Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE ALGÉBRIQUE PROJECTIF

Autor: Chéniot, Denis

Kapitel: 5. RÉINTRODUCTION DES HYPERPLANS MAUVAIS DANS L'ÉCLATÉ

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58744

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

croix. Cette dernière partie de la proposition 4.23 repose ainsi sur la dernière assertion du lemme 4.18, donc sur la réduction à la formule (4.10) de l'isomorphisme de Wang dans le cas trivial. □

Remarque 4.24. Nous avons vu, lors de la description informelle de l'isomorphisme de Wang, que le premier point clef dans la démonstration du théorème 1.3 consistait en la naturalité de cet isomorphisme par rapport aux sous-fibrés et sa réduction à un produit-croix dans le cas trivial. D'après la démonstration ci-dessus, cela est manifesté dans la proposition 4.23 par la commutativité du diagramme qui y figure, d'une part, et, d'autre part, par la présence des homomorphismes nuls et des sections χ'_k dans sa suite exacte inférieure qui font qu'elle n'est qu'une version de la formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1_*$.

Remarque 4.25. D'après la formule (4.11), on a pour ξ_k les formules suivantes qui ne nous serviront pas dans cet article:

$$\xi_k(z \otimes [\omega_j]_{\mathbf{P}^1_*}) = (-1)^{k-1}(\theta_{j,k-1}(z) - z) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1\,, \tag{4.25.1}$$

où $\theta_{j,k-1}$ est, à l'isomorphisme de L avec $L^{\#}$ près, la monodromie en homologie de rang $k-1$ au-dessus d'un lacet ω_j ayant servi à orienter le cercle C_j du bouquet sur lequel on a choisi de rétracter par déformation $\mathbf{P}^1_*$.

Remarque 4.26. D'après la démonstration qui en a été donnée, la proposition 4.23 et la remarque 4.25 sont valables pour n'importe quel couple formé d'un fibré topologique localement trivial et d'un sous-fibré trivialisable sur une base séparée et paracompacte qui se rétracte faiblement par déformation sur un bouquet de cercles. Il convient d'y remplacer le couple (L, M) par un couple de fibres types et les injections j, j' par un homéomorphisme de ce couple sur le couple de fibres au-dessus du sommet du bouquet choisi.

5. Réintroduction des hyperplans mauvais dans l'éclaté

Dans ce paragraphe, nous passons de l'homologie du couple $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ à celle du couple $(\tilde{P}, \tilde{M})$ (cf. fig. 3.2). C'est-à-dire que, nous limitant toujours au complémentaire de $\tilde{A}$, nous étudions l'incidence en homologie de la réintroduction des transformées strictes des hyperplans «mauvais» que nous avions dû ôter au § 3 pour aboutir à une fibration localement triviale. L'étude de l'homologie du couple $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ menée au § 4 était basée sur cette fibration. Quand on passe de $\tilde{P}_*$ à $\tilde{P}$ on perd la structure de fibré localement trivial, mais celle de fibré trivial de $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ se prolonge à $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Pour connaître donc les perturbations apportées par la réintroduction des hyperplans mauvais, nous cherchons à caractériser

conjointement les groupes $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$. Nous sommes devant l'homologie relative d'une variété complexe modulo le complémentaire d'une sous-variété fermée. Lorsque, comme c'est le cas ici, la variété ambiante est séparée paracompacte, on dispose, pour cette caractérisation, de l'isomorphisme de Leray que nous décrirons. Bien que, pour avoir cet isomorphisme, il ne soit pas nécessaire que la sous-variété ôtée soit connexe, la description sera plus naturelle si l'on réintroduit chaque hyperplan mauvais séparément. Le premier lemme ci-dessous montre qu'on peut s'y ramener.

Rappelons (cf. fig. 3.2) que

$$\begin{cases} \tilde{P}_* = \tilde{P}\backslash(L_1^\# \cup \ldots \cup L_s^\#) \\ \tilde{M}_* = \tilde{M}\backslash(M_1^\# \cup \ldots \cup M_s^\#) , \end{cases}$$

qui sont fibrés au-dessus de

$$\mathbf{P}_*^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} .$$

Nous voulons réintroduire chacun des $L_i^\#$ séparément. Pour chaque $i (1 \leqslant i \leqslant s)$, nous posons donc (cf. fig. 5.1)

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} \mathbf{P}_i^1 = \mathbf{P}_*^1 \cup \{\lambda_i\} \\ \tilde{P}_i = \tilde{P}_* \cup L_i^\# \\ \tilde{M}_i = \tilde{M}_* \cup M_i^\# = M \times \mathbf{P}_i^1 . \end{cases}$$

Notons que ce sont des ouverts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, $\tilde{P}$ et $\tilde{M}$ respectivement. On a en effet les égalités

$$\text{(5.2)} \qquad \mathbf{P}_i^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_j \mid j \neq i\} , \quad \tilde{P}_i = \tilde{P}\backslash \bigcup_{j \neq i} L_j^\# , \quad \tilde{M}_i = \tilde{M}\backslash \bigcup_{j \neq i} M_j^\#$$

et les $L_i^\#$ et $M_i^\#$ sont fermés dans $\tilde{P}$ et $\tilde{M}$ respectivement puisque ce sont les traces sur $\tilde{P}$ et $\tilde{M}$ des $\mathscr{L}_i^\#$ qui sont fermés dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. fig. 3.2).

