

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE  
ALGÉBRIQUE PROJECTIF  
**Autor:** Chéniot, Denis  
**Kapitel:** 1. Introduction et énoncé de théorème  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58744>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE ALGÉBRIQUE PROJECTIF

par Denis CHÉNIOT

### 1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DE THÉORÈME

Une méthode classique pour étudier la topologie d'un objet de géométrie algébrique est de considérer ses sections par un pinceau d'hyperplans. Elle est largement utilisée par Solomon Lefschetz dans son livre *L'analysis situs et la géométrie algébrique* (cf. [Lf]). Il aboutit ainsi notamment au théorème suivant: les groupes d'homologie d'un ensemble algébrique projectif complexe fermé et lisse de dimension pure  $d$  sont donnés jusqu'au rang  $d - 2$  par ceux d'une section hyperplane générique et au rang  $d - 1$  on en a ainsi tous les générateurs (cf. [Lf] V.3). On fait maintenant référence à ce genre de théorèmes sous le nom de théorèmes du type de Lefschetz.

Nous utilisons dans cet article la méthode de Lefschetz pour étudier le complémentaire  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  d'un ensemble algébrique fermé quelconque  $A$  dans l'espace projectif complexe  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ . Nous démontrons un nouveau théorème du type de Lefschetz dont voici l'énoncé:

THÉORÈME 1.1. *Soit  $A$  un ensemble algébrique fermé de codimension  $q$  dans l'espace projectif complexe  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , avec  $n \geq 1$  (nous convenons que  $q$  est la plus petite des codimensions des composantes irréductibles de  $A$ ; si  $A = \emptyset$ , alors  $q = n + 1$ ). Soit  $\mathfrak{S}$  une stratification de Whitney de  $A$  (cf. [Wh2] et [L-T2]) et soit  $\mathcal{L}$  un hyperplan projectif de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  transverse à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$  (nous convenons que si  $\mathcal{L}$  ne rencontre pas une certaine strate, il lui est transverse). Dans ces conditions, l'injection canonique  $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  induit:*

*des isomorphismes des groupes d'homologie singulière à coefficients entiers*

$$H_k(\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \quad \text{pour } k \leq n + q - 3,$$

et un homomorphisme surjectif

$$H_k(\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)) \rightarrow H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \quad \text{pour } k = n + q - 2.$$

Le choix de  $\mathcal{L}$  donné par cet énoncé est générique (cf. corollaire 10.18 ci-dessous).

Le théorème 1.1 pousse la comparaison des groupes d'homologie  $q - 1$  rangs plus loin que les meilleurs résultats connus, dus à Helmut A. Hamm et DŨng Tráng Lê ou Mark Goresky et Robert MacPherson (cf. [H-L2], [H-L4], [G-M1], [G-M2] et indications historiques ci-dessous). Il présente aussi l'avantage que le critère de générnicité pour  $\mathcal{L}$  est explicite en termes d'une stratification de Whitney de  $A$  (mais voir aussi, dans [H-L4], le lemme de l'appendice et, dans [G-M2], la remarque à la fin de la démonstration II.5.1); cette stratification peut d'ailleurs être choisie comme étant la stratification de Whitney canonique minimale introduite par Lê et Bernard Teissier (cf. [L-T1] 6.1) et dont Teissier a montré l'existence et même la possibilité théorique de la construire à partir d'équations de  $A$  (cf. [Te] VI.3). En revanche, la comparaison se limite ici aux groupes d'homologie alors que les énoncés de Hamm et Lê concernent les types d'homotopie et sont même des corollaires de résultats plus généraux sur les types topologiques. Notons toutefois que, dans le cas où notre théorème apporte quelque chose de nouveau par rapport au théorème 1.1.3 de [H-L2], c'est-à-dire dans le cas où  $q \geq 2$ , il a le corollaire homotopique suivant:

**COROLLAIRE 1.2.** *Les hypothèses et notations étant celles du théorème 1.1, supposons de plus que  $q \geq 2$ . Soit  $e$  un point base dans  $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$  (qui n'est pas vide). Alors l'injection canonique  $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  induit:*

