (9.6.8).

Nous allons maintenant passer en revue pour \mathfrak{S}_i toutes les propriétés qui définissent une stratification de Whitney (cf. [Wh2] §§ 18 et 19. [L – T2] (1.2) et [Ch3] 2^e partie, § 5):

Lissité des strates. Compte tenu de (9.6.8), il est clair que \mathfrak{S}_i est une partition finie de $\mathcal{L}_i \cap A$ en sous-variétés analytiques pures de \mathcal{L}_i .

Caractère strict des strates. Il s'agit de voir que chaque strate $S' \in \mathfrak{S}_i$ est *stricte* dans \mathcal{L}_i , c'est-à-dire que son adhérence $\overline{S'}$ dans \mathcal{L}_i (ou, ce qui revient au même, dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$) ainsi que $\overline{S'} \setminus S'$ sont des sous-ensembles analytiques fermés de \mathcal{L}_i . Cela est clair si $S' = \{c_j\}$. Si S' est de la forme $S \cap (\mathcal{L}_i \setminus C)$ avec $S \in \mathfrak{S}$, alors $S' = (\overline{S} \cap \mathcal{L}_i) \setminus ((\overline{S} \setminus S) \cup C)$, ce qui est une différence de deux ensembles analytiques fermés de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ puisque S est stricte dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. L'analyticité de $\overline{S'}$ est alors donnée par [Wh3] 5.3(U). Comme d'autre part $\overline{S'} \subset \overline{S} \cap \mathcal{L}_i$, on a l'égalité $\overline{S'} \setminus S' = \overline{S'} \cap ((\overline{S} \setminus S) \cup C)$, ce qui donne aussi l'analyticité de $\overline{S'} \setminus S'$.

Propriété de frontière. Il s'agit de montrer que, pour toute strate $S \in \mathfrak{S}_i$, son adhérence \overline{S} est réunion de strates. Cela est encore une fois clair si $S = \{c_j\}$. Si $S \in \mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C}$, nous écrivons $\overline{S} = (\overline{S} \cap (\mathcal{L}_i \setminus C)) \cup (\overline{S} \cap C)$. Le premier terme de cette union est l'adhérence de S dans $\mathcal{L}_i \setminus C$ donc est réunion d'éléments de $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C}$ étant donnée la propriété de frontière possédée par $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C}$ qui, d'après (9.6.8), est une stratification dans $\mathcal{L}_i \setminus C$. Le deuxième terme est un sous-ensemble (éventuellement vide) de C donc est réunion de $\{c_j\}$. On obtient bien, au total, une réunion d'éléments de \mathfrak{S}_i .

Conditions (a) et (b) de Whitney. Avec l'algébricité de C , c'est là le deuxième élément important dans la démonstration du point (iv). Nous devons montrer que tout couple (S, T) de strates de \mathfrak{S}_i vérifie ces conditions. Nous savons déjà, d'après (9.6.8), que $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C}$ est une stratification de Whitney dans $\mathcal{L}_i \setminus C$. Par conséquent, si $S, T \in \mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C}$, le couple (S, T) vérifie les conditions (a) et (b) dans $\mathcal{L}_i \setminus C$ donc dans \mathcal{L}_i puisqu'il s'agit de conditions de nature locale. Parmi les autres couples (S, T) de strates, les seuls pour lesquels il y ait un problème sont ceux qui sont tels que

$$S \in \mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C} \quad \text{et} \quad T = \{c_j\} \quad \text{avec} \quad c_j \in \bar{S}.$$