LEMME 5.3. *On a, pour tout k, les isomorphismes entrant dans le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_*) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \end{array}$$

où toutes les flèches sont obtenues à partir d'homomorphismes induits par inclusion.

Démonstration. Elle ressemble à celle du lemme 4.6. Pour $1 \leqslant i \leqslant s$, il existe des voisinages ouverts mutuellement disjoints U_i des $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}$. En effet, $\tilde{\mathbf{P}}^n$ étant compact est normal et il existe donc des voisinages ouverts mutuellement disjoints $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_s$ des fermés $\mathscr{L}_1^{\#}, \ldots, \mathscr{L}_s^{\#}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$; on prend alors $U_i = \mathscr{U}_i \cap \tilde{P}$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$ (cf. fig. 3.2). Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*) & \xrightarrow{1} & H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\
\uparrow 2 & & \uparrow 3 \\
\bigoplus_{i=1}^{s} H_k(U_i, U_i \backslash L_i^{\#}) & \xrightarrow{4} & H_k(\bigcup_{i=1}^{s} U_i, \bigcup_{i=1}^{s} U_i \backslash \bigcup_{i=1}^{s} L_i^{\#})
\end{array}$$

où toutes les flèches sont obtenues à partir d'homomorphismes induits par inclusion. Il est commutatif par le même argument élémentaire que dans la démonstration du lemme 4.6. La flèche numérotée 3 est un isomorphisme obtenu en excisant le fermé $\tilde{P} \backslash \bigcup_{i=1}^{s} U_i$ dans l'ouvert $\tilde{P}_*$ de $\tilde{P}$. La flèche 2 est somme directe des isomorphismes obtenus en excisant le fermé $\tilde{P}_i \backslash U_i$ dans l'ouvert $\tilde{P}_* = \tilde{P}_i \backslash L_i^{\#}$ de $\tilde{P}_i$. La flèche 4 est un isomorphisme car $\bigcup_{i=1}^{s} U_i$ est déconnecté en les U_i qui en sont des unions de composantes connexes par arcs. On obtient alors que la flèche 1 est un isomorphisme et c'est la flèche supérieure du diagramme de l'énoncé. On montre de la même manière que la flèche inférieure de ce diagramme est aussi un isomorphisme. Quant à sa commutativité, elle résulte du même argument élémentaire que dans la démonstration du lemme 4.6. □

Pour caractériser conjointement les groupes d'homologie $H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_*)$ auxquels nous nous sommes ramenés, nous allons utiliser la version en homologie singulière à coefficients entiers d'un isomorphisme envisagé par Jean Leray dans la définition de son opération «cobord» (cf. [Lr] chap. II, n° 19), isomorphisme qui a des propriétés de naturalité et de réduction à un produit-croix dans le cas trivial analogues à celles de l'isomorphisme de Wang. Nos couples s'écrivent, en effet,

$$(5.4) \qquad \begin{cases} (\tilde{P}_i, \tilde{P}_*) = (\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \backslash L_i^{\#}) \\ (\tilde{M}_i, \tilde{M}_*) = (\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^{\#}) \end{cases} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s$$

et l'isomorphisme de Leray porte sur les groupes $H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \backslash L_i^{\#})$ et $H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^{\#})$ sous des conditions concernant les couples $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$ et $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ qui sont données par le lemme suivant. Ce lemme donne aussi des conditions qui assurent la naturalité et la réduction à un produit croix de l'isomorphisme concernant $H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^{\#})$.

LEMME 5.5. *Pour* $1 \leqslant i \leqslant s$, *les couples* $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$ *et* $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ *vérifient les conditions suivantes:*

(i) *$\tilde{P}_i$ et $\tilde{M}_i$ sont des variétés analytiques complexes séparées paracompactes et $L_i^{\#}$ et $M_i^{\#}$ en sont des sous-variétés fermées respectives de codimension complexe pure 1.*

(ii) *La variété $\tilde{M}_i$ est une sous-variété fermée de $\tilde{P}_i$ transverse à $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}_i$ et l'on a $M_i^{\#} = \tilde{M}_i \cap L_i^{\#}$ (cf. fig. 5.1).*

(iii) *On a $(\tilde{M}_i, M_i^{\#}) = (M \times \mathbf{P}_i^1, M \times \{\lambda_i\})$, les facteurs M et $\mathbf{P}_i^1$ sont des variétés analytiques complexes séparées paracompactes et l'égalité est non seulement ensembliste mais aussi valable pour les structures de variété.*

Démonstration. Nous démontrons les points dans l'ordre (iii), (i), (ii):

(iii) L'égalité ensembliste est contenue dans (3.25) et (5.1). Les facteurs M et $\mathbf{P}_i^1$ sont des variétés analytiques complexes en tant qu'ouverts de $\mathscr{M}$ et $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ respectivement. Comme $\mathscr{M}$ et $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sont compactes, M et $\mathbf{P}_i^1$ sont séparées paracompactes car cette propriété se transmet d'une variété à ses sous-variétés: en effet, pour une variété topologique séparée, il est équivalent d'être paracompacte ou d'avoir une base dénombrable d'ouverts pour chacune de ses composantes connexes (cf. [Ms] II.15, theorem 1 et [Bk] I.9.10, propositions 16 et 18). Nous avons d'autre part vu, après (3.5), que les structures de variété de $\tilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ comme sous-variété de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ et comme variété produit coïncident. Quand ensuite on prend le produit de sous-variétés de chacun des facteurs, on obtient bien une variété dont les structures comme sous-variété de $\tilde{\mathscr{M}}$ et comme variété produit coïncident.

