Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE ALGÉBRIQUE PROJECTIF

Autor: Chéniot, Denis

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58744

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 293-402

TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE ALGÉBRIQUE PROJECTIF

par Denis CHÉNIOT

1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DE THÉORÈME

Une méthode classique pour étudier la topologie d'un objet de géométrie algébrique est de considérer ses sections par un pinceau d'hyperplans. Elle est largement utilisée par Solomon Lefschetz dans son livre *L'analysis situs et la géométrie algébrique* (cf. [Lf]). Il aboutit ainsi notamment au théorème suivant: les groupes d'homologie d'un ensemble algébrique projectif complexe fermé et lisse de dimension pure d sont donnés jusqu'au rang $d-2$ par ceux d'une section hyperplane générique et au rang $d-1$ on en a ainsi tous les générateurs (cf. [Lf] V.3). On fait maintenant référence à ce genre de théorèmes sous le nom de théorèmes du type de Lefschetz.

Nous utilisons dans cet article la méthode de Lefschetz pour étudier le complémentaire $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ d'un ensemble algébrique fermé quelconque A dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Nous démontrons un nouveau théorème du type de Lefschetz dont voici l'énoncé:

THÉORÈME 1.1. *Soit A un ensemble algébrique fermé de codimension q dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geqslant 1$ (nous convenons que q est la plus petite des codimensions des composantes irréductibles de A; si $A = \varnothing$, alors $q = n+1$). Soit $\mathcal{S}$ une stratification de Whitney de A (cf.* [Wh2] *et* [L-T2]*) et soit $\mathscr{L}$ un hyperplan projectif de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ transverse à toutes les strates de $\mathcal{S}$ (nous convenons que si $\mathscr{L}$ ne rencontre pas une certaine strate, il lui est transverse). Dans ces conditions, l'injection canonique $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ induit:*

des isomorphismes des groupes d'homologie singulière à coefficients entiers

$$H_k(\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \quad \text{pour} \quad k \leqslant n+q-3\,,$$

et un homomorphisme surjectif

$$H_k(\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)) \twoheadrightarrow H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \quad \textit{pour} \quad k = n + q - 2 .$$

Le choix de $\mathscr{L}$ *donné par cet énoncé est générique (cf. corollaire 10.18 ci-dessous).*

Le théorème 1.1 pousse la comparaison des groupes d'homologie $q - 1$ rangs plus loin que les meilleurs résultats connus, dus à Helmut A. Hamm et Dũng Tráng Lê ou Mark Goresky et Robert MacPherson (cf. [H-L2], [H-L4], [G-M1], [G-M2] et indications historiques ci-dessous). Il présente aussi l'avantage que le critère de généricité pour $\mathscr{L}$ est explicite en termes d'une stratification de Whitney de A (mais voir aussi, dans [H-L4], le lemme de l'appendice et, dans [G-M2], la remarque à la fin de la démonstration II.5.1); cette stratification peut d'ailleurs être choisie comme étant la stratification de Whitney canonique minimale introduite par Lê et Bernard Teissier (cf. [L-T1] 6.1) et dont Teissier a montré l'existence et même la possibilité théorique de la construire à partir d'équations de A (cf. [Te] VI.3). En revanche, la comparaison se limite ici aux groupes d'homologie alors que les énoncés de Hamm et Lê concernent les types d'homotopie et sont même des corollaires de résultats plus généraux sur les types topologiques. Notons toutefois que, dans le cas où notre théorème apporte quelque chose de nouveau par rapport au théorème 1.1.3 de [H-L2], c'est-à-dire dans le cas où $q \geqslant 2$, il a le corollaire homotopique suivant:

COROLLAIRE 1.2. *Les hypothèses et notations étant celles du théorème 1.1, supposons de plus que* $q \geqslant 2$. *Soit* e *un point base dans* $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ *(qui n'est pas vide). Alors l'injection canonique* $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ *induit:*

des bijections

$$\pi_k(\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A), e) \xrightarrow{\sim} \pi_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A, e) \quad \textit{pour} \quad k \leqslant n + q - 3 ,$$

et une surjection

$$\pi_k(\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A), e) \twoheadrightarrow \pi_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A, e) \quad \textit{pour} \quad k = n + q - 2 .$$

Le corollaire 1.2 sera aisément déduit du théorème 1.1 au §9 grâce au théorème de Whitehead. Comme le couple $(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A, \mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A))$ est triangulable (cf. [Lo] et [Hi]), on pourrait même montrer que $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ a le type d'homotopie d'un espace obtenu en attachant à $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ des cellules de dimension $\geqslant n + q - 1$ (à l'aide de [Sw] 6.13 et [tD-K-P] (7.39) et

(7.43)). Il serait malgré tout plus satisfaisant d'avoir une démonstration homotopique directe du théorème 1.1 dans le cas général. Nous dirons au § 12 pourquoi il y a bon espoir d'y parvenir (cf. (12.5)).

Avant de donner les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.1, voici quelques indications historiques sur le sujet:

Le livre de Lefschetz cité ci-dessus a représenté une contribution considérable à l'étude de la topologie des ensembles algébriques. Il contient bien d'autres résultats que celui que nous avons mentionné, notamment ceux qu'on nomme maintenant formules de Picard-Lefschetz, second théorème de Lefschetz et théorème de Lefschetz vache. Des théorèmes sur le groupe fondamental de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$, dans le cas où A est une hypersurface, ont peu après été donnés par Oscar Zariski et Egbert van Kampen dans [Za] et [VK] où ils ont énoncé deux résultats complémentaires. Le théorème de Zariski affirme que, pour $n \geqslant 3$, le groupe fondamental de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ est donné par celui d'une section hyperplane générique de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$. Le théorème de van Kampen donne une présentation par générateurs et relations du groupe fondamental de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ dans le cas où $n = 2$: les générateurs peuvent être pris dans une droite projective qui coupe A en un nombre fini de points égal à son degré, comme étant des lacets qui entourent une fois chacun des points d'intersection; pour avoir les relations autres que la relation évidente de trivialité du produit de ces générateurs, on considère un pinceau de droites projectives dont le sommet est situé hors de A: les relations sont alors données par les monodromies des générateurs autour des droites exceptionnelles du pinceau, à savoir celles qui sont tangentes à A ou passent par des points singuliers de A. Les démonstrations de Zariski et van Kampen, de même que celle de Lefschetz, sont incomplètes.

La première démonstration complète du théorème de Lefschetz cité ci-dessus remonte à Andrew H. Wallace et utilise la même méthode (cf. [Wa]); une version plus simple en a été donnée par Klaus Lamotke (cf. [La]). Dans l'intervalle, une approche différente a été suggérée par René Thom: la théorie de Morse. Elle a conduit à des démonstrations du théorème de Lefschetz par Raoul Bott dans [Bt] et Aldo Andreotti et Theodore Frankel dans [A-F1].

La première démonstration complète du théorème de Zariski a été donnée à l'aide de la théorie de Morse par Helmut A. Hamm et Dũng Tráng Lê qui ont su voir qu'il s'agissait d'un théorème du type de Lefschetz (cf. [H-L1]). Hamm et Lê y poussent d'ailleurs la comparaison des groupes d'homotopie jusqu'aux rangs $n - 2$ et $n - 1$ analoguement au théorème de Lefschetz. Signalons que leur démonstration passe par un résultat local plus fort.

Plus récemment, Marc Goresky et Robert MacPherson dans [G-M1] et [G-M2] d'un côté, Hamm et Lê dans [H-L2] de l'autre, ont unifié les théorèmes de Lefschetz et de Zariski en prouvant leur analogue pour une variété quasi-projective lisse, comme corollaire d'une conjecture de Pierre Deligne qu'ils ont démontrée (cf. [De] conjecture 1.3); leurs énoncés sont en termes de groupes d'homotopie ou de types d'homotopie. De plus, Hamm-Lê et Goresky-MacPherson ont donné, dans [H-L2], [G-M1] et [G-M2], des généralisations de ce théorème au cas d'une variété quasi-projective singulière qui fait intervenir soit sa profondeur homotopique rectifiée, notion introduite par Alexandre Grothendieck dans [Gr] Exp. XIII, § 6, soit le nombre d'équations nécessaires pour la définir localement; un lien entre ces deux points de vue est donné par la conjecture *B* de [Gr] Exp. XIII, § 6, démontrée par Hamm et Lê dans [H-L4]. Signalons enfin l'existence de versions locales des théorèmes du type de Lefschetz qui sont en fait plus fortes (cf. [H-L1], [H-L3), [H-L4], [G-M1] et [G-M2]). Tous ces articles utilisent la théorie de Morse, classique, à coins ou stratifiée.

Une démonstration complète du théorème de van Kampen cité ci-dessus a été donnée dans [Ch1]: elle est simultanée avec une démonstration du théorème de Zariski et reprend la méthode géométrique de Lefschetz, Zariski et van Kampen en la combinant avec les outils plus modernes que sont les stratifications de Whitney (cf. [Wh2]) et le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather (cf. [Th2] et [Ma]), ce qui permet d'aboutir à une preuve complète. Signalons qu'à la même époque A. N. Varchenko a aussi donné une démonstration du théorème de Zariski en construisant par récurrence les isotopies qui ne sont pas justifiées dans [Za] (cf. [Va]). Mais la démonstration de [Ch1] pour le théorème de Zariski est en fait valable pour A ensemble algébrique fermé quelconque de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, bien que cela n'y soit pas énoncé. Dans le présent article, nous poursuivrons donc dans l'esprit de [Ch1] pour démontrer le théorème 1.1.

Mais auparavant, signalons que cet article a pour précurseur [Ch2]. A l'époque, [Ch2] avait le mérite de généraliser le théorème de [H-L1] concernant le complémentaire d'une hypersurface projective A au cas où A est un ensemble algébrique fermé quelconque; mais cela était fait seulement en homologie avec, comme ici, un corollaire homotopique pour $\operatorname{codim} A \geqslant 2$. Le résultat de [H-L1] étant valable en homotopie pour une hypersurface, [Ch2] croyait en déduire qu'il était valable pour A quelconque. C'était omettre le cas où A est composé d'une hypersurface et d'une autre composante de dimension inférieure, erreur que Deligne a signalée dans [De]. Depuis, la question a été réglée par le théorème sur les variétés quasi-projectives lisses dont nous avons

parlé. D'une manière générale, [Ch2] est d'une écriture aride due à ce que les faits géométriques n'y sont pas dégagés, ce qui lui fait d'ailleurs manquer l'amélioration de $q - 1$ rangs que nous obtenons ici. Il comporte aussi quelques autres erreurs de détail que nous corrigerons à leur place. Nous renverrons néanmoins à [Ch2] pour la démonstration de la proposition 6.8 ci-dessous.

Je dois annoncer, pour finir, que Hamm, qui a eu en main la version préliminaire [Ch3] de ce travail, a trouvé une démonstration, à l'aide de la théorie de Morse stratifiée, d'une généralisation homotopique du théorème 1.1 (non encore publiée).

