Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE ALGÉBRIQUE PROJECTIF

Autor: Chéniot, Denis

Kapitel: 4. HOMOLOGIE DU FIBRE AVEC SOUS-FIBRÉ TRIVIAL OBTENU

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58744

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

4. Homologie du fibré avec sous-fibré trivial obtenu

Dans ce paragraphe, nous étudions l'homologie du fibré $\tilde{P}_*$ de projection $\tilde{p}_*$ avec sous-fibré trivial $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ obtenus au corollaire 3.30 (cf. fig. 3.2). Nous n'avons pas besoin de suites spectrales car leur base $\mathbf{P}^1_*$ est topologiquement une 2-sphère privée de s points donc se rétracte par déformation sur un bouquet de $s - 1$ cercles; rappelons que s est le nombre d'hyperplans «mauvais» dans le pinceau Λ et que nous supposons que $s \geqslant 2$. Les trois lemmes suivants montrent que, pour l'homologie relative de l'espace total modulo une fibre, nous pouvons nous ramener aux fibrés induits au-dessus d'un tel bouquet puis au-dessus de chacun des cercles qui le composent; et dans le cas d'un fibré sur un cercle, nous disposons de l'isomorphisme de Wang que nous décrirons ensuite.

Nous pouvons choisir ce bouquet de cercles avec son sommet au point λ au-dessus duquel se trouvent les fibres qui nous intéressent. A sommet donné, plusieurs choix sont possibles et il y aura dans tout ce qui suit un caractère non intrinsèque dépendant de ce choix. Fixons donc arbitrairement:

$$(4.1) \qquad B = \bigvee_{j=1}^{s-1} C_j \qquad \begin{array}{l}\text{un bouquet de cercles de sommet } \lambda, \\ \text{rétracte fort par déformation de } \mathbf{P}^1_*.\end{array}$$

Nous allons considérer les fibrés et sous-fibrés induits par $\tilde{P}_*$ et $\tilde{M}_*$ au-dessus de B et des C_j. Nous posons donc

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \tilde{P}_B = \tilde{p}_*^{-1}(B) \\ \tilde{M}_B = \tilde{M}_* \cap \tilde{P}_B = M \times B\,, \end{cases}$$

$$(4.3) \qquad \begin{cases} \tilde{P}_{C_j} = \tilde{p}_*^{-1}(C_j) \\ \tilde{M}_{C_j} = \tilde{M}_* \cap \tilde{P}_{C_j} = M \times C_j \end{cases} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1\,.$$

Lemme 4.4. *L'inclusion entre couples*

$$\bar{J}\colon (\tilde{P}_B, \tilde{M}_B) \hookrightarrow (\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Soit $h\colon \mathbf{P}^1_* \times [0, 1] \to \mathbf{P}^1_*$ une homotopie de l'identité de $\mathbf{P}^1_*$ vers une application d'image contenue dans B, homotopie laissant B globalement invariant (nous nous servons donc seulement du fait que B est rétracte *faible* par déformation de $\mathbf{P}^1_*$). Comme $\mathbf{P}^1_*$ est séparé paracompact et est la base du couple de fibré et sous-fibré localement trivial $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$, il y a, au-dessus de l'homotopie h, une homotopie de couples $H\colon (\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$

$\times [0, 1] \to (\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ démarrant avec l'identité de $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ (cf. [Sp] 2.7.14 qu'on peut adapter à un couple formé d'un fibré et d'un sous-fibré). Posons

$$\begin{aligned} \bar{R} : (\tilde{P}_*, \tilde{M}_*) &\to (\tilde{P}_B, \tilde{M}_B) \\ x \quad &\mapsto H(x, 1) \end{aligned}$$

(on a bien $H(x, 1) \in \tilde{P}_B$ puisque $h(\tilde{p}_*(x), 1) \in B$). Alors $\bar{R}$ est un inverse homotopique de $\bar{J}$. En effet, H réalise une homotopie de l'identité de $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ vers $\bar{J} \circ \bar{R}$; mais aussi la restriction de H à $(\tilde{P}_B, \tilde{M}_B) \times [0, 1]$ réalise une homotopie de l'identité de $(\tilde{P}_B, \tilde{M}_B)$ vers $\bar{R} \circ \bar{J}$ car elle ne fait pas sortir de $(\tilde{P}_B, \tilde{M}_B)$ puisque h laisse B globalement invariant. □

En ce qui concerne les homologies relatives modulo les fibres $L^\#$ et $M^\#$ au-dessus de λ, on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4.5. *Les inclusions* $(\tilde{P}_B, L^\#) \hookrightarrow (\tilde{P}_*, L^\#)$ *et* $(\tilde{M}_B, M^\#) \hookrightarrow (\tilde{M}_*, M^\#)$ *induisent, pour tout* k, *des isomorphismes en homologie de rang* k *entrant dans le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} H_k(\tilde{P}_B, L^\#) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{P}_*, L^\#) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ H_k(\tilde{M}_B, M^\#) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{M}_*, M^\#) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont aussi induites par inclusion.

