Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE ALGÉBRIQUE PROJECTIF

Autor: Chéniot, Denis

Kapitel: 7. Assertion de surjectivité du théorème 1.3

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58744

7. ASSERTION DE SURJECTIVITÉ DU THÉORÈME 1.3

Dans ce paragraphe, nous introduisons le plus économiquement possible, et pour des valeurs convenables de p, des hypothèses sur les homomorphismes m_p et m_p^i induits en homologie de rang p par les inclusions $m: M \hookrightarrow L$ et $m^i: M \hookrightarrow L_i$ (cf. fig. 3.2) de manière à aboutir à la conclusion de surjectivité du théorème 1.3 concernant l'homomorphisme l_k induit en homologie de rang k par l'inclusion $l: L \hookrightarrow P$. L'étude que nous avons menée jusqu'ici l'a été sans faire de telles hypothèses qui portent donc sur la comparaison entre les groupes d'homologie des sections de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ par l'axe $\mathscr{M}$ du pinceau Λ, d'une part, et par les hyperplans générique $\mathscr{L}$ et exceptionnels $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$ de ce pinceau, d'autre part. Mais nous avons fait en sorte que, dans les propositions auxquelles nous avons abouti, les homomorphismes m_p et m_p^i qui relient ces groupes d'homologie apparaissent clairement.

Pour nous servir du cadre géométrique posé aux paragraphes précédents, nous considérerons l'inclusion $l: L \hookrightarrow P$ au travers du détour matérialisé par le diagramme commutatif suivant:

$$
\begin{array}{ccc}
\tilde{P}_* & \overset{i}{\hookrightarrow} & \tilde{P} \\
\uparrow j & \circlearrowleft & \downarrow f \\
L & \overset{l}{\hookrightarrow} & P
\end{array}
\tag{7.1}
$$

(cf. fig. 3.2). Dans ce diagramme, l'application j, définie en (4.21), est composée de l'inclusion $L^{\#} \hookrightarrow \tilde{P}_*$ et de l'isomorphisme $L \xrightarrow{\sim} L^{\#}$ réciproque de l'isomorphisme (3.29) induit par f; elle intervient dans la proposition 4.23. L'inclusion i, nommée en (5.19), intervient dans le corollaire 5.20. L'application f, introduite en (6.1), est induite par le morphisme d'éclatement f; elle intervient dans le corollaire 6.9. En fait, nous ne nous servirons dans tout le §7 que de la commutativité du diagramme (7.1) et des propositions terminales des §§4, 5 et 6 qui sont celles que nous venons de citer. Une exception non significative est celle du lemme élémentaire 7.7 pour la démonstration duquel il nous sera commode de renvoyer aux lemmes élémentaires 5.15 et 5.18.

En ce qui concerne les homomorphismes induits en homologie, le diagramme (7.1) donne, pour tout k, le diagramme commutatif

(7.2)
$$\begin{array}{ccc} H_k(\tilde{P}_*) & \overset{i_k}{\rightarrow} & H_k(\tilde{P}) \\ \uparrow j_k & \circlearrowleft & \downarrow f_k \\ H_k(L) & \overset{l_k}{\rightarrow} & H_k(P) \end{array}$$

écrit avec la convention (2.1).

LEMME 7.3. *Pour que* l_k *soit surjectif pour un* k *donné, il faut et il suffit que:*

(i) f_k *soit surjectif;*

(ii) $\operatorname{Im} i_k + \operatorname{Ker} f_k = H_k(\tilde{P})$;

(iii) $\operatorname{Im} j_k + \operatorname{Ker}(f_k \circ i_k) = H_k(\tilde{P}_*)$.

Démonstration. C'est une itération du lemme algébrique suivant qui, plus loin, nous servira aussi à l'envers:

LEMME 7.4. *Etant donné une suite* $E \overset{u}{\rightarrow} F \overset{v}{\rightarrow} G$ *de modules et d'homomorphismes, pour que* $v \circ u$ *soit surjectif, il faut et il suffit que* v *soit surjectif et que* $\operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} v = F$.

Démonstration. C'est une vérification sans détours qui est laissée au lecteur. □

Pour en déduire le lemme 7.3, on applique le lemme 7.4 successivement avec $u = j_k$ et $v = f_k \circ i_k$ puis avec $u = i_k$ et $v = f_k$. □ □

Nous allons maintenant chercher des conditions suffisantes pour que les conditions du lemme 7.3 soient satisfaites.