Voici maintenant les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.1:

Le théorème est trivial pour $q = 0$ et nous écarterons désormais ce cas. Pour $n = 1$, on est alors forcément dans la situation où A est vide ou réduit à un nombre fini de points et on peut alors faire un calcul direct.

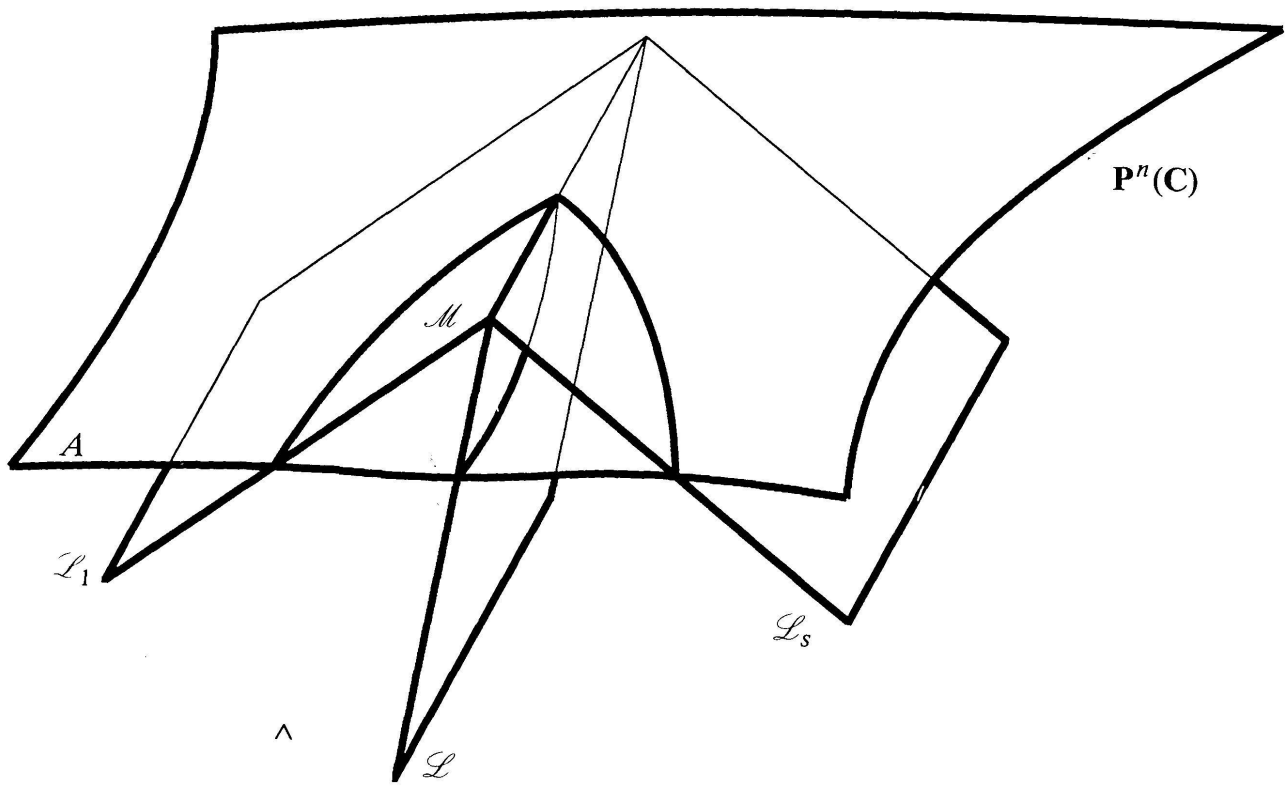


FIGURE 1.1

Pour $n \geqslant 2$, notre méthode de démonstration consiste, à la manière de Lefschetz, à intégrer $\mathscr{L}$ dans un pinceau $\wedge$ d'hyperplans dont l'axe $\mathscr{M}$ soit un $(n-2)$-plan projectif transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}$. Pour avoir un tel $\mathscr{M}$, il suffit de le prendre dans $\mathscr{L}$ transverse à toutes les strates de la trace de $\mathfrak{S}$ sur $\mathscr{L}$ qui est encore une stratification de Whitney; cela est

toujours possible pour des raisons de généricité (cf. corollaire 10.18 ci-dessous). Pour les mêmes raisons, tous les hyperplans d'un tel pinceau sont transverses à toutes les strates de $\mathcal{S}$ sauf un nombre fini d'entre eux: $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$ qui ne le sont pas et que nous qualifierons de «mauvais» (cf. corollaire 10.19). Les autres, ceux qui sont transverses à toutes les strates de $\mathcal{S}$, parmi lesquels il y a $\mathscr{L}$, seront qualifiés de «bons» (cf. fig. 1.1).

Dans ces conditions, lorsque $\mathscr{L}$ se déplace dans le pinceau en évitant $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$, on peut le déformer dans une «isotopie» qui respecte $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ et les strates de A, les choses qui sont dans l'axe du pinceau restant dans l'axe. Cela a été vu par Zariski (à la stratification près) mais il nous faudra mettre en œuvre au § 3, comme dans [Ch1], les stratifications de Whitney et le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather pour en donner une véritable démonstration. Ce premier point étant acquis, nous regardons aussi la section de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ par l'axe $\mathscr{M}$ du pinceau de manière à avoir une récurrence sur la dimension. Car si l'on a des informations sur la comparaison entre $\mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ et $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ d'une part et entre $\mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ et les $\mathscr{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ d'autre part, on peut en déduire des informations sur la comparaison entre $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ et $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$. En effet, si par exemple on sait que certains cycles de $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ et des $\mathscr{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ sont homologues à des cycles de $\mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$, alors les monodromies autour des hyperplans mauvais d'une part et les perturbations apportées par ces hyperplans mauvais eux-mêmes d'autre part peuvent être «poussées» dans l'axe où elles se trivialisent. C'est là l'idée principale sur laquelle repose ce travail. Nous préciserons ces assertions aux §§ 4 et 5 dans lesquels nous donnerons aussi une description informelle plus détaillée. L'idée de «pousser les choses dans l'axe» apparaît déjà à la fin de [Za] et joue un rôle clef dans [Ch1] pour l'étude du groupe fondamental de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$. Ce qu'il y a sans doute de nouveau ici, c'est l'importance envahissante que prend l'axe du pinceau.

La manière dont l'information se transmet d'une dimension à l'autre est précisée par le théorème suivant:

THÉORÈME 1.3. *Soit A un ensemble algébrique fermé de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{S}$ une stratification de Whitney de A et soit $\wedge$ un pinceau d'hyperplans projectifs de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec pour axe un $(n-2)$-plan projectif $\mathscr{M}$ transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathcal{S}$ (ce choix de $\mathscr{M}$ est générique: cf. corollaire 10.18 ci-dessous). Soient $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$ les «mauvais» éléments de $\wedge$, en nombre fini, qui ne sont pas transverses à toutes les strates de $\mathcal{S}$ et soit $\mathscr{L}$ un «bon» élément de $\wedge$ transverse*

à toutes les strates de $\mathcal{S}$ *(cf. fig. 1.1). Nous supposons que* $s \geqslant 2$, *quitte à considérer éventuellement comme «mauvais» des hyperplans qui en fait sont «bons». Si l'on considère alors les homomorphismes*

$$\begin{aligned} m_k &: H_k(\mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)) \to H_k(\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)), \\ m_k^i &: H_k(\mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)) \to H_k(\mathscr{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \\ l_k &: H_k(\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)) \to H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \end{aligned}$$

induits entre groupes d'homologie singulière à coefficients entiers par les injections canoniques

$$\begin{aligned} m &: \mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \hookrightarrow \mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A), \\ m^i &: \mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \hookrightarrow \mathscr{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A), \end{aligned}$$

et

$$l : \mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A,$$

on a, en ce qui les concerne, les implications suivantes:

$$l_k \text{ est surjectif si } \begin{cases} m_{k-1} & \text{est surjectif} \\ m_{k-2}^i & \text{est surjectif pour tout } i \\ m_{k-2} & \text{est injectif} \end{cases}$$

$$l_k \text{ est injectif si } \begin{cases} m_k & \text{est surjectif} \\ m_{k-1}^i & \text{est surjectif pour tout } i \\ m_{k-1} & \text{est injectif} \\ \operatorname{Ker} m_{k-2} \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^1 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^s = \{0\}. \end{cases}$$

Nous convenons que $H_k(\,.\,) = 0$ *pour* $k < 0$.

Ce théorème permettra une récurrence sur la dimension grâce à laquelle nous en déduirons le théorème 1.1 au §9. Mais le théorème 1.3 valait aussi en lui-même d'être énoncé pour deux raisons:

— d'une part, il est porteur d'une information plus fine que le théorème 1.1 puisque, pour avoir une conclusion en homologie de rang k, on ne fait d'hypothèses que sur les homologies de rang k, $k-1$ et $k-2$, avec une avance d'un cran pour la surjectivité;

— d'autre part il est susceptible d'être généralisé au cas où $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ est remplacé par une variété quasi-projective lisse quelconque et peut-être même

au cas avec singularités moyennant des hypothèses sur la nature de ces singularités (cf. §§11 et 12); à la différence de cela, le théorème 1.1 n'est valable que pour un espace ambiant particulier qui permette l'amorce de la récurrence par laquelle on le déduit du théorème 1.3 (cf. remarques 9.5 et 11.4 et voir (12.2)).

Nous n'avons pas supposé, dans l'énoncé du théorème 1.3, que l'axe du pinceau était pris dans un «bon» hyperplan $\mathscr{L}$ car, sous l'hypothèse de transversalité de l'axe aux strates de $\mathfrak{S}$, l'existence d'un «bon» $\mathscr{L}$ dans le pinceau est assurée par le théorème de Sard (cf. proposition 10.20 ci-dessous).

Par ailleurs, nulle part dans la démonstration du théorème 1.3 nous n'utiliserons le fait que les hyperplans «mauvais» soient vraiment mauvais et cela justifie la possibilité de considérer artificiellement comme «mauvais» des hyperplans «bons». Dans le cas exceptionnel où il n'y a qu'un hyperplan mauvais, la démonstration reste en fait valable avec $s = 1$ mais se simplifie et conduit à un énoncé simplifié. Le cas où $s = 0$ s'y ramène grâce à la remarque précédente et on n'a rien de mieux par un traitement direct. Nous laisserons au lecteur le soin de faire ces simplifications.