(i) Compte tenu de la caractérisation des variétés séparées paracompactes que nous venons de donner, cette propriété se conserve par produit. Les assertions concernant $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ sont alors claires d'après le point (iii). En ce qui concerne $\tilde{P}_i$, nous avons vu que c'est un ouvert de $\tilde{P}$ qui est une variété analytique complexe en tant qu'ouvert de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. fig. 3.2). Comme $\tilde{P}_i$ est donc une sous-variété de la variété compacte $\tilde{\mathbf{P}}^n$, elle est aussi séparée paracompacte puisque, nous l'avons vu, cette propriété se transmet d'une variété à ses sous-variétés. D'autre part, $L_i^{\#}$ est la trace de $\mathscr{L}_i^{\#}$ sur l'ouvert $\tilde{P}$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. fig. 3.2). Comme $\mathscr{L}_i^{\#}$ est une sous-variété fermée de codimension complexe pure 1 dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$, il en est donc de même pour $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}$ donc dans $\tilde{P}_i$.

(ii) L'égalité $M_i^{\#} = \tilde{M}_i \cap L_i^{\#}$ est claire à partir des définitions (cf. figs. 3.2 et 5.1). Pour les autres assertions, constatons que, d'après ces définitions, $\tilde{M}_i$ est la trace de $\tilde{M}$ sur $\tilde{P}_i$ (cf. les mêmes figures). Comme $\tilde{P}_i$ est un ouvert de $\tilde{P}$, il nous suffit donc de voir que $\tilde{M}$ est une sous-variété fermée de $\tilde{P}$ transverse à $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}$. Mais $\tilde{M}$ et $L_i^{\#}$ sont les traces de $\tilde{\mathscr{M}}$ et $\mathscr{L}_i^{\#}$ sur $\tilde{P}$ qui est un ouvert de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. fig. 3.2). Nous sommes donc ramenés à montrer que $\tilde{\mathscr{M}}$ est une sous-variété fermée de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ transverse à $\mathscr{L}_i^{\#}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Le premier point ayant été vu au §3, il nous reste la transversalité à prouver.

Pour cela, constatons que la démonstration du lemme 3.13 prouve en fait les assertions suivantes concernant une sous-variété S de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, indépendamment du fait qu'elle fasse ou non partie d'une stratification:

(5.5.1) $\left\{\begin{array}{l}\text{si } \mathscr{M} \text{ est transverse à } S \text{ dans } \mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \text{ alors la transformée totale } \tilde{S} \text{ de } S \text{ est une} \\ \text{sous-variété de } \tilde{\mathbf{P}}^n \text{ transverse à } \tilde{\mathscr{M}}, \text{ ce qui fait que si } \tilde{S} \cap \tilde{\mathscr{M}} \text{ est non vide, c'est} \\ \text{aussi une sous-variété de } \tilde{\mathbf{P}}^n;\end{array}\right.$

(5.5.2) $\begin{cases} \text{si, de plus, un hyperplan } \mathscr{K} \text{ du pinceau } \Lambda \text{ est transverse à } S \text{ dans } \mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \text{ alors} \\ \text{sa transformée stricte } \mathscr{K}^{\#} \text{ est transverse dans } \tilde{\mathbf{P}}^n \text{ à } \tilde{S} \cap \tilde{\mathscr{M}} \text{ et à } \tilde{S} \setminus \tilde{\mathscr{M}} \text{ donc} \\ \text{aussi à } \tilde{S}. \end{cases}$

Ces assertions nous serviront également au § 11. Si nous les appliquons ici avec $S = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et $\mathscr{K} = \mathscr{L}_i^{\#}$, nous trouvons le résultat de transversalité voulu. □

Sous la condition (i) du lemme 5.5, on a, pour tout k, les isomorphismes que nous qualifierons de Leray

$$(5.6) \qquad \begin{cases} \tau_{i,k}\colon H_{k-2}(L_i^{\#}) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \setminus L_i^{\#}) \\ \tau'_{i,k}\colon H_{k-2}(M_i^{\#}) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \setminus M_i^{\#}) \end{cases} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s,$$

avec la convention $H_{k-2}(L_i^{\#}) = H_{k-2}(M_i^{\#}) = 0$ pour $k < 2$. On peut décrire informellement ces isomorphismes de la manière suivante: Soit δ_i un $(k-2)$-cycle de $L_i^{\#}$ (cf. fig. 5.1); faisons-le «épaissir» dans $\tilde{P}_i$, chaque point donnant un 2-disque fermé transverse à $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}_i$: ce n'est pas un produit mais un fibré localement trivial; les fibres ont une orientation déduite de celles de $L_i^{\#}$ et $\tilde{P}_i$ qu'on peut suivre continuement le long de δ_i; orientons alors le tout conformément aux orientations de δ_i et de ces fibres: on «obtient» un k-cycle relatif Δ_i de $\tilde{P}_i$ modulo $\tilde{P}_i \setminus L_i^{\#}$; l'isomorphisme de Leray $\tau_{i,k}$ fait correspondre la classe d'homologie de Δ_i à la classe d'homologie de δ_i.