Démonstration. D'après le lemme 4.4, les inclusions $\tilde{P}_B \hookrightarrow \tilde{P}_*$ et $\tilde{M}_B \hookrightarrow \tilde{M}_*$ induisent des isomorphismes en homologie. Il en résulte, d'après les suites exactes d'homologie relative pour les couples $(\tilde{P}_*, \tilde{P}_B)$ et $(\tilde{M}_*, \tilde{M}_B)$, que $H_k(\tilde{P}_*, \tilde{P}_B) = 0$ et $H_k(\tilde{M}_*, \tilde{M}_B) = 0$ pour tout k. Les suites exactes d'homologie relative pour les triplets $(\tilde{P}_*, \tilde{P}_B, L^\#)$ et $(\tilde{M}_*, \tilde{M}_B, M^\#)$ donnent alors les isomorphismes de l'énoncé. La commutativité du diagramme provient de la commutativité du diagramme des inclusions correspondantes. □

LEMME 4.6. *On a, pour tout* k, *les isomorphismes entrant dans le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^\#) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{P}_B, L^\#) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ \bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{M}_{C_j}, M^\#) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{M}_B, M^\#) \end{array}$$

où toutes les flèches sont obtenues à partir d'homomorphismes induits par inclusion.

Démonstration. Nous allons séparer la contribution des $\tilde{P}_{C_j}$ en les déconnectant par excision de $L^{\#}$ après nous être ramenés à l'homologie relative modulo un ensemble plus gros englobant $L^{\#}$ dans son intérieur. Soit U un voisinage ouvert de λ dans B tel que:

(i) $\{\lambda\}$ soit rétracte par déformation de $C_j \cap U$ pour $1 \leqslant j \leqslant s-1$,

(ii) $\tilde{P}_B$ soit trivialisable au-dessus de U.

Considérons les fibrés induits par $\tilde{P}_B$ au-dessus de U et des $C_j \cap U$:

$$\begin{cases} \tilde{P}_U = \tilde{p}_*^{-1}(U) \\ \tilde{P}_{C_j \cap U} = \tilde{p}_*^{-1}(C_j \cap U) \,. \end{cases}$$

Alors $L^{\#} = \tilde{p}_*^{-1}(\lambda)$ est rétracte fort par déformation de chaque $\tilde{P}_{C_j \cap U}$ et aussi de $\tilde{P}_U$. Considérons maintenant le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) & \xrightarrow{1} & H_k(\tilde{P}_B, L^{\#}) \\
\downarrow 2 & \circlearrowleft & \downarrow 3 \\
\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j}, \tilde{P}_{C_j \cap U}) & \xrightarrow{4} & H_k(\tilde{P}_B, \tilde{P}_U) \\
\uparrow 5 & \circlearrowleft & \uparrow 6 \\
\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j} \backslash L^{\#}, \tilde{P}_{C_j \cap U} \backslash L^{\#}) & \xrightarrow{7} & H_k(\tilde{P}_B \backslash L^{\#}, \tilde{P}_U \backslash L^{\#})
\end{array}$$

où toutes les flèches sont naturelles, c'est-à-dire obtenues à partir des homomorphismes induits par inclusion. Ce diagramme est commutatif car, d'une part, les diagrammes correspondants d'inclusions pour chaque j sont commutatifs et, d'autre part, la composition à gauche par un *homomorphisme* est distributive par rapport à l'addition d'applications. Dans ce diagramme, la flèche numérotée 3 est un isomorphisme car $L^{\#}$ est rétracte par déformation de $\tilde{P}_U$ et on peut raisonner comme dans la démonstration du corollaire 4.5; la flèche 2 est somme directe d'isomorphismes analogues. La flèche 6 est un isomorphisme obtenu par excision du fermé $L^{\#}$ de $\tilde{P}_B$ contenu dans l'ouvert $\tilde{P}_U$; la flèche 5 est somme directe d'isomorphismes semblables. Pour ce qui est de la flèche 7, on se retrouve maintenant au-dessus de $B \backslash \{\lambda\}$ qui est déconnecté en les $s-1$ composantes connexes par arcs $C_j \backslash \{\lambda\}$; toute composante connexe par arcs de $\tilde{P}_B \backslash L^{\#}$ est donc contenue dans l'un des $\tilde{P}_{C_j} \backslash L^{\#}$ (en fait lui est égale car L donc $L^{\#}$ est connexe par arcs); la flèche 7 est donc un isomorphisme. On peut alors conclure que la flèche 4 puis la flèche 1 sont des isomorphismes. Mais la flèche 1 est la flèche supérieure du diagramme de l'énoncé. On peut montrer de la même façon que la flèche inférieure de ce diagramme est aussi un isomorphisme. Pour finir, ce diagramme est commutatif pour les mêmes raisons que le diagramme considéré en cours de démonstration. □

Le corollaire 4.5 et le lemme 4.6 donnent une décomposition de $H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$ comme somme directe des $H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#})$. Nous nous sommes donc ramenés à l'homologie relative modulo une fibre d'un fibré localement

trivial sur un cercle. Nous pouvons alors utiliser l'isomorphisme de Wang (cf. [Wg]) que nous allons maintenant décrire.