La démonstration du théorème 1.3 occupera les §§3 à 8. Au §2 nous donnons un plan de cette démonstration et fixons certaines notations valables au cours de celle-ci. Au §9, nous déduisons le théorème 1.1 du théorème 1.3 et nous démontrons le corollaire 1.2 du théorème 1.1. Nous avons regroupé au §10 les énoncés et les justifications de résultats de généricité et même d'algébricité qui interviennent dans l'énoncé même de ces théorèmes et de place en place dans les démonstrations, notamment au §9. Au §11, nous donnons une généralisation du théorème 1.3 au cas où $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ est remplacé par une variété quasi-projective lisse quelconque dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$; nous montrons qu'elle permet de retrouver la version homologique du théorème de Lefschetz pour une variété quasi-projective lisse dont nous avons parlé. Enfin au §12, nous évoquons quelques autres directions de recherche; nous y annonçons en particulier une généralisation du second théorème de Lefschetz. Nous avons mis en annexe des indications sur les isomorphismes de Wang et de Leray que nous utilisons aux §§4 et 5.

Cet article est une version améliorée et condensée de ma thèse (cf. [Ch3]), à l'exception du théorème 11.1 qui est nouveau. Je tiens à adresser mes remerciements à Dũng Tráng Lê et Bernard Teissier pour leur aide, leurs critiques et leurs encouragements.

2. Plan de démonstration du théorème 1.3 et notations

Cette démonstration, qui est la partie la plus importante de l'article, occupe les §§3 à 8. Nous nous y placerons hors du cas trivial où $A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.

Au §3, nous rendons compte comme suit de l'«isotopie» dont il est question dans l'introduction (cette construction est déjà faite dans [Ch1] et nous y renverrons pour plusieurs démonstrations): Nous faisons éclater $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de l'axe $\mathscr{M}$ de façon à répéter celui-ci autant de fois qu'il y a d'éléments dans le pinceau Λ (cf. fig. 3.1). Nous construisons ensuite une stratification de Whitney $\tilde{\mathfrak{S}}$ de l'éclaté $\tilde{\mathbf{P}}^n$ avec les propriétés suivantes: le complémentaire $\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}$ de la transformée totale $\tilde{A}$ de A est une strate de $\tilde{\mathfrak{S}}$ et la transformée totale de toute strate de $\mathfrak{S}$ est union de strates de $\tilde{\mathfrak{S}}$; la transformée totale $\tilde{\mathscr{M}}$ de l'axe $\mathscr{M}$ est aussi union de strates de $\tilde{\mathfrak{S}}$; les transformées strictes de tous les éléments de Λ sont transverses dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ à toutes les strates de $\tilde{\mathfrak{S}}$ à l'exception des transformées strictes $\mathscr{L}_1^{\#}, \ldots, \mathscr{L}_s^{\#}$ des hyperplans «mauvais». La possibilité de cette construction est donnée par la transversalité de $\mathscr{M}$ aux strates de $\mathfrak{S}$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Le *premier théorème d'isotopie de Thom-Mather* (cf. [Th2] et [Ma]) nous permet alors de conclure que si l'on ôte $\mathscr{L}_1^{\#}, \ldots, \mathscr{L}_s^{\#}$ à $\tilde{\mathbf{P}}^n$, on obtient un fibré localement trivial topologique $\tilde{\mathbf{P}}^n_*$ respectant $\tilde{\mathfrak{S}}$, dont la base $\mathbf{P}^1_* = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \backslash \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ représente les directions des «bons» hyperplans de Λ, et dont la fibre type est la transformée stricte $\mathscr{L}^{\#}$ de $\mathscr{L}$ stratifiée par la trace de $\tilde{\mathfrak{S}}$; cette fibre est isomorphe à $\mathscr{L}$ stratifié par un raffinement de la trace de $\mathfrak{S}$. Cela donne un sens précis à l'assertion d'«isotopie» de l'introduction.

Dans la suite de la démonstration, nous utilisons seulement une forme appauvrie de ce résultat, ne concernant que le complémentaire de $\tilde{A}$, à savoir que

$$\tilde{P}_* = (\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}) \backslash (\mathscr{L}_1^{\#} \cup \ldots \cup \mathscr{L}_s^{\#})$$

et

$$\tilde{M}_* = \tilde{\mathscr{M}} \cap ((\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}) \backslash (\mathscr{L}_1^{\#} \cup \ldots \cup \mathscr{L}_s^{\#}))$$

sont des fibrés localement triviaux topologiques sur la même base $\mathbf{P}^1_*$ avec pour fibres types respectives

$$L^{\#} = \mathscr{L}^{\#} \cap (\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}) \quad \text{et} \quad M^{\#} = \tilde{\mathscr{M}} \cap (\mathscr{L}^{\#} \cap (\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}))\ ;$$

celles-ci sont respectivement homéomorphes à $L = \mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$ et $M = \mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$, sections considérées dans l'énoncé du théorème 1.3 (cf. fig. 3.2).

Mais aussi, d'après la fibration stratifiée dont nous sommes partis, $\tilde{M}_*$ est un *sous-fibré* de $\tilde{P}_*$, c'est-à-dire qu'il existe des trivialisations locales

de $\tilde{P}_*$ donnant par restriction des trivialisations locales de $\tilde{M}_*$. D'autre part, le sous-fibré $\tilde{M}_*$ a la forme triviale $M \times \mathbf{P}^1_*$, première manifestation de trivialité due à la structure de produit $\tilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la transformée totale de l'axe du pinceau $\wedge$.

A partir du §4 nous nous limitons à une étude homologique.

Au §4, nous étudions l'homologie du couple de fibrés $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$. Leur base se rétractant par déformation sur un bouquet de $s-1$ cercles, nous nous ramenons à des fibrés sur un cercle. Pour ceux-ci, on dispose de l'*isomorphisme de Wang* (cf. [Wg]) qui caractérise les k-cycles relatifs de l'espace total modulo la fibre comme étant à homologie près «décrits» par les $(k-1)$-cycles de la fibre au cours d'une monodromie (cf. fig. 4.1). Nous obtenons ainsi une expression de $H_k(\tilde{P}_*, L^\#)$ à l'aide de $H_{k-1}(L^\#)$, donc de $H_{k-1}(L)$, et des monodromies autour des transformées strictes des hyperplans mauvais.

L'isomorphisme de Wang se comportant naturellement par rapport aux sous-fibrés, cette expression de $H_k(\tilde{P}_*, L^\#)$ se comporte naturellement par rapport à l'expression analogue pour $H_k(\tilde{M}_*, M^\#)$. D'autre part, les monodromies pour le fibré trivial $\tilde{M}_*$ étant triviales, on est ramené dans ce dernier cas à des produits-croix par des générateurs de $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ et l'expression pour $H_k(\tilde{M}_*, M^\#)$ se réduit à la formule de Künneth pour un couple de produits. Signalons que notre expression pour $H_k(\tilde{P}_*, L^\#)$ dépend du bouquet de cercles sur lequel on rétracte $\mathbf{P}^1_*$ (contrairement à celle pour $H_k(\tilde{M}_*, M^\#)$).

En utilisant alors la suite exacte d'homologie relative, nous obtenons des suites exactes pour les fibrés $\tilde{P}_*$ et $\tilde{M}_*$ reliant l'homologie de leur espace total aux homologies de leur fibre et de leur base. Ces deux suites sont réunies en un diagramme commutatif par les homomorphismes naturels et la suite exacte pour $\tilde{M}_*$ n'est qu'une version de la formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1_*$.

Au §5, nous étudions l'incidence en homologie de la réintroduction des transformées strictes $\mathscr{L}_1^\#, \ldots, \mathscr{L}_s^\#$ des hyperplans mauvais. Nous nous limitons au complémentaire de $\tilde{A}$ donc au passage de $\tilde{P}_*$ à $\tilde{P} = \tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}$ et de $\tilde{M}_*$ à $\tilde{M} = \tilde{\mathscr{M}} \cap (\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A})$. On passe de $\tilde{P}_*$ à $\tilde{P}$ en rajoutant les ensembles $L_i^\# = \mathscr{L}_i^\# \cap \tilde{P}$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$ qui sont isomorphes aux $L_i = \mathscr{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$, autres sections considérées dans l'énoncé du théorème 1.3 (cf. fig. 3.2). On passe de $\tilde{M}_*$ à $\tilde{M}$ en rajoutant, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, les ensembles $M_i^\# = \tilde{\mathscr{M}} \cap L_i^\#$ qui sont tous isomorphes à la section $M = \mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$. Nous cherchons à caractériser $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ à partir de cela.

Par excisions, nous nous ramenons à la réintroduction d'une seule transformée stricte d'hyperplan mauvais, c'est-à-dire à l'étude des $H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_*)$ avec $\tilde{P}_i = \tilde{P}_* \cup L_i^\#$ et $\tilde{M}_i = \tilde{M}_* \cup M_i^\#$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$. Ces couples sont de la forme $(\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \backslash L_i^\#)$ et $(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^\#)$, où $\tilde{P}_i$ et $\tilde{M}_i$ sont des variétés analytiques complexes séparées paracompactes et $L_i^\#$ et $M_i^\#$ sont des sous-variétés fermées respectives de codimension complexe pure 1. Dans ces conditions on dispose de l'*isomorphisme de Leray* (cf. [Lr]) selon lequel les k-cycles de $\tilde{P}_i$ sont obtenus à homologie près en «faisant épaissir» les $(k-2)$-cycles de $L_i^\#$ de manière cohérente avec les orientations canoniques (cf. fig. 5.1); de même pour $\tilde{M}_i$ et $M_i^\#$. Nous obtenons ainsi que $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ est isomorphe à la somme directe des $H_{k-2}(L_i^\#)$ donc des $H_{k-2}(L_i)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ à la somme directe des $H_{k-2}(M_i^\#)$ donc à la puissance s-ième de $H_{k-2}(M)$.

Mais $\tilde{M}_i$ est une sous-variété fermée de $\tilde{P}_i$ transverse à $L_i^\#$ et la trace de $L_i^\#$ sur $\tilde{M}_i$ est $M_i^\#$. L'isomorphisme de Leray se comportant naturellement dans ces conditions, les isomorphismes pour $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ commutent aux homomorphismes naturels. D'autre part, le couple $(\tilde{M}_i, M_i^\#)$ ayant la forme triviale $(M \times \mathbf{P}_i^1, M \times \{\lambda_i\})$ avec $\mathbf{P}_i^1 = \mathbf{P}_*^1 \cup \{\lambda_i\}$, l'«épaississement» d'un $(k-2)$-cycle de $M_i^\#$ peut se faire trivialement comme un produit-croix par un 2-cycle relatif de $\mathbf{P}_i^1$ modulo $\mathbf{P}_*^1$ entourant λ_i. L'isomorphisme pour $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ se réduit alors à la formule de Künneth pour le couple de produits $(M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), M \times \mathbf{P}_*^1)$.

Utilisant alors la suite exacte d'homologie relative, nous obtenons deux suites exactes reliant l'une l'homologie de $\tilde{P}$ à celles de $\tilde{P}_*$ et des L_i, l'autre l'homologie de $\tilde{M}$ à celles de $\tilde{M}_*$ et de M. Ces deux suites sont réunies en un diagramme commutatif par les homomorphismes naturels et les homomorphismes intervenant dans la suite exacte pour $\tilde{M}$ peuvent être exprimés à l'aide de produits-croix.