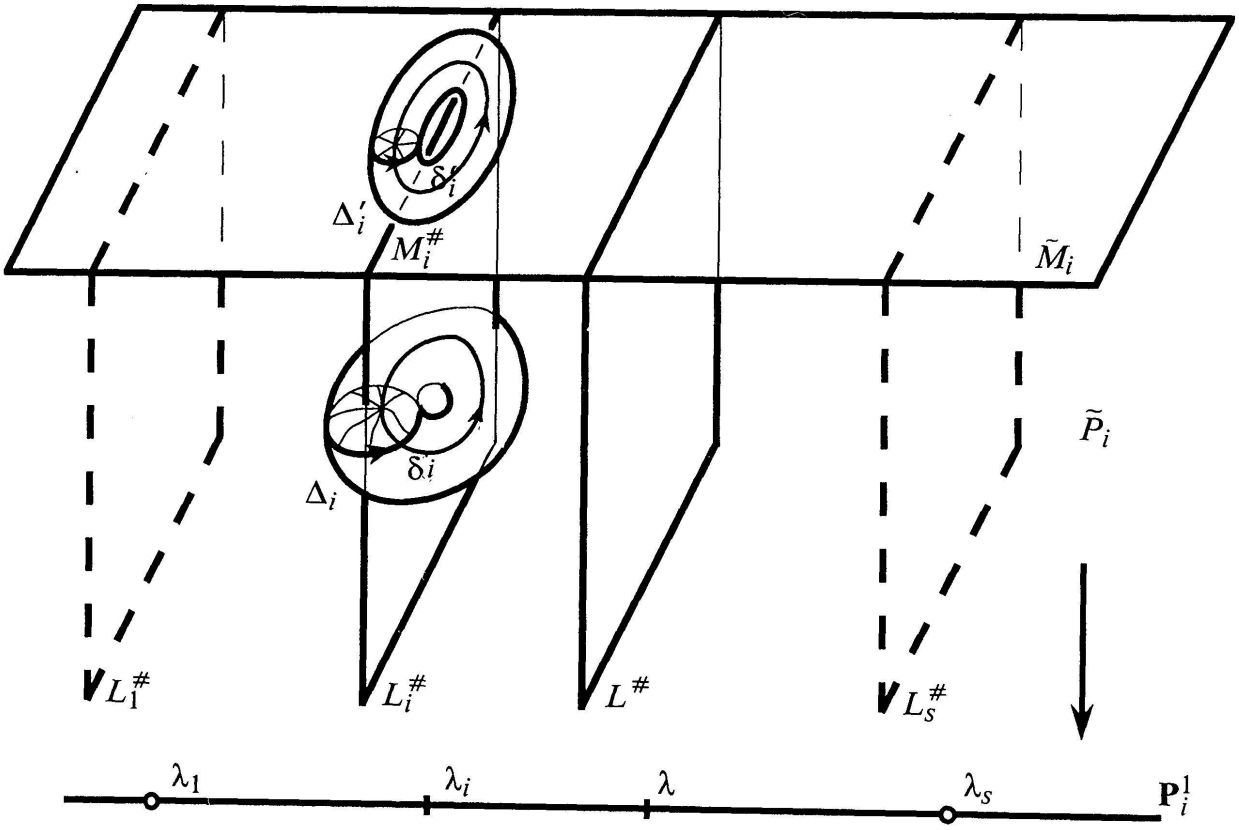

FIGURE 5.1

Le deuxième point clef dans la démonstration du théorème 1.3 est que, de manière analogue à ce qui se passait pour l'isomorphisme de Wang, l'isomorphisme de Leray pour le couple $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ se comporte, sous la condition (ii) du lemme 5.5, *naturellement* par rapport à l'isomorphisme pour le couple $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$. Cela veut dire que le diagramme suivant, où les flèches verticales sont induites par inclusion, est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H_{k-2}(L_i^{\#}) & \overset{\tau_{i,k}}{\xrightarrow{\sim}} & H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \backslash L_i^{\#}) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ H_{k-2}(M_i^{\#}) & \overset{\tau'_{i,k}}{\xrightarrow{\sim}} & H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^{\#}) \end{array} \tag{5.7}$$

Ainsi donc, reprenant notre description informelle, si δ_i est homologue dans $L_i^{\#}$ à un cycle δ'_i de $M_i^{\#}$ (compte tenu des isomorphismes (3.29), c'est le cas si l'homomorphisme m^i_{k-2} considéré dans le théorème 1.3 est surjectif), alors Δ_i est homologue dans $\tilde{P}_i$ modulo $\tilde{P}_i \backslash L_i^{\#}$ à un cycle relatif Δ'_i de $\tilde{M}_i$ modulo $\tilde{M}_i \backslash M_i^{\#}$ obtenu en faisant «épaissir» δ'_i dans $\tilde{M}_i$ (cf. fig. 5.1). Cela précise l'assertion de l'introduction selon laquelle, si certains cycles de L_i sont homologues à des cycles de M, alors les perturbations apportées par les hyperplans mauvais peuvent être «poussées» dans l'axe.