Nous commençons par choisir une orientation sur chaque C_j que nous matérialiserons par le choix, pour $1 \leqslant j \leqslant s-1$, de

(4.7) ω_j un lacet de base λ faisant une fois le tour de C_j.

Il revient au même de dire que la classe d'homotopie de ω_j engendre $\pi_1(C_j, \lambda)$ ou encore que, si l'on considère ω_j comme 1-simplexe (cycle) singulier de C_j, sa classe d'homologie $[\omega_j]$ engendre $H_1(C_j)$. On a alors, pour tout k, les isomorphismes de Wang associés à ces orientations des C_j:

(4.8) $$\nu_{j,k}: H_{k-1}(L^{\#}) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1 ,$$

où l'on convient que $H_{k-1}(L^{\#}) = 0$ pour $k = 0$. On peut informellement décrire ces isomorphismes comme suit: Prenons un $(k-1)$-cycle γ dans $L^{\#}$, qui est la fibre au-dessus de λ, et faisons décrire à λ le lacet ω_j; la fibre peut accompagner ce mouvement en subissant une isotopie dans laquelle γ «décrit» un k-cycle relatif Γ de $\tilde{P}_{C_j}$ modulo $L^{\#}$ (cf. fig. 4.1): l'isomorphisme de Wang $\nu_{j,k}$ fait correspondre la classe d'homologie de Γ à la classe d'homologie de γ. Cet isomorphisme dépend évidemment du sens de parcours choisi sur C_j et matérialisé par ω_j.