Nous allons traiter ce problème comme un cas très particulier de l'important lemme de Whitney selon lequel les points de la petite strate en lesquels un couple vérifie les conditions (a) et (b) sont génériques (cf. [Wh2] lemma 19.3, récemment précisé par Teissier: [Te] VI.2.1). Le lemme de Whitney est énoncé dans un ouvert de \mathbf{C}^m mais, compte tenu du caractère local des conditions (a) et (b) et de leur invariance par isomorphisme analytique, nous pourrions, nous aussi, nous ramener à un ouvert de \mathbf{C}^{n-1} par l'intermédiaire d'une carte de \mathcal{L}_i au voisinage de c_j . Nous continuerons à raisonner dans \mathcal{L}_i , laissant au lecteur le soin de vérifier que les autres éléments du raisonnement sont susceptibles de subir la même réduction. Les hypothèses du lemma 19.3 de [Wh2] sont qu'on est en présence de deux ensembles analytiques fermés V et W de dimension constante, avec $\dim V > \dim W$. Ici, les rôles de V et W seront joués respectivement par \bar{S} et $\{c_j\}$. Vérifions qu'ils satisfont aux hypothèses en question. Nous avons vu que les strates de \mathfrak{S}_i sont strictes dans \mathcal{L}_i , ce qui implique que \bar{S} et $\bar{S} \setminus S$ sont analytiques fermés. Comme S est pure, \bar{S} est alors de dimension constante et $\dim(\bar{S} \setminus S) < \dim \bar{S}$, d'après [Wh2] lemma 3.13. D'autre part, $\{c_j\}$ est trivialement analytique fermé de dimension constante 0 et, comme $\{c_j\} \subset \bar{S} \setminus S$, on a bien $\dim \{c_j\} < \dim \bar{S}$. La conclusion du lemma 19.3 de [Wh2] est qu'il existe un sous-ensemble analytique fermé Z de W avec $\dim Z < \dim W$ tel que, V^0 et W^0 étant les parties lisses de V et W , le couple $(V^0, W^0 \setminus Z)$ satisfasse aux conditions (a) et (b). Dans notre cas où $W = \{c_j\}$, l'inégalité $\dim Z < \dim W$ implique que $Z = \emptyset$. Notre conclusion est donc que le couple $(\bar{S}^0, \{c_j\})$, où \bar{S}^0 désigne la partie lisse de \bar{S} , satisfait aux conditions (a) et (b). Comme S est un ouvert de \bar{S}^0 , on obtient *a fortiori* que le couple $(S, \{c_j\})$ vérifie les conditions (a) et (b) de Whitney.

Nous avons ainsi fini de vérifier que \mathfrak{S}_i est une stratification de Whitney de $\mathcal{L}_i \cap A$. Il est clair, d'après la définition (9.6.7), que c'est un raffinement de $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i}$.

Il reste à nous assurer que \mathcal{M} est transverse dans \mathcal{L}_i aux strates de \mathfrak{S}_i . Mais c'est bien le cas car, d'une part, d'après (9.6.8), \mathcal{M} est transverse aux éléments de $\mathfrak{S}|_{\mathcal{L}_i \setminus C}$ dans $\mathcal{L}_i \setminus C$ donc dans \mathcal{L}_i et, d'autre part, \mathcal{M} ne rencontre pas les $\{c_j\}$.

Cela achève la preuve du point (iv) donc la démonstration du lemme 9.2. \square

Remarque 9.7. Une démonstration du point (iv) figure déjà dans [Ch2] au cours de la preuve de la proposition 3 dans une récurrence similaire. Mais elle comporte deux erreurs que voici:

1°. Dans [Ch2] aussi on considère l'ensemble C introduit en (9.6.6) dans la démonstration ci-dessus (il est nommé D dans [Ch2]). Mais on n'y montre pas que C est algébrique fermé. On se contente de montrer que C est analytique local d'adhérence algébrique. Il est ensuite affirmé que \bar{C} ne rencontre pas \mathcal{M} à partir de l'argument suivant: \mathcal{L}_i étant transverse à toutes les strates de \mathfrak{S} en tout point de \mathcal{M} , le serait aussi en tout point d'un voisinage de \mathcal{M} . Or, si cela est clair au voisinage de chaque point de $\mathcal{M} \cap A$ pour la strate passant par ce point, ce ne l'est plus pour d'autres strates auxquelles il peut être adhérent. Ce n'est effectivement le cas qu'en raison de la condition (a) de Whitney qui a d'ailleurs été introduite par Whitney en vue de l'ouverture de la transversalité (cf. [Wh1] Introduction). Ici, la condition (a) intervient dans la démonstration de la proposition 10.10 qui permet, au travers de son corollaire 10.17, de montrer que C est fermé.