*des bijections*

$$\pi_k(\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A), e) \xrightarrow{\sim} \pi_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A, e) \quad \text{pour } k \leq n + q - 3,$$

*et une surjection*

$$\pi_k(\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A), e) \rightarrow \pi_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A, e) \quad \text{pour } k = n + q - 2.$$

Le corollaire 1.2 sera aisément déduit du théorème 1.1 au §9 grâce au théorème de Whitehead. Comme le couple  $(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A, \mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A))$  est triangulable (cf. [Lo] et [Hi]), on pourrait même montrer que  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  a le type d'homotopie d'un espace obtenu en attachant à  $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$  des cellules de dimension  $\geq n + q - 1$  (à l'aide de [Sw] 6.13 et [tD-K-P] (7.39) et

(7.43)). Il serait malgré tout plus satisfaisant d'avoir une démonstration homotopique directe du théorème 1.1 dans le cas général. Nous dirons au § 12 pourquoi il y a bon espoir d'y parvenir (cf. (12.5)).

Avant de donner les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.1, voici quelques indications historiques sur le sujet:

Le livre de Lefschetz cité ci-dessus a représenté une contribution considérable à l'étude de la topologie des ensembles algébriques. Il contient bien d'autres résultats que celui que nous avons mentionné, notamment ceux qu'on nomme maintenant formules de Picard-Lefschetz, second théorème de Lefschetz et théorème de Lefschetz vache. Des théorèmes sur le groupe fondamental de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ , dans le cas où  $A$  est une hypersurface, ont peu après été donnés par Oscar Zariski et Egbert van Kampen dans [Za] et [VK] où ils ont énoncé deux résultats complémentaires. Le théorème de Zariski affirme que, pour  $n \geq 3$ , le groupe fondamental de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  est donné par celui d'une section hyperplane générique de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ . Le théorème de van Kampen donne une présentation par générateurs et relations du groupe fondamental de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  dans le cas où  $n = 2$ : les générateurs peuvent être pris dans une droite projective qui coupe  $A$  en un nombre fini de points égal à son degré, comme étant des lacets qui entourent une fois chacun des points d'intersection; pour avoir les relations autres que la relation évidente de trivialité du produit de ces générateurs, on considère un pinceau de droites projectives dont le sommet est situé hors de  $A$ : les relations sont alors données par les monodromies des générateurs autour des droites exceptionnelles du pinceau, à savoir celles qui sont tangentes à  $A$  ou passent par des points singuliers de  $A$ . Les démonstrations de Zariski et van Kampen, de même que celle de Lefschetz, sont incomplètes.

La première démonstration complète du théorème de Lefschetz cité ci-dessus remonte à Andrew H. Wallace et utilise la même méthode (cf. [Wa]); une version plus simple en a été donnée par Klaus Lamotke (cf. [La]). Dans l'intervalle, une approche différente a été suggérée par René Thom: la théorie de Morse. Elle a conduit à des démonstrations du théorème de Lefschetz par Raoul Bott dans [Bt] et Aldo Andreotti et Theodore Frankel dans [A-F1].

La première démonstration complète du théorème de Zariski a été donnée à l'aide de la théorie de Morse par Helmut A. Hamm et DŨng Tráng Lê qui ont su voir qu'il s'agissait d'un théorème du type de Lefschetz (cf. [H-L1]). Hamm et Lê y poussent d'ailleurs la comparaison des groupes d'homotopie jusqu'aux rangs  $n - 2$  et  $n - 1$  analoguement au théorème de Lefschetz. Signalons que leur démonstration passe par un résultat local plus fort.