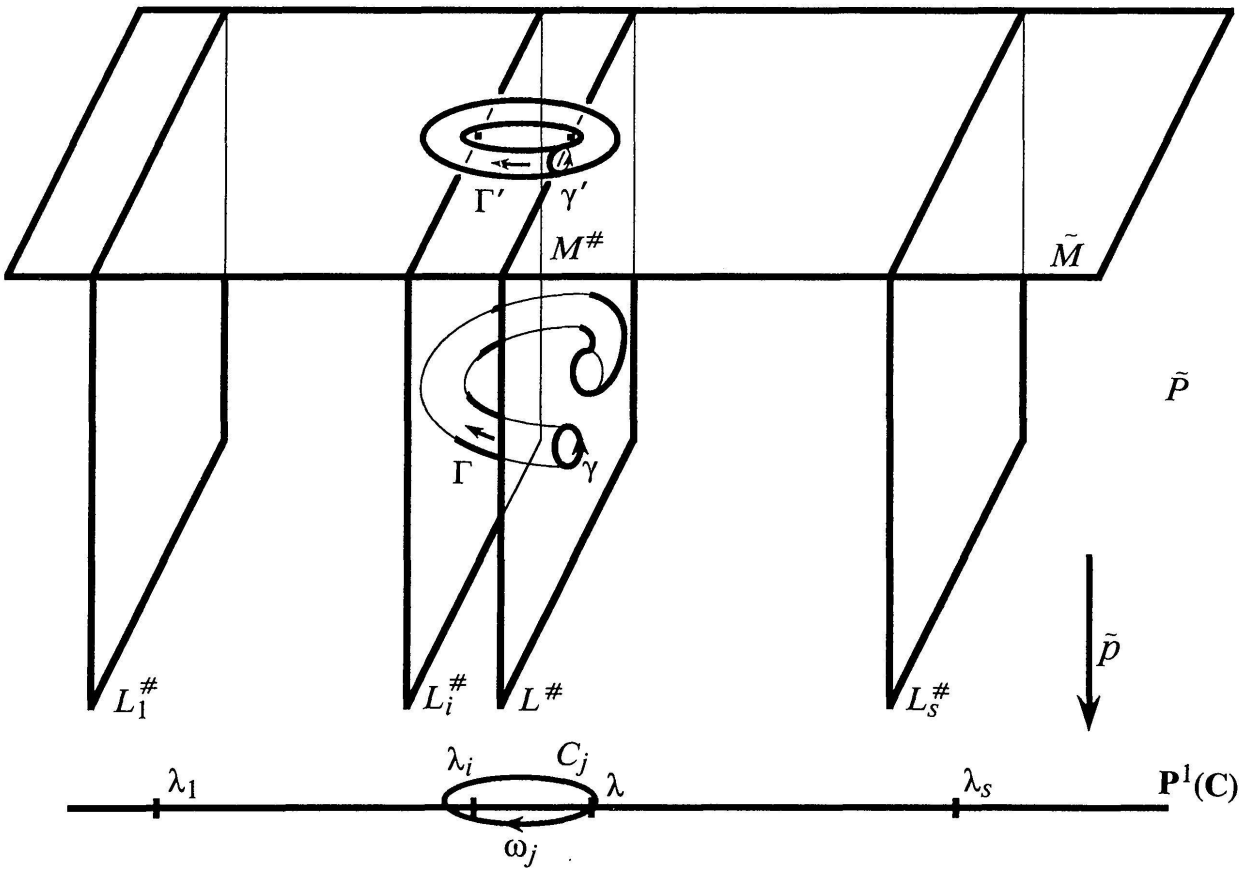

FIGURE 4.1

Le premier point clef dans la démonstration du théorème 1.3 est que les isomorphismes de Wang se comportent *naturellement* par rapport aux *sous-fibrés* $\tilde{M}_{C_j}$. Cela veut dire que si $\nu'_{j,k}$ est l'isomorphisme de Wang de rang k pour $\tilde{M}_{C_j}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{k-1}(L^{\#}) & \overset{\nu_{j,k}}{\xrightarrow{\sim}} & H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ H_{k-1}(M^{\#}) & \overset{\nu'_{j,k}}{\xrightarrow{\sim}} & H_k(\tilde{M}_{C_j}, M^{\#}) \end{array} \tag{4.9}$$

où les flèches verticales sont induites par inclusion.

Ainsi donc, reprenant notre description informelle, si γ est homologue dans $L^{\#}$ à un cycle γ' de $M^{\#}$ (compte tenu des isomorphismes (3.29), c'est le cas si l'homomorphisme m_{k-1} considéré dans le théorème 1.3 est surjectif), alors Γ est homologue dans $\tilde{P}_{C_j}$ modulo $L^{\#}$ à un cycle relatif Γ' de $\tilde{M}_{C_j}$ modulo $M^{\#}$ obtenu à partir de γ' par la procédure de Wang dans le fibré $\tilde{M}_{C_j}$ (cf. fig. 4.1). Cela précise l'assertion de l'introduction selon laquelle, si certains cycles de L sont homologues à des cycles de M, alors les monodromies autour des hyperplans mauvais peuvent être «poussées» dans l'axe.

Mais, d'autre part, chaque sous-fibré $\tilde{M}_{C_j}$ ayant la forme triviale $M \times C_j$, l'isomorphisme $\nu'_{j,k}$ s'exprime trivialement comme un produit-croix homologique

$$\nu'_{j,k}(z'^{\#}) = z' \times [\omega_j]_{(C_j,\{\lambda\})} \quad \text{pour} \quad z' \in H_{k-1}(M)\ , \tag{4.10}$$

où $[\omega_j]_{(C_j,\{\lambda\})}$ désigne la classe d'homologie dans $H_1(C_j, \{\lambda\})$ de ω_j considéré comme 1-simplexe (cycle) singulier relatif de C_j modulo $\{\lambda\}$ et $z'^{\#}$ désigne l'élément correspondant à z' dans l'isomorphisme $H_{k-1}(M) \xrightarrow{\sim} H_{k-1}(M^{\#})$ induit par l'identification canonique de M à $M^{\#} = M \times \{\lambda\}$. On tombe donc sur une forme de la formule de Künneth pour le couple de produits $(M \times C_j, M \times \{\lambda\})$. Notons que dans ce cas trivial $\nu'_{j,k}(z'^{\#})$ est l'image d'un élément de $H_k(\tilde{M}_{C_j})$ par l'homomorphisme naturel $\mathrm{H}_k(\tilde{M}_{C_j}) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{M}_{C_j}, M^{\#})$.

Revenant à notre description informelle, nous pouvons rendre compte de ce qui précède en disant que, comme $\tilde{M}_{C_j}$ est trivial, on peut, dans la procédure de Wang pour $\tilde{M}_{C_j}$, suivre la fibre trivialement de sorte que Γ' prend la forme d'un produit et se referme en un cycle absolu (cf. fig. 4.1). Voilà qui précise ce que nous avons dit dans l'introduction, concernant la «trivialisation» des monodromies qui peuvent être «poussées dans l'axe».

Signalons encore une formule qui est intuitivement claire d'après ce qui précède mais dont nous n'aurons pas à nous servir dans cet article. Si $\partial: H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \to H_{k-1}(L^{\#})$ est l'homomorphisme bord, on a

$$\partial \circ \nu_{j,k} = (-1)^{k-1}(\theta_{j,k-1} - \mathrm{Id}_{H_{k-1}(L^{\#})}) , \tag{4.11}$$

où $\theta_{j,k-1}$ est la monodromie en homologie de rang $k-1$ au-dessus de ω_j.

Nous avons mis en annexe des indications sommaires sur la manière dont peut être établi l'isomorphisme de Wang et en même temps justifiées les assertions de naturalité (4.9) et de trivialité (4.10) ci-dessus.