Au §6, nous examinons le retour de l'éclaté $\tilde{\mathbf{P}}^n$ à l'espace initial $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ au moyen du morphisme d'éclatement. Nous nous limitons là aussi à une étude homologique de ce qui se passe en dehors de $\tilde{A}$ et A. Avec les notations ci-dessus (cf. aussi fig. 3.2), nous avons déjà vu que $L^\#, L_1^\#, \ldots, L_s^\#$ sont respectivement isomorphes à $L, L_1, \ldots, L_s$, et que $M^\#, M_1^\#, \ldots, M_s^\#$ sont tous isomorphes à M, informations qui ont été intégrées dans les résultats des deux paragraphes précédents. Il reste à étudier le passage de $\tilde{P}$ à $P = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A$ et de $\tilde{M}$ à M. Mais $\tilde{P} \backslash \tilde{M}$ est isomorphe à $P \backslash M$ et le passage de $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ à M relève de la formule de Künneth. Nous énonçons qu'en fait il ne se passe rien de plus dans le passage de $\tilde{P}$ à P: tout k-cycle de P est

homologue à un cycle qui peut être «relevé» en un k-cycle de $\tilde{P}$ et les seuls k-cycles de $\tilde{P}$ qui se «dégonflent» dans la descente à P sont ceux qui sont homologues dans $\tilde{P}$ au produit-croix d'un $(k-2)$-cycle quelconque de M avec un 2-cycle fondamental de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (cf. fig. 6.1). Nous renvoyons à [Ch2] pour la démonstration de ce résultat.

Nous obtenons ainsi deux suites exactes courtes scindées reliant, l'une, $H_k(\tilde{P})$ à $H_k(P)$ et $H_{k-2}(M)$ et l'autre, $H_k(\tilde{M})$ à $H_k(M)$ et $H_{k-2}(M)$. Ces deux suites sont réunies en un diagramme commutatif par les homomorphismes naturels et la suite exacte pour $\tilde{M}$ n'est qu'une version de la formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Les §§3 à 6 posent le cadre géométrique général permettant de démontrer le théorème 1.3. Avec les notations ci-dessus (cf. aussi fig. 3.2), ils permettent en effet de comparer successivement l'homologie de $L = \mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$ à celle de $\tilde{P}_*$, celle de $\tilde{P}_*$ à celle de $\tilde{P}$, et celle de $\tilde{P}$ à celle de $P = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A$; ils le font en connexion naturelle avec les comparaisons analogues pour $M = \mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$, $\tilde{M}_*$, $\tilde{M}$ et à nouveau M qui, elles, ont lieu trivialement en raison de la structure de produit de $\mathscr{M}$. C'est la naturalité et la trivialité, à chaque étape, de ce qui se passe dans la transformée totale de l'axe qui nous permettra de «trivialiser» tout ce qui peut être «poussé» dans l'axe. Notons que ce cadre pourrait aussi servir à aborder d'autres problèmes que ceux visés par le théorème 1.3 (par exemple un «second théorème de Lefschetz»: cf. (12.3)). Nous n'utilisons d'ailleurs jusque-là aucune des hypothèses sur la comparaison entre l'homologie de M et celles de L et des L_i qui sont formulées au moment de la conclusion du théorème 1.3.

Au §7, utilisant le chemin que nous avons indiqué, nous introduisons progressivement et le plus économiquement possible de telles hypothèses de manière à pouvoir aboutir à la conclusion de surjectivité du théorème 1.3.

Au §8, nous faisons le même travail en vue de la conclusion d'injectivité du théorème.

Nous avons renvoyé en annexe des indications sommaires mais toutefois longues sur la manière dont on peut établir les isomorphismes de Wang et de Leray dont nous nous servons aux §§4 et 5 et aussi justifier leurs propriétés de naturalité et de réduction à un produit-croix dans le cas trivial.

Les notations utilisées dans les §§3 à 8 pour la démonstration du théorème 1.3 et dont l'esquisse qui précède montre qu'elles sont indispensables pour alléger l'écriture, sont malheureusement nombreuses. Mais on les trouve, pour l'essentiel, définies de manière groupée de (3.1) à (3.8), de (3.15) à (3.19) et de (3.23) à (3.28) d'une part, et dans les propositions terminales des §§4,

5 et 6 d'autre part. On peut aussi en avoir une vue d'ensemble rapide grâce à la figure 3.2. D'autres notations, utiles seulement pour les besoins d'un paragraphe sont introduites au cours de ceux-ci.

Nous utiliserons, pour la durée de la démonstration du théorème 1.3 au long des §§3 à 8, la convention d'écriture suivante:

(2.1) L'apposition d'un indice k à une lettre latine désignant une application continue signifiera qu'on considère l'homomorphisme induit par cette application entre les groupes d'homologie singulière à coefficients entiers de rang k.

Les notations de l'énoncé du théorème 1.3 sont déjà cohérentes avec cette convention; par exemple, l'homomorphisme induit en homologie de rang k par l'injection canonique $l: \mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ y est noté $l_k: H_k(\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)) \to H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$.

Pour faire place aux indices inférieurs utilisés dans le cadre de la convention (2.1), nous avons dû parfois mettre en position supérieure d'autres indices qu'il aurait été autrement plus naturel de mettre en position inférieure. C'est par exemple le cas de l'indice i dans les homomorphismes m_k^i du théorème 1.3.

Pour éviter toute confusion, nous utiliserons des lettres indexées *grecques* pour désigner des homomorphismes entre groupes d'homologie qui ne sont pas induits par une application. Ce sera par exemple le cas pour certains homomorphismes bord et pour les homomorphismes notés $\bar{\nu}_k$ et τ_k aux paragraphes 4 et 5 qui désigneront des isomorphismes dérivés de ceux de Wang et de Leray.

Tous les groupes d'homologie considérés dans cet article sont des groupes d'homologie singulière à coefficients entiers. Les seules topologies considérées sont les topologies ordinaires.

3. Eclatement stratifié et fibration hors des hyperplans mauvais

Dans ce paragraphe, nous précisons et justifions l'assertion d'«isotopie» de l'introduction. On pense évidemment à une fibration localement triviale stratifiée dont les bons hyperplans du pinceau seraient les fibres. Mais on veut donc enlever $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$ tout en conservant l'axe $\mathscr{M}$ dans chaque fibre: un moyen d'y parvenir est de «répéter» $\mathscr{M}$ autant de fois qu'il y a de directions d'hyperplan dans le pinceau Λ. Cela est précisément réalisé par un éclatement de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de $\mathscr{M}$. Cette idée apparaît déjà sous une autre forme dans [Wa]; on la trouve ensuite sous la forme présente dans [A-F2] et elle est reprise

de manière stratifiée dans [Ch1] que nous suivrons et auquel nous renverrons pour plusieurs démonstrations.

Nous construisons un éclaté $\tilde{\mathbf{P}}^n$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de $\mathscr{M}$ de la manière suivante: Soit Δ une droite projective de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ ne rencontrant pas $\mathscr{M}$. Nous considérons la projection de centre $\mathscr{M}$ sur Δ qui à tout point $x \notin \mathscr{M}$ associe l'unique point d'intersection avec Δ de l'hyperplan projectif déterminé par $\mathscr{M}$ et x. En composant avec un isomorphisme projectif de Δ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on obtient une «projection»

$$\mathrm{p}: \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \mathscr{M} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \,. \tag{3.1}$$

C'est une application analytique submersive. Si $\mathscr{K}$ est un élément du pinceau $\wedge$ d'axe $\mathscr{M}$, l'image par p de $\mathscr{K} \setminus \mathscr{M}$ est réduite à un seul point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui représente la direction de $\mathscr{K}$. Pour tout $\kappa \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, notons $\mathscr{K}(\kappa)$ l'unique élément de $\wedge$ tel que $\mathrm{p}(\mathscr{K}(\kappa) \setminus \mathscr{M}) = \{\kappa\}$. Nous définissons alors:

$$\tilde{\mathbf{P}}^n = \{(x, \kappa) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \,|\, x \in \mathscr{K}(\kappa)\} \,. \tag{3.2}$$

C'est une sous-variété analytique compacte pure de dimension n de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (cf. [Ch1] 2.1). Nous définissons aussi sur $\tilde{\mathbf{P}}^n$ le *morphisme d'éclatement*

$$\mathrm{f}: \tilde{\mathbf{P}}^n \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \,, \tag{3.3}$$

et la *projection*

$$\tilde{\mathrm{p}}: \tilde{\mathbf{P}}^n \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \,, \tag{3.4}$$

comme étant les restrictions à $\tilde{\mathbf{P}}^n$ des première et seconde projections de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ respectivement. Ainsi donc, dans cette construction, la direction de chaque hyperplan de $\wedge$ est repérée par un point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est composé des points de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ accompagnés de la direction sous laquelle ils sont vus depuis $\mathscr{M}$, étant entendu que les points de $\mathscr{M}$ sont vus dans toutes les directions; le morphisme f consiste à oublier cette direction et le morphisme $\tilde{\mathrm{p}}$ à la désigner.

Dans cet éclatement, $\mathscr{M}$ est donc remplacé par sa *transformée totale*

$$\tilde{\mathscr{M}} = \mathrm{f}^{-1}(\mathscr{M}) = \mathscr{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \,. \tag{3.5}$$

C'est une sous-variété fermée de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ donc de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ et ses structures comme sous-variété et comme variété produit coïncident. Cette structure de produit jouera, répétons-le, un rôle trivialisant essentiel pour tout ce qui pourra être «poussé dans l'axe». Les restrictions de f et $\tilde{\mathrm{p}}$ à $\tilde{\mathscr{M}}$ coïncident

avec la première et la deuxième projection. Par ailleurs, l'éclatement ne change rien en dehors de $\mathscr{M}$ car f induit un isomorphisme analytique

$$\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathscr{M}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \mathscr{M} . \tag{3.6}$$

La restriction de $\tilde{\mathrm{p}}$ à $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathscr{M}}$ coïncide à cet isomorphisme près avec p.