Mais, d'autre part, le couple $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ ayant la forme triviale $(M \times \mathbf{P}_i^1, M \times \{\lambda_i\})$ donnée par le point (iii) du lemme 5.5, l'isomorphisme de Leray $\tau'_{i,k}$ prend la forme triviale d'un produit-croix homologique

$$\tau'_{i,k}(z_i'^{\#}) = z' \times \bar{u}_i \quad \text{pour} \quad z' \in H_{k-2}(M)\ , \tag{5.8}$$

où $\bar{u}_i \in H_2(\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_*^1)$ est la classe fondamentale définissant l'orientation canonique de $\mathbf{P}_i^1$ au voisinage de λ_i (cf. [Gb] chap. 22) et où $z_i'^{\#}$ correspond à z' dans l'isomorphisme induit en homologie de rang $k-2$ par l'identification canonique de M à $M_i^{\#} = M \times \{\lambda_i\}$. On tombe à nouveau sur une forme de la formule de Künneth, cette fois pour le couple de produits $(M \times \mathbf{P}_i^1, M \times \mathbf{P}_*^1)$.

Revenant à notre description informelle, ce qui précède signifie qu'en raison de la forme triviale du couple $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$, l'«épaississement» de δ'_i peut être réalisé comme le produit par un 2-disque fermé convenablement orienté entourant λ_i dans $\mathbf{P}_i^1$ (cf. fig. 5.1). Cela précise l'affirmation de l'introduction selon laquelle les perturbations dues aux hyperplans mauvais qui peuvent être «poussées» dans l'axe s'y «trivialisent».

Nous donnons en annexe des indications sommaires sur la manière dont on peut établir la version de l'isomorphisme de Leray que nous avons

présentée. Nous y justifions en même temps les assertions (5.7) de naturalité et (5.8) de réduction à un produit-croix dans le cas trivial.

Ayant en main les isomorphismes de Leray pour les couples $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$ et $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$, nous allons en déduire, grâce au lemme 5.3, la proposition principale du paragraphe concernant les groupes $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$. Nous aurons à faire intervenir, en connexion avec la formule (5.8), les images des classes fondamentales $\bar{u}_i \in H_2(\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_*^1)$ par les homomorphismes naturels $H_2(\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_*^1) \to H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}_*^1)$; nous les noterons $\bar{w}_i$. Il est plus suggestif géométriquement de considérer

$$(5.9)\qquad \begin{cases} D_1, \ldots, D_s & s \text{ disques fermés} \\ & \text{mutuellement disjoints dans } \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \\ & \text{centrés respectivement en } \lambda_1, \ldots, \lambda_s \\ \partial D_1, \ldots, \partial D_s & \text{leurs frontières respectives} \end{cases}$$

et, pour $1 \leqslant i \leqslant s$,

$$(5.10)\qquad \Omega_i \qquad \begin{array}{l} \text{un 2-cycle fondamental} \\ \text{de } D_i \text{ modulo } \partial D_i \\ \text{compatible avec l'orientation} \\ \text{canonique de } \mathbf{P}^1(\mathbf{C}). \end{array}$$

On a alors, pour $1 \leqslant i \leqslant s$,

$$(5.11)\qquad \bar{w}_i = [\Omega_i]_{(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}_*^1)},$$

classe d'homologie de Ω_i considéré comme 2-cycle relatif de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ modulo $\mathbf{P}_*^1$. D'autre part, de même que dans le lemme 4.18 et la proposition 4.23 nous avons remplacé $L^{\#}$ et $M^{\#}$ par L et M, nous ferons ici figurer directement les L_i et M à la place des $L_i^{\#}$ et $M_i^{\#}$ grâce aux isomorphismes suivants, réciproques des isomorphismes (3.29),

$$(5.12)\qquad \begin{cases} c^i : L_i \xrightarrow{\sim} L_i^{\#} \\ c'^i : M \xrightarrow{\sim} M_i^{\#} = M \times \{\lambda_i\} \end{cases} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s,$$

où c'^i coïncide avec l'identification canonique de M à $M \times \{\lambda_i\}$. Nous pouvons alors définir, pour tout k,

$$(5.13)\qquad \begin{cases} \tau_k : \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) \to H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\ \tau'_k : \bigoplus^s H_{k-2}(M) \to H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \end{cases}$$

au moyen des formules suivantes utilisant les isomorphismes de Leray (5.6)

$$(5.13.1)\qquad \begin{cases} \tau_k(\bigoplus_{i=1}^{s} z_i) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{incl}_*(\tau_{i,k}(c^i_{k-2}(z_i))) \\ \tau'_k(\bigoplus_{i=1}^{s} z'_i) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{incl}_*(\tau'_{i,k}(c'^{\,i}_{k-2}(z'_i))) \end{cases}$$

avec la convention d'écriture (2.1) appliquée aux isomorphismes c^i et c'^i et en notant indistinctement incl_* tous les homomorphismes induits en homologie par inclusion.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition principale de ce paragraphe:

PROPOSITION 5.14. *On a, pour tout k, les isomorphismes τ_k et τ'_k entrant dans le diagramme commutatif suivant*

$$(5.14.1)\qquad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) & \overset{\tau_k}{\xrightarrow{\sim}} & H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\ \uparrow \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2} & \circlearrowleft & \uparrow \\ \oplus^s H_{k-2}(M) & \overset{\tau'_k}{\xrightarrow{\sim}} & H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont naturelles. Nous y avons mis en évidence les homomorphismes m^i_{k-2} intervenant dans l'énoncé du théorème 1.3. Les isomorphismes τ_k et τ'_k sont définis par les formules (5.13.1) qui font intervenir les isomorphismes de Leray (5.6). Pour τ'_k, on a aussi l'expression suivante

$$(5.14.2)\qquad \tau'_k(\bigoplus_{i=1}^{s} z'_i) = \sum_{i=1}^{s} z'_i \times \bar{w}_i\,,$$

où $\bar{w}_i \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ est la classe d'homologie d'un «petit» 2-cycle relatif Ω_i définissant au voisinage de λ_i l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Les $\bar{w}_i$ sont plus précisément définis par (5.9), (5.10) et (5.11). Nous convenons que $H_k(\,.\,) = 0$ pour $k < 0$.