LEMME 7.5. *La condition (i) du lemme 7.3 est toujours vérifiée.*

Démonstration. C'est contenu dans la suite exacte de la proposition 6.8 qui est aussi la suite exacte supérieure du corollaire 6.9. □

Nous examinons la condition (iii) du lemme 7.3 avant la condition (ii):

LEMME 7.6. *Pour que la condition (iii) du lemme 7.3 soit satisfaite pour un* k *donné, il suffit que* m_{k-1} *soit surjectif.*

Démonstration. Nous allons chercher à satisfaire à une condition plus forte que la condition (iii) du lemme 7.3 mais plus simple, à savoir:

(7.6.1) $$\operatorname{Im} j_k + \operatorname{Ker} i_k = H_k(\tilde{P}_*).$$

Nous allons utiliser la partie suivante du diagramme de la proposition 4.23

(7.6.2)
$$\begin{tikzcd}
H_k(L) \arrow[r, "j_k"] & H_k(\widetilde{P}_*) \arrow[r, "\mu_k"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \\
 & H_k(\widetilde{M}_*) \arrow[u, "h_k^*"] \arrow[r, "\mu'_k"] & H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \arrow[u, "m_{k-1} \otimes \mathrm{Id}"'] \arrow[l, bend left, "\chi'_k"]
\end{tikzcd}$$

et la commutativité du diagramme ci-dessous

(7.6.3)
$$\begin{tikzcd}
H_k(\widetilde{P}_*) \arrow[r, "i_k"] & H_k(\widetilde{P}) \\
H_k(\widetilde{M}_*) \arrow[u, "h_k^*"] \arrow[r, "i'_k"] & H_k(\widetilde{M}) \arrow[u, "h_k"']
\end{tikzcd}$$

donné en homologie par le carré commutatif (5.19) et qui fait partie du diagramme du corollaire 5.20. D'après l'exactitude de la ligne supérieure de (7.6.2) donnée par la proposition 4.23, on a

$$\operatorname{Im} j_k = \operatorname{Ker} \mu_k .$$

Mais, *si* m_{k-1} *est surjectif,* il en est de même de $m_{k-1} \otimes \mathrm{Id}$ (cf. [Sp] 5.1.4), donc de $\mu_k \circ (h_k^* \circ \chi'_k)$ qui lui est égal puisque le produit-croix χ'_k est une section de μ'_k d'après la proposition 4.23. Alors, d'après le lemme 7.4, on a

$$\operatorname{Ker} \mu_k + \operatorname{Im} (h_k^* \circ \chi'_k) = H_k(\widetilde{P}_*) .$$

Pour obtenir la relation (7.6.1) lorsque m_{k-1} est surjectif, il suffit donc de montrer que

$$\operatorname{Ker} i_k \supset \operatorname{Im} (h_k^* \circ \chi'_k) ,$$

c'est-à-dire que

(7.6.4) $$i_k \circ h_k^* \circ \chi'_k = 0 .$$

Mais

$$i_k \circ h_k^* \circ \chi'_k = h_k \circ i'_k \circ \chi'_k$$

d'après la commutativité de (7.6.3), et i'_k va de $\widetilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ vers $\widetilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, ce qui fait que, sur un élément décomposable $z' \otimes u$ de $H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$, on a, d'après la naturalité du produit-croix,

$$(i'_k \circ \chi'_k)\,(z' \otimes u) = i'_k(z' \times u) = z' \times v ,$$

où v est l'image de u par l'homomorphisme naturel $H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$. Comme $H_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = 0$, cela montre que

$$i'_k \circ \chi'_k = 0$$

et implique donc l'égalité (7.6.4). La relation (7.6.1) se trouve ainsi établie dans le cas où m_{k-1} est surjectif et le lemme est démontré. □

Il nous reste à examiner la condition (ii) du lemme 7.3. Nous serons amenés, pour cela, à utiliser simultanément la proposition 4.23, le corollaire 5.20 et le corollaire 6.9 et nous aurons aussi besoin du lemme suivant:

LEMME 7.7. *Les classes* $\bar{w}_i \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$, *avec* $1 \leqslant i \leqslant s$, *qui interviennent dans la proposition 5.14 et son corollaire 5.20 vérifient les propriétés suivantes:*

(i) $\partial \bar{w}_1 + \ldots + \partial \bar{w}_s = 0$

(ii) $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ *est libre sur* $\partial \bar{w}_1, \ldots, \partial \bar{w}_{s-1}$

(rappelons que nous avons supposé que $s \geqslant 2$*).*

Démonstration. Ces assertions sont en fait géométriquement claires à partir de la description des $\bar{w}_i$ donnée par (5.9), (5.10) et (5.11). Voici toutefois une démonstration en forme: Considérons la partie suivante de la suite exacte d'homologie relative du couple $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$:

$$H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \xrightarrow{\varepsilon} H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*) \xrightarrow{\partial} H_1(\mathbf{P}^1_*) \rightarrow H_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = 0 .$$