Nous allons modifier un peu l'écriture des isomorphismes de Wang avec deux intentions:

Premièrement, nous voulons faire apparaître les sections L et M de notre figure de départ grâce aux isomorphismes réciproques des isomorphismes (3.29):

$$\begin{cases} c : L \xrightarrow{\sim} L^{\#} \\ c' : M \xrightarrow{\sim} M^{\#} = M \times \{\lambda\} , \end{cases} \tag{4.12}$$

où c' coïncide donc avec l'identification canonique de M à $M \times \{\lambda\}$.

Deuxièmement, nous voulons intégrer les produits-croix qui apparaissent pour les sous-fibrés $\tilde{M}_{C_j}$ dans un cadre maniable, c'est-à-dire sous une forme intrinsèque ne dépendant pas des ω_j. Nous posons donc

$$\begin{cases} \bar{\nu}_{j,k} : H_{k-1}(L) \otimes H_1(C_j) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \\ \bar{\nu}'_{j,k} : H_{k-1}(M) \otimes H_1(C_j) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{M}_{C_j}, M^{\#}) \end{cases} \tag{4.13}$$

définis par

$$\begin{cases} \bar{\nu}_{j,k}(z \otimes [\omega_j]) = \nu_{j,k}(c_{k-1}(z)) & \text{pour} \quad z \in H_{k-1}(L) \\ \bar{\nu}'_{j,k}(z' \otimes [\omega_j]) = \nu'_{j,k}(c'_{k-1}(z')) & \text{pour} \quad z' \in H_{k-1}(M) , \end{cases} \tag{4.13.1}$$

avec la convention d'écriture (2.1), et où $[\omega_j]$ désigne la classe d'homologie dans $H_1(C_j)$ de ω_j considéré comme simplexe (cycle) singulier; ces définitions sont légitimes et conduisent à des isomorphismes car $H_1(C_j)$ est libre sur $[\omega_j]$. Nous obtenons bien quelque chose d'intrinsèque pour $\bar{\nu}'_{j,k}$ car la formule (4.10) donne, par bilinéarité du produit tensoriel et du produit-croix et compte tenu de ce que c' coïncide avec l'identification canonique de M à $M \times \{\lambda\}$,

$$\bar{\nu}'_{j,k}(z' \otimes [\alpha]) = z' \times [\alpha]_{(C_j, \{\lambda\})} \quad \text{pour tout 1-cycle } \alpha \text{ de } C_j , \tag{4.14}$$

avec la même convention d'écriture que pour (4.10). En revanche, il ne faut pas se laisser méprendre par l'écriture qui peut laisser croire que $\bar{\nu}_{j,k}$ est intrinsèque; en effet, si on remplace ω_j par son opposé, la valeur de $\bar{\nu}_{j,k}$ se

trouve modifiée par l'intervention d'une monodromie qui n'est plus l'identité comme dans le cas du sous-fibré trivial.

Nous allons maintenant tirer les conséquences de ces isomorphismes pour nos fibrés de départ $\tilde{P}_*$ et $\tilde{M}_*$, ce que nous pouvons faire grâce au lemme 4.6 et au corollaire 4.5. Pour cela, nous nous servons aussi de l'isomorphisme naturel

$$\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_1(C_j) \to H_1(\mathbf{P}^1_*) \tag{4.15}$$

qui fait que $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ est libre sur les classes d'homologie dans $\mathbf{P}^1_*$ des ω_j. Comme il peut maintenant y avoir ambiguïté sur l'espace dans lequel on prend la classe d'homologie d'un ω_j, nous précisons

$$a_j = \text{classe d'homologie de } \omega_j \text{ dans } C_j \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1 . \tag{4.16}$$

Nous pouvons alors définir les homomorphismes suivants

$$\begin{cases} \bar{\nu}_k : H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_k(\tilde{P}_*, L^{\#}) \\ \bar{\nu}'_k : H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_k(\tilde{M}_*, M^{\#}) \end{cases} \tag{4.17}$$

par les conditions

$$\begin{cases} \bar{\nu}_k(z \otimes \mathrm{incl}_*(a_j)) = \mathrm{incl}_*(\bar{\nu}_{j,k}(z \otimes a_j)) \\ \bar{\nu}'_k(z' \otimes \mathrm{incl}_*(a_j)) = \mathrm{incl}_*(\bar{\nu}'_{j,k}(z' \otimes a_j)) \end{cases} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1 , \tag{4.17.1}$$

en notant indistinctement incl_* tout homomorphisme induit en homologie par une inclusion.

LEMME 4.18. *Les homomorphismes* $\bar{\nu}_k$ *et* $\bar{\nu}'_k$ *définis ci-dessus sont des isomorphismes pour tout* k. *Ils font commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow[\sim]{\bar{\nu}_k} & H_k(\tilde{P}_*, L^{\#}) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow[\sim]{\bar{\nu}'_k} & H_k(\tilde{M}_*, M^{\#}) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les homomorphismes naturels. L'isomorphisme $\bar{\nu}'_k$ *se réduit à la forme triviale donnée par la formule intrinsèque*

$$\bar{\nu}'_k(z' \otimes [\alpha]) = z' \times [\alpha]_{(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})} \quad \textit{pour tout 1-cycle } \alpha \textit{ de } \mathbf{P}^1_* ,$$

où $[\alpha]_{(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})}$ *désigne l'image de* $[\alpha]$ *par l'homomorphisme naturel* $H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_1(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})$.