Plus récemment, Marc Goresky et Robert MacPherson dans [G-M1] et [G-M2] d'un côté, Hamm et Lê dans [H-L2] de l'autre, ont unifié les théorèmes de Lefschetz et de Zariski en prouvant leur analogue pour une variété quasi-projective lisse, comme corollaire d'une conjecture de Pierre Deligne qu'ils ont démontrée (cf. [De] conjecture 1.3); leurs énoncés sont en termes de groupes d'homotopie ou de types d'homotopie. De plus, Hamm-Lê et Goresky-MacPherson ont donné, dans [H-L2], [G-M1] et [G-M2], des généralisations de ce théorème au cas d'une variété quasi-projective singulière qui fait intervenir soit sa profondeur homotopique rectifiée, notion introduite par Alexandre Grothendieck dans [Gr] Exp. XIII, § 6, soit le nombre d'équations nécessaires pour la définir localement; un lien entre ces deux points de vue est donné par la conjecture *B* de [Gr] Exp. XIII, § 6, démontrée par Hamm et Lê dans [H-L4]. Signalons enfin l'existence de versions locales des théorèmes du type de Lefschetz qui sont en fait plus fortes (cf. [H-L1], [H-L3], [H-L4], [G-M1] et [G-M2]). Tous ces articles utilisent la théorie de Morse, classique, à coins ou stratifiée.

Une démonstration complète du théorème de van Kampen cité ci-dessus a été donnée dans [Ch1]: elle est simultanée avec une démonstration du théorème de Zariski et reprend la méthode géométrique de Lefschetz, Zariski et van Kampen en la combinant avec les outils plus modernes que sont les stratifications de Whitney (cf. [Wh2]) et le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather (cf. [Th2] et [Ma]), ce qui permet d'aboutir à une preuve complète. Signalons qu'à la même époque A. N. Varchenko a aussi donné une démonstration du théorème de Zariski en construisant par récurrence les isotopies qui ne sont pas justifiées dans [Za] (cf. [Va]). Mais la démonstration de [Ch1] pour le théorème de Zariski est en fait valable pour  $A$  ensemble algébrique fermé quelconque de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , bien que cela n'y soit pas énoncé. Dans le présent article, nous poursuivrons donc dans l'esprit de [Ch1] pour démontrer le théorème 1.1.

Mais auparavant, signalons que cet article a pour précurseur [Ch2]. A l'époque, [Ch2] avait le mérite de généraliser le théorème de [H-L1] concernant le complémentaire d'une hypersurface projective  $A$  au cas où  $A$  est un ensemble algébrique fermé quelconque; mais cela était fait seulement en homologie avec, comme ici, un corollaire homotopique pour  $\text{codim } A \geq 2$ . Le résultat de [H-L1] étant valable en homotopie pour une hypersurface, [Ch2] croyait en déduire qu'il était valable pour  $A$  quelconque. C'était omettre le cas où  $A$  est composé d'une hypersurface et d'une autre composante de dimension inférieure, erreur que Deligne a signalée dans [De]. Depuis, la question a été réglée par le théorème sur les variétés quasi-projectives lisses dont nous avons

parlé. D'une manière générale, [Ch2] est d'une écriture aride due à ce que les faits géométriques n'y sont pas dégagés, ce qui lui fait d'ailleurs manquer l'amélioration de  $q - 1$  rangs que nous obtenons ici. Il comporte aussi quelques autres erreurs de détail que nous corrigerons à leur place. Nous renverrons néanmoins à [Ch2] pour la démonstration de la proposition 6.8 ci-dessous.

Je dois annoncer, pour finir, que Hamm, qui a eu en main la version préliminaire [Ch3] de ce travail, a trouvé une démonstration, à l'aide de la théorie de Morse stratifiée, d'une généralisation homotopique du théorème 1.1 (non encore publiée).

Voici maintenant les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.1:

Le théorème est trivial pour  $q = 0$  et nous écarterons désormais ce cas. Pour  $n = 1$ , on est alors forcément dans la situation où  $A$  est vide ou réduit à un nombre fini de points et on peut alors faire un calcul direct.