D'après le lemme 5.18, on a

$$\bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s = \varepsilon(w) ,$$

où w est le générateur de $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ compatible avec l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. La relation (i) résulte alors de l'exactitude de la suite. Cette suite montre aussi que ∂ induit un isomorphisme

$$\bar{\partial}: H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)/\operatorname{Ker}\partial \xrightarrow{\sim} H_1(\mathbf{P}^1_*) ,$$

où $\operatorname{Ker}\partial$ est engendré par $\varepsilon(w) = \bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s$. Mais, d'après la remarque 5.15, $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ est libre sur $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_s$. Une vérification algébrique simple conduit alors à la propriété (ii). □

Des conditions suffisantes pour que la condition (ii) du lemme 7.3 soit satisfaite sont énoncées dans le lemme ci-dessous et apparaissant naturellement au cours de sa démonstration:

LEMME 7.8. *Pour que la condition (ii) du lemme 7.3 soit satisfaite pour un* k *donné, il suffit que* m^i_{k-2} *soit surjectif pour* $1 \leqslant i \leqslant s$ *et que* m_{k-2} *soit injectif.*

Démonstration. Nous allons utiliser, pour commencer, les diagrammes des corollaires 6.9 et 5.20 dont nous rappelons les régions qui nous serviront:

$$(7.8.1)\qquad \begin{tikzcd} H_{k-2}(M) \arrow[r, "\sigma_k"] & H_k(\widetilde{P}) \arrow[r, "f_k"] & H_k(P) \\ H_{k-2}(M) \arrow[u, "\mathrm{Id}"'] \arrow[r, "\sigma'_k"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H_k(\widetilde{M}) \arrow[u, "h_k"'] & \end{tikzcd}$$

$$(7.8.2)\qquad \begin{tikzcd} H_k(\widetilde{P}_*) \arrow[r, "i_k"] & H_k(\widetilde{P}) \arrow[r, "\eta_k"] & \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) \arrow[r, "\zeta_k"] & H_{k-1}(\widetilde{P}_*) \\ & H_k(\widetilde{M}) \arrow[u, "h_k"'] \arrow[r, "\eta'_k"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \oplus^s H_{k-2}(M) \arrow[u, "\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}"'] \arrow[r, "\zeta'_k"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{k-1}(\widetilde{M}_*) \arrow[u, "h^{*k-1}"'] \end{tikzcd}$$

D'après l'exactitude des lignes supérieures de (7.8.1) et (7.8.2) donnée par les corollaires 6.9 et 5.20, on a

$$\operatorname{Ker} f_k = \operatorname{Im} \sigma_k \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} i_k = \operatorname{Ker} \eta_k .$$

La condition (ii) du lemme 7.3 est donc équivalente à

$$\operatorname{Im} \sigma_k + \operatorname{Ker} \eta_k = H_k(\widetilde{P}) . \tag{7.8.3}$$

Or, d'après le lemme 7.4, cette relation est elle-même équivalente à la surjectivité de $\eta_k \circ \sigma_k$ considéré comme un homomorphisme de $H_{k-2}(M)$ dans $\operatorname{Im} \eta_k$. On est donc ramené à montrer que

$$\operatorname{Im} (\eta_k \circ \sigma_k) = \operatorname{Im} \eta_k . \tag{7.8.4}$$

Comme l'exactitude de la ligne supérieure de (7.8.2) donne

$$\operatorname{Im} \eta_k = \operatorname{Ker} \zeta_k ,$$

nous sommes alors conduits à caractériser les éléments de $\operatorname{Ker} \zeta_k$. En raison de la commutativité de (7.8.2) et de la formule explicite pour ζ'_k données par le corollaire 5.20, il est naturel de tenter de le faire sous l'hypothèse suivante:

Supposons que m^i_{k-2} *soit surjectif pour tout* i.

Soit

$$\bigoplus_{i=1}^{s} z_i \in \operatorname{Ker} \zeta_k .$$

Avec l'hypothèse que nous venons de faire, on a

$$\bigoplus_{i=1}^{s} z_i = \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z'_i) \quad \text{avec} \quad z'_i \in H_{k-2}(M) ,$$

donc, en se servant des faits mentionnés,

$$0 = \zeta_k\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z'_i)\Big) = h^*_{k-1}\Big(\zeta'_k\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} z'_i\Big)\Big) = h^*_{k-1}\Big((-1)^k \sum_{i=1}^{s} z'_i \times \partial \bar{w}_i\Big)$$

avec les $\bar{w}_i$ définis dans le corollaire 5.20. Cette égalité nous amène à considérer la partie suivante du diagramme commutatif de la proposition 4.23