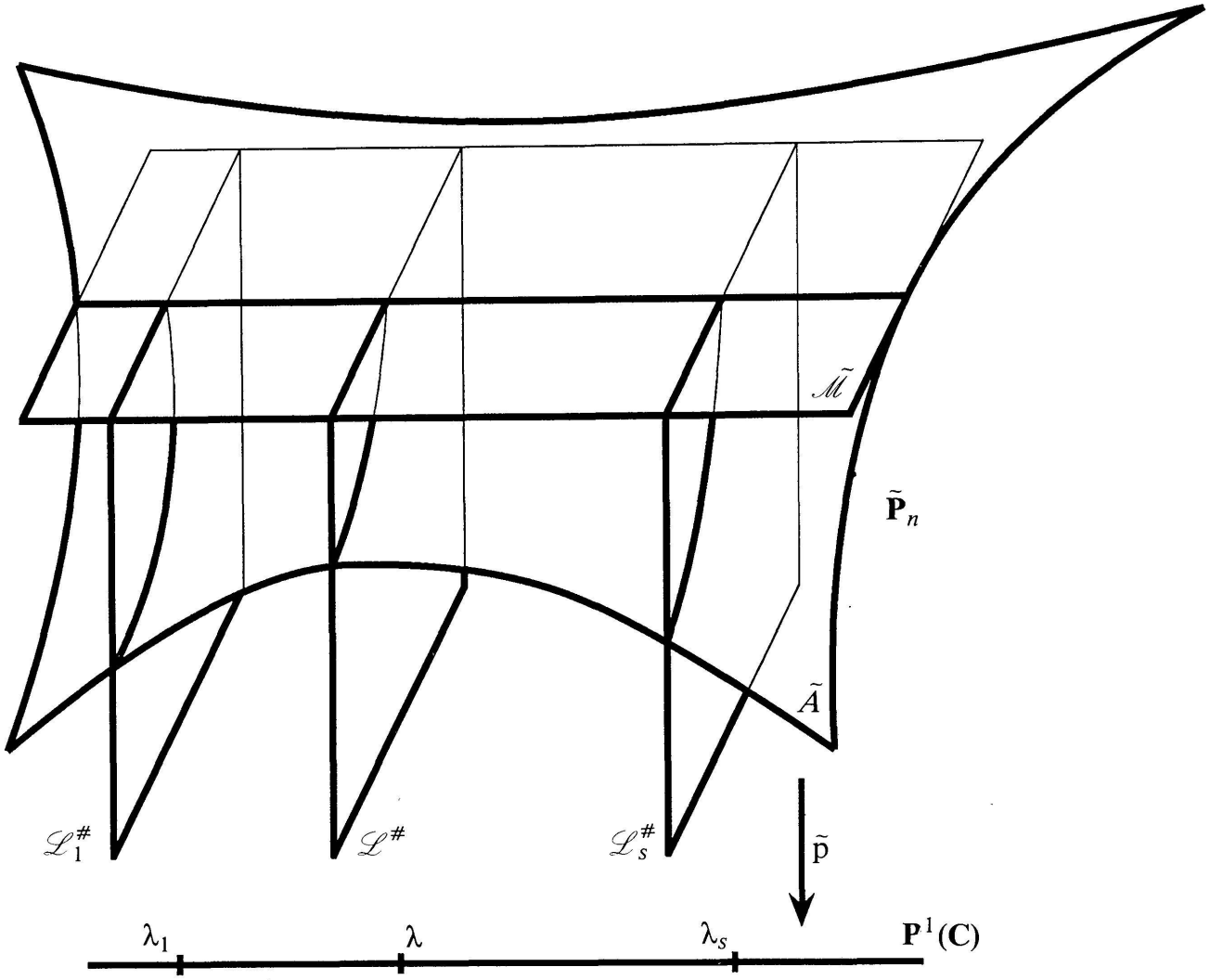


FIGURE 3.1

Pour toute partie E de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, nous considérons, de même que pour $\mathscr{M}$, sa *transformée totale* dans l'éclatement

$$\tilde{E} = \mathrm{f}^{-1}(E) \tag{3.7}$$

et particulièrement la transformée totale $\tilde{A}$ de l'ensemble algébrique A. Mais pour les hyperplans $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$, plus généralement pour un élément quelconque $\mathscr{K}$ du pinceau $\wedge$, il nous sera préférable de considérer sa *transformée stricte*

$$\mathscr{K}^{\#} = \overline{\mathrm{f}^{-1}(\mathscr{K} \setminus \mathscr{M})} , \tag{3.8}$$

l'adhérence étant prise pour la topologie ordinaire, la seule que nous considérerons dans cet article. L'avantage de considérer la transformée stricte au lieu de la transformée totale est que f induit des isomorphismes

$$\mathscr{K}^{\#} \tilde{\to} \mathscr{K} \tag{3.9}$$

$$\mathscr{K}^{\#} \cap \tilde{\mathscr{M}} \tilde{\to} \mathscr{M} \tag{3.10}$$

pour tout hyperplan $\mathscr{K}$ de Λ, en particulier pour $\mathscr{L}$ et pour $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$ (cf. fig. 3.1). En effet, pour tout $\mathscr{K} \in \Lambda$ de direction κ c'est-à-dire tel que $p(\mathscr{K} \setminus \mathscr{M}) = \{\kappa\}$, on a les relations

$$\mathscr{K}^{\#} = \mathscr{K} \times \{\kappa\} = \tilde{p}^{-1}(\kappa) . \tag{3.11}$$

Cette formule interprète aussi les transformées strictes des éléments de Λ comme les fibres de la projection $\tilde{p}$. Mais cette fois on peut enlever $\mathscr{L}_1^{\#}, \ldots, \mathscr{L}_s^{\#}$ à $\tilde{\mathbf{P}}^n$ sans toucher aux autres fibres de $\tilde{p}$ qui restent alors isomorphes aux bons hyperplans de Λ, axe compris. C'est donc $\tilde{p}$ qui va nous donner, en dehors de $\mathscr{L}_1^{\#}, \ldots, \mathscr{L}_s^{\#}$, la fibration localement triviale rendant compte de l'«isotopie» dont nous avons parlé dans l'introduction. Elle en rendra vraiment compte si elle respecte $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}$ ainsi que $\tilde{S}$ pour toute strate S de A et si elle respecte aussi $\tilde{\mathscr{M}}$. Comme $\tilde{p}$ est propre puisque $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est compact, nous pourrons déduire une telle fibration du premier théorème d'isotopie de Thom-Mather si nous construisons une stratification de Whitney $\tilde{\mathfrak{S}}$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ telle que les $\tilde{S}$ et $\tilde{\mathscr{M}}$ soient unions de strates de $\tilde{\mathfrak{S}}$ et telle que $\tilde{p}$ soit submersive sur toutes ces strates pourvu qu'on se restreigne à $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus (\mathscr{L}_1^{\#} \cup \ldots \cup \mathscr{L}_s^{\#})$.

Rappelant la notation (3.7), nous posons

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{S}} = &\{\tilde{S} \setminus \tilde{\mathscr{M}} \mid S \in \mathfrak{S}\} \cup \{\tilde{S} \cap \tilde{\mathscr{M}} \mid S \in \mathfrak{S}\} \\ &\cup \{(\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}) \setminus \tilde{\mathscr{M}}, (\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}) \cap \tilde{\mathscr{M}}\} . \end{aligned} \tag{3.12}$$

LEMME 3.13. *La partition $\tilde{\mathfrak{S}}$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est une stratification de Whitney vérifiant les conditions suivantes:*

(i) *$\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}$, les $\tilde{S}$ pour $S \in \mathfrak{S}$ et $\tilde{\mathscr{M}}$ sont réunions de strates;*

(ii) *si $\mathscr{K} \in \Lambda$ est un «bon» hyperplan transverse à toutes les strates de $\mathfrak{S}$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, alors $\mathscr{K}^{\#}$ est transverse à toutes les strates de $\tilde{\mathfrak{S}}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$.*

Démonstration. Elle est donnée dans [Ch1] proposition (2.2.1) (l'hypothèse faite dans [Ch1] que A est une hypersurface n'y intervient pas). Le fait que $\mathscr{M}$ soit transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de $\mathfrak{S}$ y joue un rôle essentiel. Il implique en effet d'une part que $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ à $S \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ pour tout $S \in \mathfrak{S}$ et alors $\tilde{S} = (S \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \cap \tilde{\mathbf{P}}^n$ est obtenue par section transversale de $S \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Il implique d'autre part que $\tilde{\mathscr{M}}$ est transverse dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ aux $\tilde{S}$. On conclut alors à l'aide du lemme (2.2.2) de [Ch1] qui affirme qu'étant donnée une stratification de Whitney, son produit par une variété constante, sa section par une sous-variété fermée transverse et cette section union son complémentaire forment aussi des stratifications de Whitney. Notons toutefois que la démonstration de ce lemme dans [Ch1] utilise comme allant de soi le fait suivant: soient S, S' deux strates avec $S' \subset \bar{S}$ et soit V une sous-variété de l'espace ambiant transverse à S et S'; si (x_k) est une suite de points de $S \cap V$ convergeant vers un point x de $S' \cap V$ telle que les espaces tangents $T_{x_k}S$ aient une limite T, alors $T_{x_k}S \cap T_{x_k}V$ converge vers $T \cap T_xV$. Cela n'est en fait vrai que grâce à la propriété (a) de Whitney vérifiée par le couple (S, S') au point x; pour plus de détails cf. [Ch3] §5 de la 2e partie. □

Remarquons maintenant que $\tilde{\mathrm{p}}$ est une submersion. En effet, la restriction de $\tilde{\mathrm{p}}$ à l'ouvert $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathscr{M}}$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ coïncide, à l'isomorphisme (3.6) près, avec p qui est une submersion; et $\tilde{\mathrm{p}}$ est aussi submersive en tout point de $\tilde{\mathscr{M}}$ car sa restriction à $\tilde{\mathscr{M}}$, qui coïncide avec la deuxième projection, est déjà submersive. Compte tenu de cette submersivité globale de $\tilde{\mathrm{p}}$, la condition (ii) du lemme 3.13 implique que

(3.14) la restriction de $\tilde{\mathrm{p}}$ à chaque strate de $\tilde{\mathfrak{S}}$ est submersive en tout point non situé sur les transformées strictes $\mathscr{L}_1^{\#}, \ldots, \mathscr{L}_s^{\#}$ des hyperplans «mauvais».

En effet, soit S une strate de $\tilde{\mathfrak{S}}$, soit x un point de S et soit $\mathscr{K}^{\#}$ l'unique transformée stricte d'élément de Λ passant par x (on a $\mathrm{p}(\mathscr{K} \setminus \mathscr{M}) = \{\tilde{\mathrm{p}}(x)\}$). Si ι est l'injection canonique de S dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$, l'application linéaire tangente $T_x(\tilde{\mathrm{p}}_{|S})$ à $\tilde{\mathrm{p}}_{|S}$ est égale à $T_x\tilde{\mathrm{p}} \circ T_x\iota$ et, compte tenu de la surjectivité de $T_x\tilde{\mathrm{p}}$, cette application est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, T_x\iota + \mathrm{Ker}\, T_x\tilde{\mathrm{p}} = T_x\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. le lemme algébrique 7.4 ci-dessous). Mais $\mathrm{Im}\, T_x\iota = T_xS$ et $\mathrm{Ker}\, T_x\tilde{\mathrm{p}} = \mathscr{K}^{\#}$ donc cette égalité est équivalente à la transversalité de $\mathscr{K}^{\#}$ à S en x dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$.