Démonstration. Nous allons écrire $\bar{\nu}_k$ comme composé d'isomorphismes déjà établis. Nous avons en effet, pour commencer, la suite d'isomorphismes

$$\bigoplus_{j=1}^{s-1} (H_{k-1}(L) \otimes H_1(C_j)) \overset{1}{\xrightarrow{\sim}} \bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \overset{2}{\xrightarrow{\sim}} H_k(\tilde{P}_B, L^{\#}) \overset{3}{\xrightarrow{\sim}} H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$$

où la flèche numérotée 1 est la somme directe des isomorphismes de Wang modifiés $\bar{\nu}_{j,k}$ définis en (4.13) et 2 et 3 sont les isomorphismes naturels établis au lemme 4.6 et au corollaire 4.5. Nous composons ensuite à gauche par la suite d'isomorphismes

$$H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \overset{4}{\xrightarrow{\sim}} H_{k-1}(L) \otimes \Big(\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_1(C_j)\Big) \overset{5}{\xrightarrow{\sim}} \bigoplus_{j=1}^{s-1} (H_{k-1}(L) \otimes H_1(C_j))$$

où 4 est obtenu en tensorisant par l'identité l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme naturel (4.15) et 5 représente l'isomorphisme canonique dû à la commutation du produit tensoriel avec les sommes directes. En composant ces cinq isomorphismes on obtient bien une application satisfaisant aux conditions (4.17.1) qui définissent $\bar{\nu}_k$. On a la même décomposition en isomorphismes pour $\bar{\nu}'_k$. Maintenant, dans les deux décompositions de $\bar{\nu}_k$ et $\bar{\nu}'_k$, les paires d'isomorphismes correspondants commutent aux homomorphismes naturels. Le fait significatif est la propriété de commutation pour les isomorphismes 1: elle résulte de la naturalité de l'isomorphisme de Wang pour les *sous-fibrés* exprimée par la commutativité du diagramme (4.9) et accessoirement de la commutation des isomorphismes (4.12) aux inclusions. Les autres commutations sont de nature élémentaire et, pour ce qui est de 2 et 3, elles sont contenues dans le lemme 4.6 et le corollaire 4.5. On obtient ainsi la commutativité du diagramme de l'énoncé. Il nous reste à établir la formule concernant $\bar{\nu}'_k$. Il suffit de le faire pour $\alpha = \omega_j$ puisque $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ est libre sur les classes des ω_j dans $\mathbf{P}^1_*$. Ces classes apparaissent notées $\mathrm{incl}_*(a_j)$ dans les formules (4.17.1) définissant $\bar{\nu}'_k$. La relation à établir résulte alors de la formule (4.14) et de la naturalité du produit-croix (cf. [Sp] 5.3.11). □

Remarque 4.19. L'isomorphisme $\bar{\nu}'_k$ est, à l'isomorphisme naturel $H_1(\mathbf{P}^1_*) \xrightarrow{\sim} H_1(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})$ près, la formule de Künneth pour le couple de produits $(M \times \mathbf{P}^1_*, M \times \{\lambda\})$.

Remarque 4.20. Alors que $\bar{\nu}'_k$ est intrinsèque, $\bar{\nu}_k$ dépend, de la même manière que les $\bar{\nu}_{j,k}$, de l'orientation choisie sur les C_j mais il dépend aussi du choix fait en (4.1) du bouquet lui-même des C_j sur lequel on rétracte par déformation $\mathbf{P}^1_*$.

Nous allons, pour finir, substituer les expressions obtenues pour $H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$ et $H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})$ dans les suites exactes d'homologie relative pour ces couples, ce qui nous donnera la proposition terminale de ce paragraphe. Nous voulons y faire directement apparaître L et M à la place de $L^{\#}$ et $M^{\#}$ comme nous l'avons fait pour les isomorphismes de Wang. Nous servant des isomorphismes (4.12), nous définissons donc les injections j et j' par les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{array}{ccc} L^{\#} \hookrightarrow \tilde{P}_* & \qquad & M^{\#} \hookrightarrow \tilde{M}_* \\ \wr\uparrow_c \nearrow j & & \wr\uparrow_{c'} \nearrow j' \\ L & & M \end{array} \tag{4.21}$$

Les injections j et j' commutent avec les inclusions représentées dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{j} & \tilde{P}_* \\ \circlearrowleft m & \circlearrowright & \circlearrowleft h^* \\ M & \xrightarrow{j'} & \tilde{M}_* \end{array} \tag{4.22}$$

où h^* est nommée pour la première fois et où l'on reconnaît l'injection canonique m qui intervient dans l'énoncé du théorème 1.3.