$$\begin{tikzcd}
H_{k-1}(\tilde{P}_*) \arrow[r, "\mu_{k-1}"] & H_{k-2}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \\
H_{k-1}(\tilde{M}_*) \arrow[u, "h^*_{k-1}"] \arrow[r, "\mu'_{k-1}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & H_{k-2}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \arrow[u, "m_{k-2} \otimes \mathrm{Id}"'] \arrow[l, bend left, "\chi'_{k-1}"]
\end{tikzcd}$$

où, rappelons-le, le produit-croix χ'_{k-1} est une section de μ'_{k-1}. On a donc, en effet,

$$0 = h^*_{k-1}\Big(\sum_{i=1}^{s} z'_i \times \partial \bar{w}_i\Big) = (h^*_{k-1} \circ \chi'_{k-1})\Big(\sum_{i=1}^{s} z'_i \otimes \partial \bar{w}_i\Big)$$

et *a fortiori*

$$0 = (\mu_{k-1} \circ h^*_{k-1} \circ \chi'_{k-1})\Big(\sum_{i=1}^{s} z'_i \otimes \partial \bar{w}_i\Big) = \sum_{i=1}^{s} m_{k-2}(z'_i) \otimes \partial \bar{w}_i .$$

Mais, d'après le lemme 7.7, cela n'est possible que si

$$m_{k-2}(z'_1) = \ldots = m_{k-2}(z'_s) .$$

Supposons de plus que m_{k-2} *soit injectif.*

Les égalités ci-dessus impliquent alors que

$$z'_1 = \ldots = z'_s$$

et on a donc

$$\bigoplus_{i=1}^{s} z_i = \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z') \qquad \text{avec} \qquad z' \in H_{k-2}(M) .$$

Mais la forme particulière de ce second membre permet de lui appliquer la formule (5.20.3) du corollaire 5.20

$$\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z') = \Big(\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}\Big)(\oplus^s z') = \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}\big(\eta'_k(z' \times w)\big) ,$$

où w est la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique. Donc, d'après la commutativité de (7.8.2),

$$\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z') = \eta_k\big(h_k(z' \times w)\big) .$$

D'après la définition même de σ_k rappelée dans le corollaire 6.9, cela s'écrit

$$\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z') = \eta_k\big(\sigma_k(z')\big) .$$

On obtient donc

$$\operatorname{Ker} \zeta_k \subset \operatorname{Im}(\eta_k \circ \sigma_k) ,$$

ce qui, compte tenu de l'égalité $\operatorname{Im}\eta_k = \operatorname{Ker}\zeta_k$, donne la relation (7.8.4) à laquelle nous nous étions ramenés. $\square$

Les lemmes 7.3, 7.5, 7.6 et 7.8 démontrent l'assertion de surjectivité du théorème 1.3.

8. Assertion d'injectivité du théorème 1.3

Dans ce paragraphe, nous faisons le même travail qu'au §7, mais en vue de la conclusion d'injectivité du théorème 1.3 concernant l'homomorphisme l_k induit en homologie de rang k par l'inclusion $l: L \hookrightarrow P$ (cf. fig. 3.2). Comme au §7, les seuls éléments dont nous aurons besoin seront (outre le lemme élémentaire 7.7) le diagramme commutatif (7.1), la proposition 4.23, le corollaire 5.20 et le corollaire 6.9. Du moins en serait-il ainsi si, comme dernière condition pour l'injectivité de l_k, nous nous contentions de celle donnée par le lemme 8.6. Nous parviendrons à l'affaiblir en celle du lemme 8.7 en utilisant aussi le corollaire 3.30 et les isomorphismes (3.29).

Nous nous servons toujours du diagramme commutatif (7.2), conséquence de (7.1), que nous rappelons:

$$\begin{array}{ccc} H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{P}) \\ \uparrow j_k & & \downarrow f_k \\ H_k(L) & \xrightarrow{l_k} & H_k(P) \end{array} \tag{8.1}$$

Nous avons, pour l'injectivité de l_k, le lemme suivant:

Lemme 8.2. *Pour que l_k soit injectif pour un k donné, il faut et il suffit que:*

(i) *j_k soit injectif;*

(ii) $\operatorname{Ker} i_k \cap \operatorname{Im} j_k = \{0\}$;

(iii) $\operatorname{Ker} f_k \cap \operatorname{Im}(i_k \circ j_k) = \{0\}$.

Démonstration. On utilise cette fois le lemme algébrique suivant:

Lemme 8.3. *Soit $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ une suite de modules et d'homomorphismes. Pour que $v \circ u$ soit injectif, il faut et il suffit que u soit injectif et que* $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.