Démonstration. Si l'on prend pour τ_k et τ'_k les homomorphismes définis en (5.13) et (5.13.1), le diagramme de l'énoncé est l'enveloppe externe du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{s} c^{i}_{k-2}} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i^{\#}) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{s} \tau_{i,k}} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*) & \to & H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\oplus^{s} H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{s} c'^{i}_{k-2}} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(M_i^{\#}) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{s} \tau'_{i,k}} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_*) & \to & H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)
\end{array}$$

où toutes les flèches non nommées sont naturelles. Pour montrer la première partie de la proposition, il suffit alors de voir que les flèches horizontales sont des isomorphismes et que les trois rectangles sont commutatifs. Dans le rectangle de gauche, les flèches horizontales sont sommes directes d'isomorphismes induits par les isomorphismes (5.12); ce rectangle est commutatif car ces isomorphismes commutent aux inclusions. Le rectangle de droite est celui du lemme 5.3 qui contient les assertions nécessaires le concernant. Les faits significatifs sont rassemblés dans le rectangle central. Ses flèches horizontales sont, compte tenu des égalités (5.4), sommes directes pour $1 \leqslant i \leqslant s$ des isomorphismes de Leray (5.6). Il est commutatif en raison de la naturalité de l'isomorphisme de Leray par rapport à la trace sur une sous-variété fermée transversale, naturalité qui s'exprime dans la commutativité des diagrammes (5.7). Ce qui concerne le diagramme (5.14.1) se trouve ainsi établi. Pour ce qui est de la formule (5.14.2), elle résulte de la réduction à un produit-croix de l'isomorphisme de Leray dans le cas trivial, donnée par la formule (5.8). En effet, si l'on substitue les résultats de la formule (5.8) pour $1 \leqslant i \leqslant s$ dans la formule (5.13.1) concernant τ'_k, on trouve, compte tenu de ce que c'^{i} coïncide avec l'identification canonique de M à $M \times \{\lambda_i\}$,

$$\tau'_k\left(\bigoplus_{i=1}^{s} z'_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{incl}_*(z'_i \times \bar{u}_i)$$

et comme $\bar{w}_i = \mathrm{incl}_*(\bar{u}_i)$, il ne reste plus qu'à utiliser la naturalité du produit-croix pour aboutir à la formule de l'énoncé. $\square$

Remarque 5.15. Le même raisonnement que pour le lemme 5.3, mais dans une situation plus simple, montre, de manière classique, qu'on a, pour tout k, l'isomorphisme naturel

$$\bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\mathbf{P}^1_i, \mathbf{P}^1_*) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$$

somme des homomorphismes induits par inclusion. Il en résulte que $H_k(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*) = 0$ pour $k \neq 2$ et que $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ est libre sur les $\bar{w}_i$ qui interviennent dans la proposition 5.14. La formule (5.14.2) montre alors que l'isomorphisme τ'_k de cette proposition n'est autre que celui donné par la formule de Künneth pour le couple de produits $(M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), M \times \mathbf{P}^1_*)$.

Nous allons terminer ce paragraphe de manière similaire au précédent, en remplaçant $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ dans les suites exactes d'homologie relative de ces couples par les expressions que la proposition 5.14 en donne. Nous tirerons aussi les conséquences de la formule explicite (5.14.2) dans ce contexte. Pour cela, il nous faut introduire

(5.16) $\quad w \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique.

En relation avec la description géométrique (5.9) à (5.11) pour les $\bar{w}_i$, il sera souvent plus parlant d'écrire

$$w = [\Omega] \ , \tag{5.17}$$

où Ω est un 2-cycle appartenant à w. La classe w interviendra à travers le lemme suivant:

LEMME 5.18. *Si* $\varepsilon: H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \to H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ *est l'homomorphisme naturel, alors on a*

$$\varepsilon(w) = \bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s \ .$$

Démonstration. En se servant des expressions (5.11) et (5.17), la formule ci-dessus s'écrit

$$[\Omega]_{(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)} = \sum_{i=1}^{s} [\Omega_i]_{(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)} \ ,$$

ce qui est géométriquement clair. Voici toutefois une démonstration en bonne et due forme:

Considérons, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) & \xrightarrow{\varepsilon} & H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*) \\ \downarrow \alpha_i & \swarrow \beta_i & \uparrow \gamma_i \\ H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_i\}) & \overset{\delta_i}{\xleftarrow{\sim}} & H_2(\mathbf{P}^1_i, \mathbf{P}^1_*) \end{array}$$

où toutes les flèches sont induites par inclusion. La flèche δ_i est un isomorphisme d'excision. Rappelons que $\bar{w}_i = \gamma_i(\bar{u}_i)$ où $\bar{u}_i$ est la classe fondamentale de $H_2(\mathbf{P}^1_i, \mathbf{P}^1_*)$ compatible avec l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1_i$. Mais, comme celle-ci est induite par l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on a $\delta_i(\bar{u}_i) = \alpha_i(w)$. On en tire les égalités

$$\beta_i(\varepsilon(w)) = \delta_i(\bar{u}_i) \quad \text{pour tout} \quad i \ .$$