Définissons alors les points λ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par

$$(3.15) \qquad \begin{cases} \{\lambda\} = \mathrm{p}(\mathscr{L} \setminus \mathscr{M}) \\ \{\lambda_i\} = \mathrm{p}(\mathscr{L}_i \setminus \mathscr{M}) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s\,, \end{cases}$$

de sorte que

$$(3.16) \qquad \begin{cases} \mathscr{L}^{\#} = \tilde{\mathrm{p}}^{-1}(\lambda) \\ \mathscr{L}_i^{\#} = \tilde{\mathrm{p}}^{-1}(\lambda_i) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s\,, \end{cases}$$

et posons

(3.17) $\mathbf{P}^1_* = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$

(3.18) $\tilde{\mathbf{P}}^n_* = \tilde{\mathbf{P}}^n\backslash(\mathscr{L}_1^{\#} \cup \ldots \cup \mathscr{L}_s^{\#}) = \tilde{p}^{-1}(\mathbf{P}^1_*)$

(3.19) $\tilde{p}_* : \tilde{\mathbf{P}}^n_* \to \mathbf{P}^1_*$ l'application induite par $\tilde{p}$

(3.20) $\tilde{\mathscr{S}}_* = \tilde{\mathscr{S}}_{|\tilde{\mathbf{P}}^n_*} = \{S \cap \tilde{\mathbf{P}}^n_* \mid S \in \tilde{\mathscr{S}} \text{ et } S \cap \tilde{\mathbf{P}}^n_* \neq \varnothing\}$.

Alors il est aisé de voir que la restriction $\tilde{\mathscr{S}}_*$ de $\tilde{\mathscr{S}}$ à l'ouvert $\tilde{\mathbf{P}}^n_*$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est une stratification de Whitney de $\tilde{\mathbf{P}}^n_*$ (pour plus de détails, cf. [Ch3] §5 de la 2e partie) et $\tilde{p}_*$ est une application propre submersive sur toutes les strates de $\tilde{\mathscr{S}}_*$. Nous sommes donc en situation d'appliquer le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather (cf. [Ma] proposition 11.1 et corollary 10.3). Il faut toutefois remarquer au préalable que ce théorème est énoncé pour des ensembles munis d'une préstratification de Whitney *réelle*. Mais pour une stratification complexe, les conditions de Whitney au sens complexe impliquent les conditions de Whitney pour les variétés réelles sous-jacentes aux strates. D'autre part la submersivité au sens complexe de $\tilde{p}_*$ implique sa submersivité au sens réel car l'espace tangent en un point à la variété réelle sous-jacente à une strate est l'espace vectoriel réel sous-jacent à l'espace tangent complexe. Nous pouvons donc bien appliquer le théorème de Thom-Mather et nous obtenons:

PROPOSITION 3.21. *L'application* $\tilde{p}_*$ *est une fibration topologique localement triviale de* $\tilde{\mathbf{P}}^n_*$ *sur* $\mathbf{P}^1_*$ *respectant les strates de* $\tilde{\mathscr{S}}_*$ *donc respectant les traces sur* $\tilde{\mathbf{P}}^n_*$ *de* $\tilde{\mathbf{P}}^n\backslash\tilde{A}$, *des* $\tilde{S}$ *pour* $S \in \mathscr{S}$ *et de* $\tilde{\mathscr{M}}$. *La fibre au-dessus de* λ *(direction du «bon» hyperplan* $\mathscr{L}$*) est* $\mathscr{L}^{\#}$. □

Cette proposition rend compte précisément de l'«isotopie» dont il a été question dans l'introduction.

Remarque 3.22. Nous avons dit de cette «isotopie» qu'elle laissait l'axe du pinceau $\wedge$ globalement invariant et cela est justifié dans la proposition 3.21 par le fait que la fibration respecte la transformée totale $\tilde{\mathscr{M}}$ de l'axe. En fait, cette «isotopie» peut même être construite de manière à laisser l'axe *point par point invariant*. Pour le justifier, il faut revenir sur la manière dont le premier théorème d'isotopie est établi dans [Ma] et se souvenir qu'il porte ce nom parce que la fibration localement triviale respectant la stratification y est démontrée en réalisant une isotopie de la fibre le long des courbes intégrales d'un champ de vecteurs «contrôlé» au-dessus d'un champ de vecteurs donné de la base. Comme les strates de $\tilde{\mathscr{M}} \cap \tilde{\mathbf{P}}^n_* = \mathscr{M} \times \mathbf{P}^1_*$ sont de la forme $(S \cap \mathscr{M}) \times \mathbf{P}^1_*$ pour $S \in \mathscr{S}$ ou $S = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$, ce relèvement peut être fait trivialement sur $\tilde{\mathscr{M}}$, et le champ de vecteurs contrôlé peut ensuite être prolongé à $\tilde{\mathbf{P}}^n_*\backslash\tilde{\mathscr{M}}$ sans avoir à toucher celui sur $\tilde{\mathscr{M}} \cap \tilde{\mathbf{P}}^n_*$ puisque $\tilde{\mathscr{M}}$ est fermé et que la construction sur une strate n'est affectée que par ce qui se passe sur les strates contenues dans

son adhérence (cf. [Ma] §9). L'isotopie de $\mathscr{L}^{\#}$ correspondant à un tel champ de vecteurs a alors lieu trivialement sur $\mathscr{M} \times \mathbf{P}^1_*$ et lorsqu'on redescend à $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ par le morphisme d'éclatement f, on trouve une «isotopie» de $\mathscr{L}$ qui respecte $\mathfrak{S}$ et $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ et qui de plus laisse $\mathscr{M}$ fixe point par point.

A partir de maintenant, nous ne nous intéressons plus qu'à ce qui se passe en dehors de A, ce qui signifie que nous ne considérons dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ que ce qui se passe hors de $\tilde{A}$. Nous sommes donc amenés à introduire les notations simplificatrices suivantes (cf. fig. 3.2), valables pour le temps de la démonstration du théorème 1.3, c'est-à-dire jusqu'à la fin du §8:

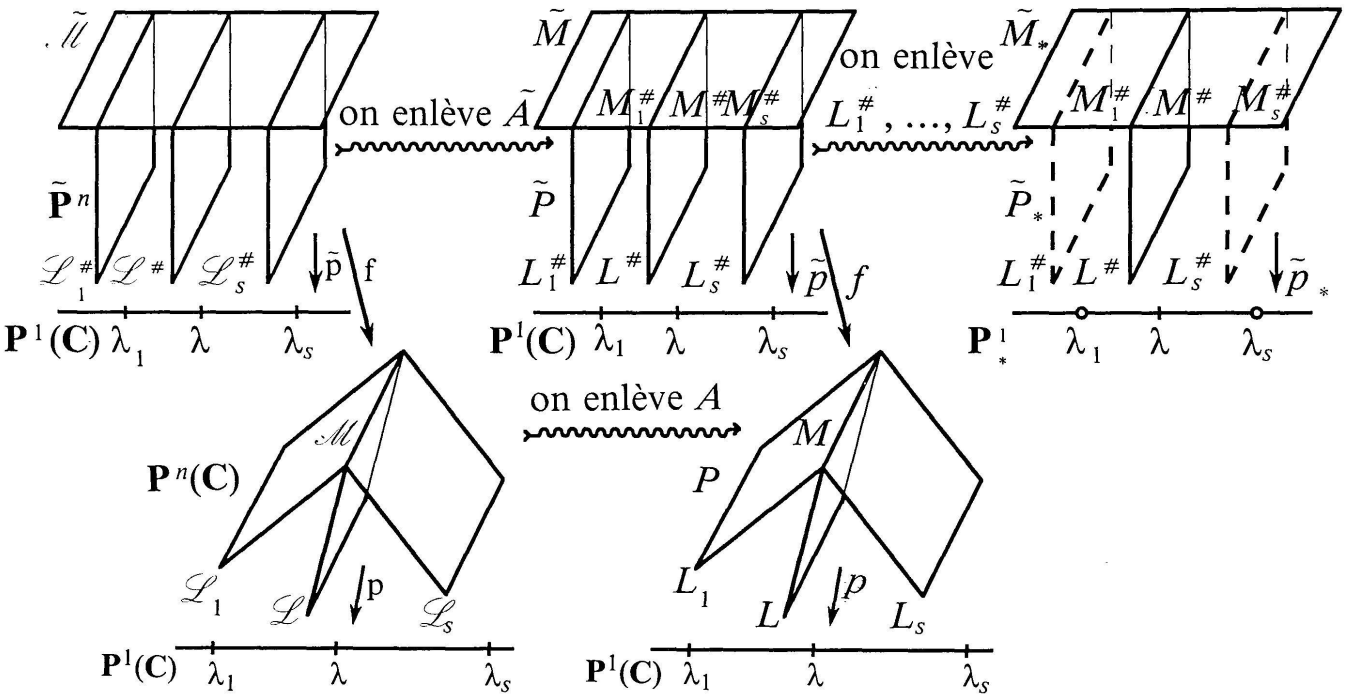


FIGURE 3.2

$$(3.23)\qquad \begin{cases} P = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A \\ L = \mathscr{L} \cap P \\ L_i = \mathscr{L}_i \cap P \\ M = \mathscr{M} \cap P \end{cases} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s$$

$$(3.24)\qquad \begin{cases} \tilde{P} = \tilde{\mathbf{P}}^n\backslash \tilde{A} \\ \tilde{M} = \tilde{\mathscr{M}} \cap \tilde{P} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \end{cases}$$

$$(3.25)\qquad \begin{cases} L^{\#} = \mathscr{L}^{\#} \cap \tilde{P} \\ L_i^{\#} = \mathscr{L}_i^{\#} \cap \tilde{P} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s \\ M^{\#} = L^{\#} \cap \tilde{M} = M \times \{\lambda\} \\ M_i^{\#} = L_i^{\#} \cap \tilde{M} = M \times \{\lambda_i\} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s \end{cases}$$

(3.26) $\tilde{p}: \tilde{P} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ restriction de $\tilde{\mathrm{p}}$

(3.27) $$\begin{cases} \tilde{P}_* = \tilde{P} \cap \tilde{\mathbf{P}}^n_* = \tilde{P} \setminus (L_1^\# \cup \ldots \cup L_s^\#) \\ \tilde{M}_* = \tilde{M} \cap \tilde{P}_* = \tilde{M} \setminus (M_1^\# \cup \ldots \cup M_s^\#) = M \times \mathbf{P}^1_* \end{cases}$$

(3.28) $\tilde{p}_*: \tilde{P}_* \to \mathbf{P}^1_*$ restriction de $\tilde{\mathrm{p}}_*$, induite aussi par $\tilde{\mathrm{p}}$ ou $\tilde{p}$.