2°. Dans [Ch2], la condition (b) de Whitney pour \mathcal{S}_i est justifiée par l'inclusion $C_3 \subset C_4$ du cône tangent classique C_3 en un point d'un ensemble analytique (C_3 est l'ensemble des limites de sécantes menées par ce point) dans le cône C_4 , ensemble des directions contenues dans une limite d'espaces tangents en des points lisses convergeant vers ce point (cf. [Wh1] (3.1)). Cet argument est doublement erroné. D'une part, ce n'est pas parce qu'une limite de sécantes $\overline{c_j x_m}$, $m \in \mathbb{N}$, est contenue dans *une* limite d'espaces tangents que pour autant il est clair qu'elle soit contenue dans *la* limite, quand elle existe, des espaces tangents en les x_m . D'autre part, on doit présupposer l'analyticité de \bar{S} au voisinage de c_j que nous démontrons ici directement; dans [Ch2] elle est censée résulter de la propriété de frontière, mais ce n'est vrai que si l'on entend cette propriété au sens de [Wh2], c'est-à-dire avec une condition supplémentaire de dimension (cf. [Wh2] (18.3)); or cette condition de dimension est censée, dans [Ch2], résulter précisément de la condition (b), ce qui constitue un cercle vicieux.

La démonstration du théorème 1.1 qui avait été ramenée au lemme 9.2 est maintenant terminée. $\square \square$

Remarque 9.8. Nous avons montré, au cours de la démonstration du point (iv) du lemme 9.2, qu'étant donné un ensemble algébrique fermé A de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geq 2$, et un pinceau Λ d'hyperplans d'axe transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates d'une stratification de Whitney \mathcal{S} de A , chaque hyperplan de Λ est transverse à toutes les strates de \mathcal{S} sauf peut-être en un nombre fini de points non situés sur l'axe. Cela résultait de la proposition d'algébricité 10.10 au travers de son corollaire 10.17. Un autre corollaire de cette proposition, le corollaire 10.19, joint à la proposition 10.20 qui provient du théorème de Sard, montre qu'il n'y a en fait qu'un nombre fini d'hyperplans de Λ qui ne soient vraiment transverses à toutes les strates de \mathcal{S} , fait dont nous nous sommes servis dès l'énoncé du théorème 1.3. Un pinceau Λ comme ci-dessus présente donc une certaine analogie avec les pinceaux de Lefschetz (cf. [Lf] II.8 et V.2 et [La] § 1). Mais, à la différence de ceux-ci, un même hyperplan de Λ peut rencontrer non transversalement une même strate de \mathcal{S} en plusieurs points distincts et les contacts ne sont pas forcément quadratiques.

2°. DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 1.2 À PARTIR DU THÉORÈME 1.1

L'hypothèse $q \geq 2$ implique que $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ est simplement connexe car le complémentaire d'un ensemble algébrique fermé de codimension ≥ 2 dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est, nous le redémontrons ci-dessous, simplement connexe. D'autre part, la section $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$ est non vide et, elle aussi, simplement connexe. En effet, si A est vide, on a $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) = \mathcal{L}$ et si $\dim A \geq 0$, alors la transversalité de \mathcal{L} à toutes les strates de \mathcal{S} implique que $\mathcal{L} \cap A$ est de dimension $\dim A - 1$ (comme dans la preuve du point (i) du lemme 9.2) donc est aussi de codimension ≥ 2 dans \mathcal{L} . L'assertion est triviale dans le premier cas et dans le second, le même argument que ci-dessus s'applique puisque $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) = \mathcal{L} \setminus (\mathcal{L} \cap A)$ et que \mathcal{L} est projectivement isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$. Dans ces conditions de

simple connexité, le théorème de Whitehead (cf. [Sp] 7.5.9) dit que les conclusions du théorème 1.1 impliquent celles du corollaire 1.2.