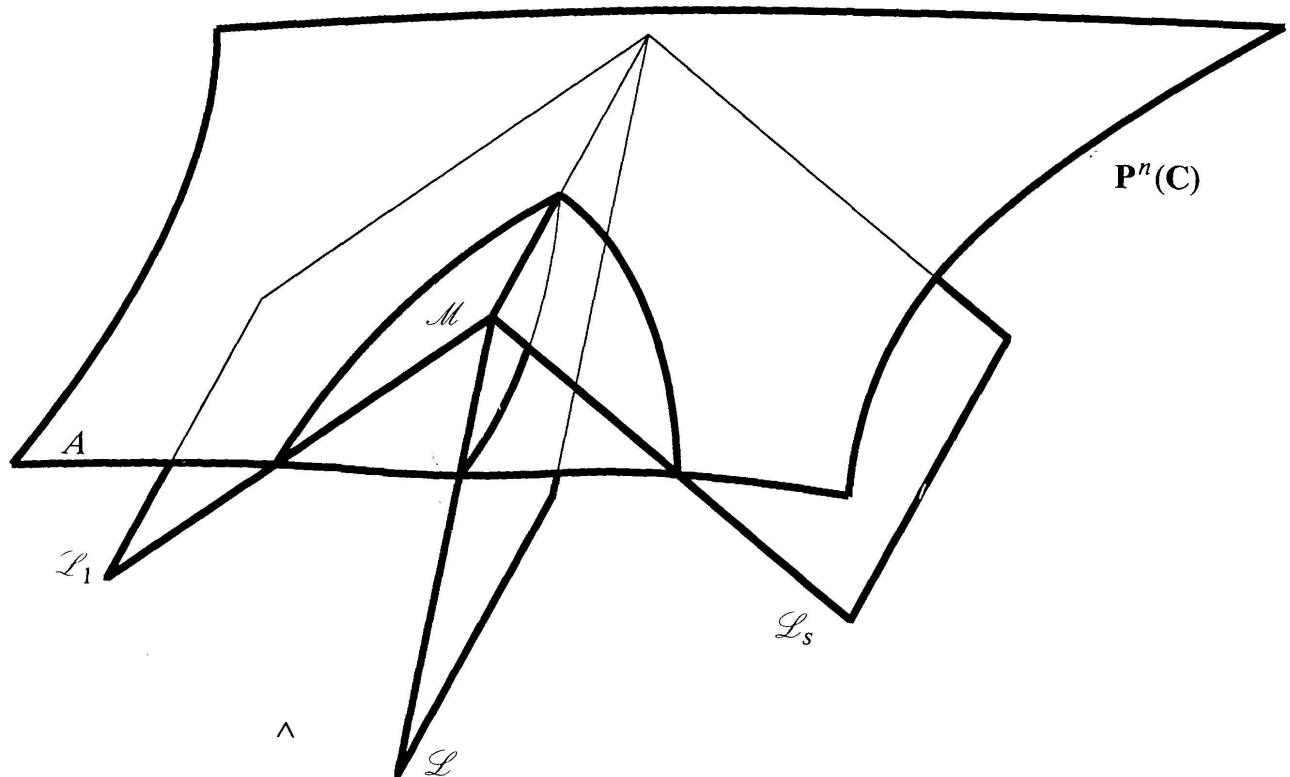


FIGURE 1.1

Pour  $n \geq 2$ , notre méthode de démonstration consiste, à la manière de Lefschetz, à intégrer  $\mathcal{L}$  dans un pinceau  $\wedge$  d'hyperplans dont l'axe  $\mathcal{M}$  soit un  $(n - 2)$ -plan projectif transverse dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$ . Pour avoir un tel  $\mathcal{M}$ , il suffit de le prendre dans  $\mathcal{L}$  transverse à toutes les strates de la trace de  $\mathfrak{S}$  sur  $\mathcal{L}$  qui est encore une stratification de Whitney; cela est

toujours possible pour des raisons de générnicité (cf. corollaire 10.18 ci-dessous). Pour les mêmes raisons, tous les hyperplans d'un tel pinceau sont transverses à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$  sauf un nombre fini d'entre eux:  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$  qui ne le sont pas et que nous qualifierons de «mauvais» (cf. corollaire 10.19). Les autres, ceux qui sont transverses à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$ , parmi lesquels il y a  $\mathcal{L}$ , seront qualifiés de «bons» (cf. fig. 1.1).