On peut définir la transformée stricte d'une partie quelconque E de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ comme étant égale à $\mathrm{f}^{-1}(E) \cap \overline{\mathrm{f}^{-1}(E \setminus \mathscr{M})}$, ce qui est cohérent avec la définition (3.8) concernant les hyperplans de $\wedge$ car ceux-ci sont fermés. Avec cette définition, $L^\#$ et les $L_i^\#$ sont bien les transformées strictes respectives de L et des L_i. Mais il n'en est pas de même pour $M^\#$ et les $M_i^\#$ par rapport à M et aux M_i. Nous avons malgré tout adopté ces notations en raison de l'analogie entre les relations (3.25) qui les définissent. Notons d'autre part que, d'après (3.9) et (3.10), le morphisme d'éclatement f induit les isomorphismes suivants:

(3.29) $$\begin{cases} L^\# \xrightarrow{\sim} L \\ L_i^\# \xrightarrow{\sim} L_i & \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s \\ M^\# \xrightarrow{\sim} M \\ M_i^\# \xrightarrow{\sim} M & \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s\,. \end{cases}$$

En relation avec la structure de produit de $\tilde{M}$, notons aussi que les isomorphismes concernant $M^\#$ et $M_i^\#$ sont réciproques des identifications canoniques de M à $M \times \{\lambda\}$ et $M \times \{\lambda_i\}$. Remarquons enfin que, comme nous avons écarté le cas trivial où $P = \varnothing$, la transversalité de $\mathscr{M}$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de $\mathscr{S}$ implique (cf. (9.6.4)) que M donc tous les espaces que nous avons considérés ci-dessus sont non vides.

Voici alors le corollaire de la proposition 3.21 que nous aurons à considérer:

COROLLAIRE 3.30. *L'application $\tilde{p}_*$ est une fibration localement triviale topologique de $\tilde{P}_*$ sur $\mathbf{P}^1_*$ avec $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ comme sous-fibré trivial. Les fibres au-dessus de λ sont respectivement $L^\#$ et $M^\#$.* □

Par *sous-fibré* nous entendons une partie de l'espace total du fibré ambiant, qui non seulement est fibrée par la même projection sur la même base mais aussi pour laquelle il existe des trivialisations locales qui s'étendent en des trivialisations locales du fibré ambiant. Nous qualifierons de *simultanées* de telles trivialisations locales du fibré ambiant et du sous-fibré.

4. Homologie du fibré avec sous-fibré trivial obtenu

Dans ce paragraphe, nous étudions l'homologie du fibré $\tilde{P}_*$ de projection $\tilde{p}_*$ avec sous-fibré trivial $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ obtenus au corollaire 3.30 (cf. fig. 3.2). Nous n'avons pas besoin de suites spectrales car leur base $\mathbf{P}^1_*$ est topologiquement une 2-sphère privée de s points donc se rétracte par déformation sur un bouquet de $s-1$ cercles; rappelons que s est le nombre d'hyperplans «mauvais» dans le pinceau Λ et que nous supposons que $s \geqslant 2$. Les trois lemmes suivants montrent que, pour l'homologie relative de l'espace total modulo une fibre, nous pouvons nous ramener aux fibrés induits au-dessus d'un tel bouquet puis au-dessus de chacun des cercles qui le composent; et dans le cas d'un fibré sur un cercle, nous disposons de l'isomorphisme de Wang que nous décrirons ensuite.

Nous pouvons choisir ce bouquet de cercles avec son sommet au point λ au-dessus duquel se trouvent les fibres qui nous intéressent. A sommet donné, plusieurs choix sont possibles et il y aura dans tout ce qui suit un caractère non intrinsèque dépendant de ce choix. Fixons donc arbitrairement:

$$B = \bigvee_{j=1}^{s-1} C_j \qquad \text{(4.1)}$$

un bouquet de cercles de sommet λ, rétracte fort par déformation de $\mathbf{P}^1_*$.

Nous allons considérer les fibrés et sous-fibrés induits par $\tilde{P}_*$ et $\tilde{M}_*$ au-dessus de B et des C_j. Nous posons donc

$$\begin{cases} \tilde{P}_B = \tilde{p}_*^{-1}(B) \\ \tilde{M}_B = \tilde{M}_* \cap \tilde{P}_B = M \times B\,, \end{cases} \qquad \text{(4.2)}$$

$$\begin{cases} \tilde{P}_{C_j} = \tilde{p}_*^{-1}(C_j) \\ \tilde{M}_{C_j} = \tilde{M}_* \cap \tilde{P}_{C_j} = M \times C_j \end{cases} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1\,. \qquad \text{(4.3)}$$

Lemme 4.4. *L'inclusion entre couples*

$$\bar{J}: (\tilde{P}_B, \tilde{M}_B) \hookrightarrow (\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Soit $h: \mathbf{P}^1_* \times [0,1] \to \mathbf{P}^1_*$ une homotopie de l'identité de $\mathbf{P}^1_*$ vers une application d'image contenue dans B, homotopie laissant B globalement invariant (nous nous servons donc seulement du fait que B est rétracte *faible* par déformation de $\mathbf{P}^1_*$). Comme $\mathbf{P}^1_*$ est séparé paracompact et est la base du couple de fibré et sous-fibré localement trivial $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$, il y a, au-dessus de l'homotopie h, une homotopie de couples $H: (\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$

$\times [0, 1] \to (\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ démarrant avec l'identité de $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ (cf. [Sp] 2.7.14 qu'on peut adapter à un couple formé d'un fibré et d'un sous-fibré). Posons

$$\begin{aligned} \bar{R} : (\tilde{P}_*, \tilde{M}_*) &\to (\tilde{P}_B, \tilde{M}_B) \\ x &\mapsto H(x, 1) \end{aligned}$$

(on a bien $H(x, 1) \in \tilde{P}_B$ puisque $h(\tilde{p}_*(x), 1) \in B$). Alors $\bar{R}$ est un inverse homotopique de $\bar{J}$. En effet, H réalise une homotopie de l'identité de $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ vers $\bar{J} \circ \bar{R}$; mais aussi la restriction de H à $(\tilde{P}_B, \tilde{M}_B) \times [0, 1]$ réalise une homotopie de l'identité de $(\tilde{P}_B, \tilde{M}_B)$ vers $\bar{R} \circ \bar{J}$ car elle ne fait pas sortir de $(\tilde{P}_B, \tilde{M}_B)$ puisque h laisse B globalement invariant. □

En ce qui concerne les homologies relatives modulo les fibres $L^\#$ et $M^\#$ au-dessus de λ, on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4.5. *Les inclusions* $(\tilde{P}_B, L^\#) \hookrightarrow (\tilde{P}_*, L^\#)$ *et* $(\tilde{M}_B, M^\#) \hookrightarrow (\tilde{M}_*, M^\#)$ *induisent, pour tout* k, *des isomorphismes en homologie de rang* k *entrant dans le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} H_k(\tilde{P}_B, L^\#) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{P}_*, L^\#) \\ \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\ H_k(\tilde{M}_B, M^\#) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{M}_*, M^\#) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont aussi induites par inclusion.

Démonstration. D'après le lemme 4.4, les inclusions $\tilde{P}_B \hookrightarrow \tilde{P}_*$ et $\tilde{M}_B \hookrightarrow \tilde{M}_*$ induisent des isomorphismes en homologie. Il en résulte, d'après les suites exactes d'homologie relative pour les couples $(\tilde{P}_*, \tilde{P}_B)$ et $(\tilde{M}_*, \tilde{M}_B)$, que $H_k(\tilde{P}_*, \tilde{P}_B) = 0$ et $H_k(\tilde{M}_*, \tilde{M}_B) = 0$ pour tout k. Les suites exactes d'homologie relative pour les triplets $(\tilde{P}_*, \tilde{P}_B, L^\#)$ et $(\tilde{M}_*, \tilde{M}_B, M^\#)$ donnent alors les isomorphismes de l'énoncé. La commutativité du diagramme provient de la commutativité du diagramme des inclusions correspondantes. □

LEMME 4.6. *On a, pour tout* k, *les isomorphismes entrant dans le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^\#) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{P}_B, L^\#) \\ \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\ \bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{M}_{C_j}, M^\#) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{M}_B, M^\#) \end{array}$$

où toutes les flèches sont obtenues à partir d'homomorphismes induits par inclusion.

Démonstration. Nous allons séparer la contribution des $\tilde{P}_{C_j}$ en les déconnectant par excision de $L^{\#}$ après nous être ramenés à l'homologie relative modulo un ensemble plus gros englobant $L^{\#}$ dans son intérieur. Soit U un voisinage ouvert de λ dans B tel que:

(i) $\{\lambda\}$ soit rétracte par déformation de $C_j \cap U$ pour $1 \leqslant j \leqslant s-1$,

(ii) $\tilde{P}_B$ soit trivialisable au-dessus de U.

Considérons les fibrés induits par $\tilde{P}_B$ au-dessus de U et des $C_j \cap U$:

$$\begin{cases} \tilde{P}_U = \tilde{p}_*^{-1}(U) \\ \tilde{P}_{C_j \cap U} = \tilde{p}_*^{-1}(C_j \cap U)\ . \end{cases}$$

Alors $L^{\#} = \tilde{p}_*^{-1}(\lambda)$ est rétracte fort par déformation de chaque $\tilde{P}_{C_j \cap U}$ et aussi de $\tilde{P}_U$. Considérons maintenant le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) & \xrightarrow{1} & H_k(\tilde{P}_B, L^{\#}) \\
\downarrow 2 & \curvearrowright & \downarrow 3 \\
\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j}, \tilde{P}_{C_j \cap U}) & \xrightarrow{4} & H_k(\tilde{P}_B, \tilde{P}_U) \\
\uparrow 5 & \curvearrowright & \uparrow 6 \\
\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j} \backslash L^{\#}, \tilde{P}_{C_j \cap U} \backslash L^{\#}) & \xrightarrow{7} & H_k(\tilde{P}_B \backslash L^{\#}, \tilde{P}_U \backslash L^{\#})
\end{array}$$

où toutes les flèches sont naturelles, c'est-à-dire obtenues à partir des homomorphismes induits par inclusion. Ce diagramme est commutatif car, d'une part, les diagrammes correspondants d'inclusions pour chaque j sont commutatifs et, d'autre part, la composition à gauche par un *homomorphisme* est distributive par rapport à l'addition d'applications. Dans ce diagramme, la flèche numérotée 3 est un isomorphisme car $L^{\#}$ est rétracte par déformation de $\tilde{P}_U$ et on peut raisonner comme dans la démonstration du corollaire 4.5; la flèche 2 est somme directe d'isomorphismes analogues. La flèche 6 est un isomorphisme obtenu par excision du fermé $L^{\#}$ de $\tilde{P}_B$ contenu dans l'ouvert $\tilde{P}_U$; la flèche 5 est somme directe d'isomorphismes semblables. Pour ce qui est de la flèche 7, on se retrouve maintenant au-dessus de $B\backslash\{\lambda\}$ qui est déconnecté en les $s-1$ composantes connexes par arcs $C_j\backslash\{\lambda\}$; toute composante connexe par arcs de $\tilde{P}_B\backslash L^{\#}$ est donc contenue dans l'un des $\tilde{P}_{C_j}\backslash L^{\#}$ (en fait lui est égale car L donc $L^{\#}$ est connexe par arcs); la flèche 7 est donc un isomorphisme. On peut alors conclure que la flèche 4 puis la flèche 1 sont des isomorphismes. Mais la flèche 1 est la flèche supérieure du diagramme de l'énoncé. On peut montrer de la même façon que la flèche inférieure de ce diagramme est aussi un isomorphisme. Pour finir, ce diagramme est commutatif pour les mêmes raisons que le diagramme considéré en cours de démonstration. □

Le corollaire 4.5 et le lemme 4.6 donnent une décomposition de $H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$ comme somme directe des $H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#})$. Nous nous sommes donc ramenés à l'homologie relative modulo une fibre d'un fibré localement

trivial sur un cercle. Nous pouvons alors utiliser l'isomorphisme de Wang (cf. [Wg]) que nous allons maintenant décrire.