Notre proposition peut alors s'énoncer:

PROPOSITION 4.23. *Etant donné un bouquet de cercles de sommet* λ *sur lequel* $\mathbf{P}^1_*$ *se rétracte par déformation et une orientation sur chacun de ces cercles, on a une suite exacte longue associée formant la ligne supérieure du diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ldots \to & H_k(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow{\xi_{k+1}} & H_k(L\ ) & \xrightarrow{j_k} & H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{\mu_k} & H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow{\xi_k} & H_{k-1}(L) \to \ldots \\ & \uparrow m_k \otimes \mathrm{Id} & \circlearrowleft & \uparrow m_k & \circlearrowleft & \uparrow h^*_k & \circlearrowleft & \uparrow m_{k-1} \otimes \mathrm{Id} & \circlearrowleft & \uparrow m_{k-1} \\ \ldots \to & H_k(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow{0} & H_k(M) & \xrightarrow{j'_k} & H_k(\tilde{M}_*) & \xrightarrow{\mu'_k} & H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow{0} & H_{k-1}(M) \to \ldots \end{array} \tag{4.23.1}$$

$$\chi'_k : H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_k(\tilde{M}_*)$$

La ligne inférieure est une suite exacte longue qui ne dépend pas des choix effectués; l'homomorphisme μ'_k *admet pour section le produit-croix homologique* χ'_k *dont la restriction aux éléments décomposables s'écrit* $z' \otimes u \mapsto z' \times u$. *Les flèches verticales sont les homomorphismes naturels; nous y voyons mis en évidence les homomorphismes* m_k *et* m_{k-1} *induits par l'injection canonique* m *qui figurent dans l'énoncé du théorème 1.3. Conformément à la convention d'écriture (2.1), les homomorphismes* j_k *et* j'_k *sont induits par les injections* j *et* j' *définies en (4.21) et l'homomorphisme* h^*_k *est induit par l'inclusion* h^* *nommée en (4.22). Nous convenons que* $H_k(\ .\ ) = 0$ *pour* $k < 0$.

Démonstration. Pour montrer l'exactitude des lignes du diagramme de l'énoncé et sa commutativité, il suffit de montrer qu'il est obtenu en faisant les substitutions permises par le lemme 4.18 dans le diagramme suivant:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\dots \to & H_{k+1}(\tilde{P}_*, L^{\#}) & \to & H_k(L^{\#}) & \to & H_k(\tilde{P}_*) & \to & H_k(\tilde{P}_*, L^{\#}) & \to & H_{k-1}(L^{\#}) & \to \dots \\
(4.23.2) & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \\
\dots \to & H_{k+1}(\tilde{M}_*, M^{\#}) & \to & H_k(M^{\#}) & \to & H_k(\tilde{M}_*) & \to & H_k(\tilde{M}_*, M^{\#}) & \to & H_{k-1}(M^{\#}) & \to \dots
\end{array}
$$

qui est formé des suites exactes d'homologie relative pour les couples $(\tilde{P}_*, L^{\#})$ et $(\tilde{M}_*, M^{\#})$ reliées en un diagramme commutatif par les homomorphismes induits par inclusion.

Plus précisément, nous substituons, pour tout k, les produits tensoriels $H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$ et $H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$ à $H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$ et $H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})$ au moyen des isomorphismes $\bar{\nu}_k$ et $\bar{\nu}'_k$ du lemme 4.18. Nous substituons aussi $H_k(L)$ et $H_k(M)$ à $H_k(L^{\#})$ et $H_k(M^{\#})$ au moyen des isomorphismes induits par les isomorphismes (4.12). On obtient bien ainsi les objets du diagramme de l'énoncé et il reste à vérifier que les flèches de (4.23.2) sont transmuées en les flèches dudit diagramme.

Les flèches horizontales de (4.23.2) induites par les inclusions $L^{\#} \hookrightarrow \tilde{P}_*$ et $M^{\#} \hookrightarrow \tilde{M}_*$ sont, d'après les diagrammes (4.21), effectivement transmuées en les flèches j_k et j'_k induites par les injections j et j'. En ce qui concerne les autres flèches horizontales, les noms qu'elles portent dans le diagramme de l'énoncé apparaissant pour la première fois à cette occasion, il n'y a rien à montrer; excepté toutefois pour les flèches qui devraient s'appeler ξ'_{k+1} et ξ'_k et dont l'énoncé affirme la nullité. Mais cela résultera de l'existence des sections χ'_k qui impliqueront la surjectivité des μ'_k donc, par exactitude, la nullité des ξ'_k. Le caractère intrinsèque de la ligne inférieure du diagramme de la proposition 4.23, contrairement à sa ligne supérieure, provient du caractère intrinsèque de l'isomorphisme $\bar{\nu}'_k$, contrairement à l'isomorphisme $\bar{\nu}_k$ (cf. remarques 4.19 et 4.20).