Dans ces conditions, lorsque  $\mathcal{L}$  se déplace dans le pinceau en évitant  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$ , on peut le déformer dans une «isotopie» qui respecte  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  et les strates de  $A$ , les choses qui sont dans l'axe du pinceau restant dans l'axe. Cela a été vu par Zariski (à la stratification près) mais il nous faudra mettre en œuvre au § 3, comme dans [Ch1], les stratifications de Whitney et le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather pour en donner une véritable démonstration. Ce premier point étant acquis, nous regardons aussi la section de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  par l'axe  $\mathcal{M}$  du pinceau de manière à avoir une récurrence sur la dimension. Car si l'on a des informations sur la comparaison entre  $\mathcal{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$  et  $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$  d'une part et entre  $\mathcal{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$  et les  $\mathcal{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$  d'autre part, on peut en déduire des informations sur la comparaison entre  $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$  et  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ . En effet, si par exemple on sait que certains cycles de  $\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$  et des  $\mathcal{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$  sont homologues à des cycles de  $\mathcal{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$ , alors les monodromies autour des hyperplans mauvais d'une part et les perturbations apportées par ces hyperplans mauvais eux-mêmes d'autre part peuvent être «poussées» dans l'axe où elles se trivialisent. C'est là l'idée principale sur laquelle repose ce travail. Nous préciserons ces assertions aux §§ 4 et 5 dans lesquels nous donnerons aussi une description informelle plus détaillée. L'idée de «pousser les choses dans l'axe» apparaît déjà à la fin de [Za] et joue un rôle clef dans [Ch1] pour l'étude du groupe fondamental de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ . Ce qu'il y a sans doute de nouveau ici, c'est l'importance envahissante que prend l'axe du pinceau.

La manière dont l'information se transmet d'une dimension à l'autre est précisée par le théorème suivant:

THÉORÈME 1.3. *Soit  $A$  un ensemble algébrique fermé de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , avec  $n \geq 2$ . Soit  $\mathfrak{S}$  une stratification de Whitney de  $A$  et soit  $\Lambda$  un pinceau d'hyperplans projectifs de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec pour axe un  $(n-2)$ -plan projectif  $\mathcal{M}$  transverse dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$  (ce choix de  $\mathcal{M}$  est générique: cf. corollaire 10.18 ci-dessous). Soient  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$  les «mauvais» éléments de  $\Lambda$ , en nombre fini, qui ne sont pas transverses à toutes les strates de  $\mathfrak{S}$  et soit  $\mathcal{L}$  un «bon» élément de  $\Lambda$  transverse*

à toutes les strates de  $\mathcal{S}$  (cf. fig. 1.1). Nous supposons que  $s \geq 2$ , quitte à considérer éventuellement comme «mauvais» des hyperplans qui en fait sont «bons». Si l'on considère alors les homomorphismes

$$\begin{aligned} m_k &: H_k(\mathcal{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)) \rightarrow H_k(\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)), \\ m_k^i &: H_k(\mathcal{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)) \rightarrow H_k(\mathcal{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s, \\ l_k &: H_k(\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)) \rightarrow H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \end{aligned}$$

induits entre groupes d'homologie singulière à coefficients entiers par les injections canoniques

$$\begin{aligned} m &: \mathcal{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \hookrightarrow \mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A), \\ m^i &: \mathcal{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \hookrightarrow \mathcal{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A), \end{aligned}$$

et

$$l : \mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A,$$

on a, en ce qui les concerne, les implications suivantes:

$$\begin{aligned} l_k \text{ est surjectif si } & \begin{cases} m_{k-1} \text{ est surjectif} \\ m_{k-2}^i \text{ est surjectif pour tout } i \\ m_{k-2} \text{ est injectif} \end{cases} \\ l_k \text{ est injectif si } & \begin{cases} m_k \text{ est surjectif} \\ m_{k-1}^i \text{ est surjectif pour tout } i \\ m_{k-1} \text{ est injectif} \\ \text{Ker } m_{k-2} \cap \text{Ker } m_{k-2}^1 \cap \dots \cap \text{Ker } m_{k-2}^s = \{0\} \end{cases} . \end{aligned}$$

Nous convenons que  $H_k(\cdot) = 0$  pour  $k < 0$ .