La remarque 5.15 donne d'autre part l'isomorphisme naturel

$$\gamma: \bigoplus_{i=1}^{s} H_2(\mathbf{P}^1_i, \mathbf{P}^1_*) \xrightarrow{\sim} H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$$

qui est somme des γ_i et on a $\beta_i \circ \gamma_j = 0$ pour $j \neq i$ puisque $\mathbf{P}^1_j \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_i\}$. Si donc $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ est identifié à $\bigoplus_{i=1}^{s} H_2(\mathbf{P}^1_i, \mathbf{P}^1_*)$ au moyen de γ, les γ_i en sont les sections et les β_i sont, aux isomorphismes δ_i près, les projections associées. Il en résulte qu'on a

$$\beta_i(\bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s) = \delta_i(\bar{u}_i) \quad \text{pour tout} \quad i \ ,$$

et il en résulte aussi que ces égalités comparées aux précédentes impliquent l'égalité $\varepsilon(w) = \bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s$. $\square$

La considération simultanée des suites exactes d'homologie relative des couples $(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ fait intervenir le diagramme commutatif d'inclusions suivant:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}_* & \overset{i}{\hookrightarrow} & \tilde{P} \\ \uparrow h^* & \hookrightarrow & \uparrow h \\ \tilde{M}_* & \overset{i'}{\hookrightarrow} & \tilde{M} \end{array} \tag{5.19}$$

Les inclusions i, i' et h y sont nommées pour la première fois mais h^* a déjà été nommée en (4.22) et intervient dans la proposition 4.23.

Nous pouvons maintenant énoncer le corollaire de la proposition 5.14 que ces suites exactes permettent d'obtenir:

COROLLAIRE 5.20. *On a les deux suites exactes longues entrant dans le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \to & \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-1}(L_i) & \xrightarrow{\zeta_{k+1}} & H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{P}) & \xrightarrow{\eta_k} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) & \xrightarrow{\zeta_k} & H_{k-1}(\tilde{P}_*) & \to \ldots \\ & \uparrow \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-1} & \hookrightarrow & \uparrow h^*_k & \hookrightarrow & \uparrow h_k & \hookrightarrow & \uparrow \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2} & \hookrightarrow & \uparrow h^*_{k-1} & \\ \ldots \to & \oplus^s H_{k-1}(M) & \xrightarrow{\zeta'_{k+1}} & H_k(\tilde{M}_*) & \xrightarrow{i'_k} & H_k(\tilde{M}) & \xrightarrow{\eta'_k} & \oplus^s H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\zeta'_k} & H_{k-1}(\tilde{M}_*) & \to \ldots \end{array} \tag{5.20.1}$$

où nous avons appliqué la convention d'écriture (2.1) aux homomorphismes induits par les inclusions i, i', h^* et h qui forment le diagramme (5.19). Nous y avons mis en évidence les homomorphismes m^i_{k-1} et m^i_{k-2} induits par les inclusions m^i qui figurent dans l'énoncé du théorème 1.3. Toutes les flèches verticales sont donc naturelles. On a de plus, pour ζ'_k, la formule explicite

$$\zeta'_k\left(\bigoplus_{i=1}^{s} z'_i\right) = (-1)^k \sum_{i=1}^{s} z'_i \times \partial \bar{w}_i\,, \tag{5.20.2}$$

où $\bar{w}_i \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ est la classe d'homologie d'un «petit» 2-cycle relatif Ω_i définissant au voisinage de λ_i l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Les $\bar{w}_i$ sont plus précisément définis par (5.9), (5.10) et (5.11). Enfin, η'_k vérifie la relation suivante

$$\eta'_k(z' \times w) = \oplus^s z' \quad \textit{pour} \quad z' \in H_{k-2}(M)\,, \tag{5.20.3}$$

où $w \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ *est, conformément à la définition (5.16), la classe fondamentale de* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ *compatible avec son orientation canonique. L'homomorphisme* η'_k *est d'ailleurs complètement déterminé par cette formule car il s'annule sur les éléments de la forme* $z'' \times v$, *avec* $z'' \in H_k(M)$ et $v \in H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$, *et ceux-ci décrivent un supplémentaire dans* $H_k(\tilde{M})$ *des éléments de la forme* $z' \times w$ *avec* $z' \in H_{k-2}(M)$. *Nous convenons toujours que* $H_k(\ .\ ) = 0$ *pour* $k < 0$.

Démonstration. On obtient le diagramme (5.20.1) en substituant $\bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i)$ et $\oplus^s H_{k-2}(M)$ respectivement à $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ pour tout k dans le diagramme commutatif constitué par les suites exactes d'homologie relative des couples $(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ reliées entre elles par les homomorphismes naturels. Cette substitution est permise par les isomorphismes τ_k et τ'_k de la proposition 5.14; ce faisant, la flèche naturelle $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \to H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ est transmuée en l'homomorphisme naturel $\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}$ en raison de la commutativité du diagramme (5.14.1). Cela donne bien le diagramme (5.20.1).