Venons-en aux flèches verticales pour lesquelles il faut montrer que des flèches naturelles sont transmuées en flèches naturelles. Il n'y a pas de problème pour la flèche médiane qui reste inchangée. Pour les autres, il s'agit de montrer la commutativité des diagrammes avec flèches verticales naturelles suivants:

$$
\begin{array}{ccc}
H_k(L) & \xrightarrow[\sim]{c_k} & H_k(L^{\#}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_k(M) & \xrightarrow[\sim]{c'_k} & H_k(M^{\#})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow[\sim]{\bar{\nu}_k} & H_k(\tilde{P}_*, L^{\#}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow[\sim]{\bar{\nu}'_k} & H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})
\end{array}
$$

Cela est trivial pour le premier diagramme, manifestant le simple fait que les isomorphismes c et c' commutent aux inclusions. La commutativité du second diagramme, qui est le fait significatif, constitue une partie du lemme 4.18. Nous avons ainsi fini de montrer que le diagramme (4.23.2) est transformé en le diagramme de l'énoncé par les substitutions que nous avons faites. Notons que l'assertion de commutativité du lemme 4.18 que nous avons utilisée repose sur celle du diagramme (4.9) et donc la commutativité du diagramme de la proposition 4.23 repose sur la naturalité de l'isomorphisme de Wang pour les sous-fibrés.

Il nous reste maintenant seulement à montrer que χ'_k est une section de μ'_k. Or l'isomorphisme $\bar{\nu}'_k$ transmue, par définition, μ'_k en l'homomorphisme naturel $H_k(\tilde{M}_*) \to H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})$ et, d'après le lemme 4.18, transforme un élément décomposable $z' \otimes [\alpha]$ de $H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$ en $z' \times [\alpha]_{(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})}$. Il suffit donc de vérifier que $z' \times [\alpha]$ retourne bien à $z' \times [\alpha]_{(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})}$ par cet homomorphisme naturel. Mais comme celui-ci est induit par l'inclusion $M \times \mathbf{P}^1_* \hookrightarrow M \times (\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})$, cela résulte de la naturalité du produit-

croix. Cette dernière partie de la proposition 4.23 repose ainsi sur la dernière assertion du lemme 4.18, donc sur la réduction à la formule (4.10) de l'isomorphisme de Wang dans le cas trivial. □

Remarque 4.24. Nous avons vu, lors de la description informelle de l'isomorphisme de Wang, que le premier point clef dans la démonstration du théorème 1.3 consistait en la naturalité de cet isomorphisme par rapport aux sous-fibrés et sa réduction à un produit-croix dans le cas trivial. D'après la démonstration ci-dessus, cela est manifesté dans la proposition 4.23 par la commutativité du diagramme qui y figure, d'une part, et, d'autre part, par la présence des homomorphismes nuls et des sections χ'_k dans sa suite exacte inférieure qui font qu'elle n'est qu'une version de la formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1_*$.

Remarque 4.25. D'après la formule (4.11), on a pour ξ_k les formules suivantes qui ne nous serviront pas dans cet article:

$$\xi_k(z \otimes [\omega_j]_{\mathbf{P}^1_*}) = (-1)^{k-1}(\theta_{j,k-1}(z) - z) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1\,, \tag{4.25.1}$$

où $\theta_{j,k-1}$ est, à l'isomorphisme de L avec $L^{\#}$ près, la monodromie en homologie de rang $k-1$ au-dessus d'un lacet ω_j ayant servi à orienter le cercle C_j du bouquet sur lequel on a choisi de rétracter par déformation $\mathbf{P}^1_*$.

Remarque 4.26. D'après la démonstration qui en a été donnée, la proposition 4.23 et la remarque 4.25 sont valables pour n'importe quel couple formé d'un fibré topologique localement trivial et d'un sous-fibré trivialisable sur une base séparée et paracompacte qui se rétracte faiblement par déformation sur un bouquet de cercles. Il convient d'y remplacer le couple (L, M) par un couple de fibres types et les injections j, j' par un homéomorphisme de ce couple sur le couple de fibres au-dessus du sommet du bouquet choisi.

5. Réintroduction des hyperplans mauvais dans l'éclaté

Dans ce paragraphe, nous passons de l'homologie du couple $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ à celle du couple $(\tilde{P}, \tilde{M})$ (cf. fig. 3.2). C'est-à-dire que, nous limitant toujours au complémentaire de $\tilde{A}$, nous étudions l'incidence en homologie de la réintroduction des transformées strictes des hyperplans «mauvais» que nous avions dû ôter au § 3 pour aboutir à une fibration localement triviale. L'étude de l'homologie du couple $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ menée au § 4 était basée sur cette fibration. Quand on passe de $\tilde{P}_*$ à $\tilde{P}$ on perd la structure de fibré localement trivial, mais celle de fibré trivial de $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ se prolonge à $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Pour connaître donc les perturbations apportées par la réintroduction des hyperplans mauvais, nous cherchons à caractériser