Ce théorème permettra une récurrence sur la dimension grâce à laquelle nous en déduirons le théorème 1.1 au §9. Mais le théorème 1.3 valait aussi en lui-même d'être énoncé pour deux raisons:

— d'une part, il est porteur d'une information plus fine que le théorème 1.1 puisque, pour avoir une conclusion en homologie de rang  $k$ , on ne fait d'hypothèses que sur les homologies de rang  $k$ ,  $k - 1$  et  $k - 2$ , avec une avance d'un cran pour la surjectivité;

— d'autre part il est susceptible d'être généralisé au cas où  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  est remplacé par une variété quasi-projective lisse quelconque et peut-être même

au cas avec singularités moyennant des hypothèses sur la nature de ces singularités (cf. §§11 et 12); à la différence de cela, le théorème 1.1 n'est valable que pour un espace ambiant particulier qui permette l'amorce de la récurrence par laquelle on le déduit du théorème 1.3 (cf. remarques 9.5 et 11.4 et voir (12.2)).

Nous n'avons pas supposé, dans l'énoncé du théorème 1.3, que l'axe du pinceau était pris dans un «bon» hyperplan  $\mathcal{L}$  car, sous l'hypothèse de transversalité de l'axe aux strates de  $\mathfrak{S}$ , l'existence d'un «bon»  $\mathcal{L}$  dans le pinceau est assurée par le théorème de Sard (cf. proposition 10.20 ci-dessous).

Par ailleurs, nulle part dans la démonstration du théorème 1.3 nous n'utiliserons le fait que les hyperplans «mauvais» soient vraiment mauvais et cela justifie la possibilité de considérer artificiellement comme «mauvais» des hyperplans «bons». Dans le cas exceptionnel où il n'y a qu'un hyperplan mauvais, la démonstration reste en fait valable avec  $s = 1$  mais se simplifie et conduit à un énoncé simplifié. Le cas où  $s = 0$  s'y ramène grâce à la remarque précédente et on n'a rien de mieux par un traitement direct. Nous laisserons au lecteur le soin de faire ces simplifications.

La démonstration du théorème 1.3 occupera les §§3 à 8. Au §2 nous donnons un plan de cette démonstration et fixons certaines notations valables au cours de celle-ci. Au §9, nous déduisons le théorème 1.1 du théorème 1.3 et nous démontrons le corollaire 1.2 du théorème 1.1. Nous avons regroupé au §10 les énoncés et les justifications de résultats de générnicité et même d'algébricité qui interviennent dans l'énoncé même de ces théorèmes et de place en place dans les démonstrations, notamment au §9. Au §11, nous donnons une généralisation du théorème 1.3 au cas où  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$  est remplacé par une variété quasi-projective lisse quelconque dans  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ ; nous montrons qu'elle permet de retrouver la version homologique du théorème de Lefschetz pour une variété quasi-projective lisse dont nous avons parlé. Enfin au §12, nous évoquons quelques autres directions de recherche; nous y annonçons en particulier une généralisation du second théorème de Lefschetz. Nous avons mis en annexe des indications sur les isomorphismes de Wang et de Leray que nous utilisons aux §§4 et 5.

Cet article est une version améliorée et condensée de ma thèse (cf. [Ch3]), à l'exception du théorème 11.1 qui est nouveau. Je tiens à adresser mes remerciements à DŨng Tráng Lê et Bernard Teissier pour leur aide, leurs critiques et leurs encouragements.