Il nous reste à justifier que le complémentaire d'un ensemble algébrique fermé de codimension ≥ 2 de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est simplement connexe. On peut le faire en se ramenant à un théorème selon lequel le groupe fondamental d'une variété différentiable connexe n'est pas modifié par l'ablation d'une sous-variété fermée de codimension ≥ 3 (cf. [Go] X.2.3). Mais il est intéressant de constater que notre assertion peut aussi être démontrée à l'aide d'un théorème du type de Lefschetz, plus précisément à l'aide du théorème de Zariski mentionné au §1, dans une version valable pour le complémentaire d'un ensemble algébrique fermé quelconque de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, celle de [Ch1] ou de [H-L2] par exemple. En fait, la proposition préliminaire plus faible (5.1.4) de [Ch1] est suffisante. On procède par récurrence sur la dimension d de l'ensemble algébrique A . Si $A = \emptyset$, c'est-à-dire $d = -1$, son complémentaire est $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ qui est bien simplement connexe. Supposons maintenant l'assertion valable pour $d = d_0 \geq -1$ et plaçons-nous dans le cas où $\dim A = d_0 + 1$. On a alors $\dim A \geq 0$ donc $n \geq 2$ et on peut appliquer la proposition (5.1.4) de [Ch1] (voir la remarque ci-dessous). D'après cette proposition, on peut choisir un hyperplan projectif \mathcal{L}' de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ transverse à toutes les strates d'une stratification de Whitney \mathfrak{S} de A et tel que l'inclusion $\mathcal{L}' \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ induise une surjection

$$\pi_1(\mathcal{L}' \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A), e') \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A, e')$$

avec un point base e' quelconque de $\mathcal{L}' \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$. Mais le choix de \mathcal{L}' fait que, comme ci-dessus, l'ensemble algébrique fermé $\mathcal{L}' \cap A$ est de dimension d_0 donc de codimension ≥ 2 dans \mathcal{L}' . On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence qui donne que $\mathcal{L}' \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) = \mathcal{L}' \setminus (\mathcal{L}' \cap A)$ est simplement connexe. La surjection en question implique alors que l'espace connexe par arcs $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ est aussi simplement connexe, ce qui achève la récurrence. La simple connexité du complémentaire d'un ensemble algébrique fermé de codimension ≥ 2 dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est ainsi établie.

La démonstration du corollaire 1.2 qui avait été ramenée à cette assertion se trouve alors terminée. \square

Remarque 9.9. La proposition (5.1.4) de [Ch1] que nous avons appliquée dans la démonstration ci-dessus au complémentaire d'un ensemble algébrique fermé de A de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geq 2$, est énoncée dans [Ch1] pour le cas où A est une hypersurface mais, comme nous l'avons signalé au §1, sa démonstration est valable pour un ensemble algébrique fermé quelconque. Signalons d'autre part que l'hyperplan \mathcal{L}' que nous avons utilisé est, dans la démonstration de [Ch1], pris dans un ouvert de Zariski non vide Ω contenu dans l'ensemble \mathcal{C} des hyperplans projectifs de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ transverses aux strates de \mathfrak{S} , choix que nous avons respecté ci-dessus. La proposition (5.1.4) est pourtant énoncée dans [Ch1] pour $\mathcal{L}' \in \mathcal{C}$, ce qui est un glissement injustifié (mais que le corollaire 10.18 ci-dessous, selon lequel \mathcal{C} est un ouvert de Zariski, justifie).

Remarque 9.10. Dans le cas où la codimension q de A est 1, on a $n + q - 2 = n - 1$ et $n + q - 3 = n - 2$ et les conclusions du corollaire 1.2 sont encore valables d'après le théorème 3.4.1 et le lemme de l'appendix de [H-L4].