D'après ces substitutions, l'homomorphisme ζ'_k est obtenu en composant l'homorphisme bord $\partial: H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \to H_{k-1}(\tilde{M}_*)$ avec l'isomorphisme τ'_k. La formule (5.14.2) pour τ'_k donne alors

$$\zeta'_k(\bigoplus_{i=1}^{s} z'_i) = \partial(\tau'_k(\bigoplus_{i=1}^{s} z'_i)) = \partial(\sum_{i=1}^{s} z'_i \times \bar{w}_i) .$$

Mais on a

$$\partial(z'_i \times \bar{w}_i) = (-1)^{k-2} z'_i \times \partial \bar{w}_i ,$$

en notant aussi ∂ l'homomorphisme bord $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*) \to H_2(\mathbf{P}^1_*)$ (cf. [Sp] 5.3.15). La formule (5.20.2) en résulte.

L'homorphisme η'_k est obtenu en faisant suivre l'homomorphisme naturel $e'_k: H_k(\tilde{M}) \to H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ de l'isomorphisme réciproque $(\tau'_k)^{-1}$ de τ'_k. Alors, par naturalité du produit-croix, on a, pour $z' \in H_{k-2}(M)$,

$$\eta'_k(z' \times w) = (\tau'_k)^{-1}(e'_k(z' \times w)) = (\tau'_k)^{-1}(z' \times \varepsilon(w)) ,$$

où ε est l'homomorphisme naturel $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \to H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$. Mais, d'après le lemme 5.18 et par bilinéarité du produit-croix

$$z' \times \varepsilon(w) = z' \times (\bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s) = z' \times \bar{w}_1 + \ldots + z' \times \bar{w}_s .$$

La formule (5.20.3) résulte alors, elle aussi, de la formule (5.14.2).

Par ailleurs, la formule de Künneth pour $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ donne un isomorphisme

$$(H_k(M) \otimes H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))) \oplus (H_{k-2}(M) \otimes H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{M})$$

qui est le produit-croix homologique dont la restriction aux éléments décomposables s'écrit $z' \otimes v \mapsto z' \times v$. Comme $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ est libre sur la classe fondamentale w, l'image de $H_{k-2}(M) \otimes H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ par cet isomorphisme est précisément formée des éléments de $H_k(\tilde{M})$ de la forme $z' \times w$ avec $z' \in H_{k-2}(M)$. Un supplémentaire des éléments de cette

forme est donc donné par l'image de $H_k(M) \otimes_{\hat{}} H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$. Mais les éléments de ce supplémentaire sont eux-mêmes de la forme $z' \times \hat{\lambda}$ où $z' \in H_k(M)$ et où $\hat{\lambda}$ est la classe d'homologie du 0-simplexe singulier de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ d'image λ, classe sur laquelle $H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ est libre. Si donc $\tilde{\lambda}$ est la classe d'homologie dans $H_0(\mathbf{P}^1_*)$ du même 0-simplexe, on a, par naturalité du produit-croix,

$$z' \times \hat{\lambda} = i'_k(z' \times \tilde{\lambda})$$

et η'_k s'annule donc dessus d'après l'exactitude de la ligne inférieure du diagramme (5.20.1). Cela montre la dernière assertion du corollaire 5.20. □

Dans la suite, nous ne nous servirons de ce qui a été fait dans ce paragraphe qu'à travers le corollaire 5.20 (excepté que, de manière indépendante de tout le reste, nous renverrons aux lemmes élémentaires 5.15 et 5.18 pour la démonstration du lemme élémentaire 7.7). On retrouve bien, dans ce corollaire, le deuxième point clef de la démonstration du théorème 1.3 dont nous avons parlé au moment de la présentation informelle de l'isomorphisme de Leray. En effet, d'après les démonstrations de la proposition 5.14 et du corollaire 5.20, la naturalité de l'isomorphisme de Leray par rapport à une sous-variété fermée transverse s'exprime dans la commutativité du diagramme (5.20.1) et la réduction à un produit-croix de l'isomorphisme de Leray dans le cas trivial est manifestée par les formules explicites (5.20.2) et (5.20.3).

6. Retour de l'éclaté à l'espace initial

Dans ce paragraphe, nous étudions d'un point de vue homologique la relation entre, d'une part, les éléments $\tilde{P}, \tilde{M}, L^{\#}, L_i^{\#}, M^{\#}, M_i^{\#}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ sur lesquels a porté notre étude aux paragraphes précédents et, d'autre part, les éléments P, L, L_i, M dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ sur lesquels porte le théorème 1.3 (cf. fig. 3.2). Nous nous étions en effet placés dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ pour rendre compte de l'«isotopie» décrite informellement dans l'introduction et l'éclatement de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de l'axe $\mathscr{M}$ du pinceau Λ avait été motivée par la nécessité de «répéter» cet axe. Toute l'étude géométrique qui précède a été faite dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Nous allons maintenant «redescendre» de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ à $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ au moyen du morphisme d'éclatement f. Comme nous ne nous intéressons qu'à ce qui se passe en dehors de A dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et de sa transformée totale $\tilde{A}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$, nous allons en fait étudier la géométrie de

(6.1) $\quad f\colon \tilde{P} \to P \quad$ application induite par le morphisme d'éclatement f (cf. fig. 3.1 et 3.2).