Nous commençons par choisir une orientation sur chaque C_j que nous matérialiserons par le choix, pour $1 \leqslant j \leqslant s-1$, de

(4.7) ω_j un lacet de base λ faisant une fois le tour de C_j.

Il revient au même de dire que la classe d'homotopie de ω_j engendre $\pi_1(C_j, \lambda)$ ou encore que, si l'on considère ω_j comme 1-simplexe (cycle) singulier de C_j, sa classe d'homologie $[\omega_j]$ engendre $H_1(C_j)$. On a alors, pour tout k, les isomorphismes de Wang associés à ces orientations des C_j:

$$(4.8) \qquad \nu_{j,k}: H_{k-1}(L^{\#}) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1,$$

où l'on convient que $H_{k-1}(L^{\#}) = 0$ pour $k = 0$. On peut informellement décrire ces isomorphismes comme suit: Prenons un $(k-1)$-cycle γ dans $L^{\#}$, qui est la fibre au-dessus de λ, et faisons décrire à λ le lacet ω_j; la fibre peut accompagner ce mouvement en subissant une isotopie dans laquelle γ «décrit» un k-cycle relatif Γ de $\tilde{P}_{C_j}$ modulo $L^{\#}$ (cf. fig. 4.1): l'isomorphisme de Wang $\nu_{j,k}$ fait correspondre la classe d'homologie de Γ à la classe d'homologie de γ. Cet isomorphisme dépend évidemment du sens de parcours choisi sur C_j et matérialisé par ω_j.

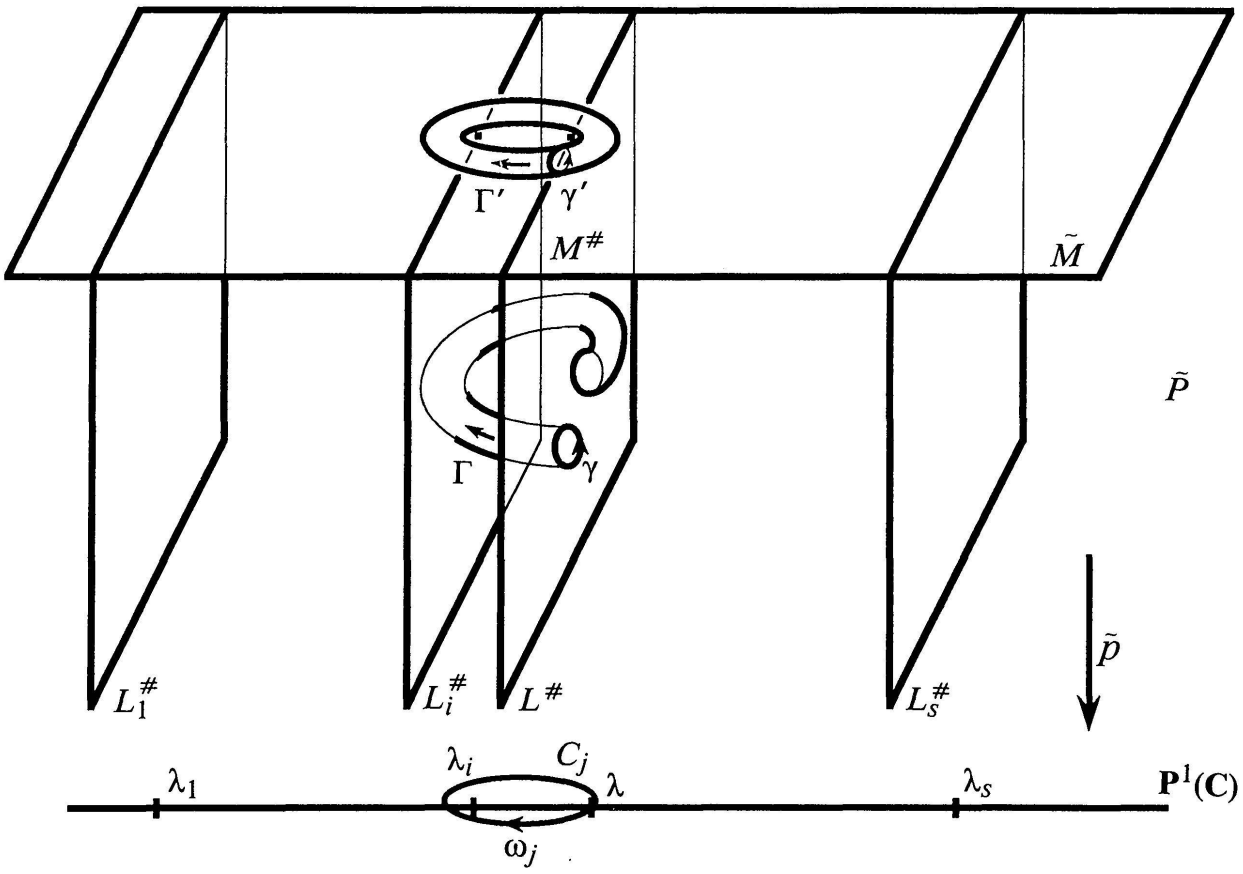


FIGURE 4.1

Le premier point clef dans la démonstration du théorème 1.3 est que les isomorphismes de Wang se comportent *naturellement* par rapport aux *sous-fibrés* $\tilde{M}_{C_j}$. Cela veut dire que si $\nu'_{j,k}$ est l'isomorphisme de Wang de rang k pour $\tilde{M}_{C_j}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\nu_{j,k}}{\tilde{\to}} & \\ H_{k-1}(L^{\#}) & & H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \\ \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\ & \overset{\nu'_{j,k}}{\tilde{\to}} & \\ H_{k-1}(M^{\#}) & & H_k(\tilde{M}_{C_j}, M^{\#}) \end{array} \tag{4.9}$$

où les flèches verticales sont induites par inclusion.

Ainsi donc, reprenant notre description informelle, si γ est homologue dans $L^{\#}$ à un cycle γ' de $M^{\#}$ (compte tenu des isomorphismes (3.29), c'est le cas si l'homomorphisme m_{k-1} considéré dans le théorème 1.3 est surjectif), alors Γ est homologue dans $\tilde{P}_{C_j}$ modulo $L^{\#}$ à un cycle relatif Γ' de $\tilde{M}_{C_j}$ modulo $M^{\#}$ obtenu à partir de γ' par la procédure de Wang dans le fibré $\tilde{M}_{C_j}$ (cf. fig. 4.1). Cela précise l'assertion de l'introduction selon laquelle, si certains cycles de L sont homologues à des cycles de M, alors les monodromies autour des hyperplans mauvais peuvent être «poussées» dans l'axe.

Mais, d'autre part, chaque sous-fibré $\tilde{M}_{C_j}$ ayant la forme triviale $M \times C_j$, l'isomorphisme $\nu'_{j,k}$ s'exprime trivialement comme un produit-croix homologique

$$\nu'_{j,k}(z'^{\#}) = z' \times [\omega_j]_{(C_j,\{\lambda\})} \quad \text{pour} \quad z' \in H_{k-1}(M)\ , \tag{4.10}$$

où $[\omega_j]_{(C_j,\{\lambda\})}$ désigne la classe d'homologie dans $H_1(C_j, \{\lambda\})$ de ω_j considéré comme 1-simplexe (cycle) singulier relatif de C_j modulo $\{\lambda\}$ et $z'^{\#}$ désigne l'élément correspondant à z' dans l'isomorphisme $H_{k-1}(M) \tilde{\to} H_{k-1}(M^{\#})$ induit par l'identification canonique de M à $M^{\#} = M \times \{\lambda\}$. On tombe donc sur une forme de la formule de Künneth pour le couple de produits $(M \times C_j, M \times \{\lambda\})$. Notons que dans ce cas trivial $\nu'_{j,k}(z'^{\#})$ est l'image d'un élément de $H_k(\tilde{M}_{C_j})$ par l'homomorphisme naturel $H_k(\tilde{M}_{C_j}) \tilde{\to} H_k(\tilde{M}_{C_j}, M^{\#})$.

Revenant à notre description informelle, nous pouvons rendre compte de ce qui précède en disant que, comme $\tilde{M}_{C_j}$ est trivial, on peut, dans la procédure de Wang pour $\tilde{M}_{C_j}$, suivre la fibre trivialement de sorte que Γ' prend la forme d'un produit et se referme en un cycle absolu (cf. fig. 4.1). Voilà qui précise ce que nous avons dit dans l'introduction, concernant la «trivialisation» des monodromies qui peuvent être «poussées dans l'axe».

Signalons encore une formule qui est intuitivement claire d'après ce qui précède mais dont nous n'aurons pas à nous servir dans cet article. Si $\partial: H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \to H_{k-1}(L^{\#})$ est l'homomorphisme bord, on a

$$\partial \circ \nu_{j,k} = (-1)^{k-1}(\theta_{j,k-1} - \mathrm{Id}_{H_{k-1}(L^{\#})}) , \tag{4.11}$$

où $\theta_{j,k-1}$ est la monodromie en homologie de rang $k-1$ au-dessus de ω_j.

Nous avons mis en annexe des indications sommaires sur la manière dont peut être établi l'isomorphisme de Wang et en même temps justifiées les assertions de naturalité (4.9) et de trivialité (4.10) ci-dessus.

Nous allons modifier un peu l'écriture des isomorphismes de Wang avec deux intentions:

Premièrement, nous voulons faire apparaître les sections L et M de notre figure de départ grâce aux isomorphismes réciproques des isomorphismes (3.29):

$$\begin{cases} c : L \xrightarrow{\sim} L^{\#} \\ c' : M \xrightarrow{\sim} M^{\#} = M \times \{\lambda\} , \end{cases} \tag{4.12}$$

où c' coïncide donc avec l'identification canonique de M à $M \times \{\lambda\}$.

Deuxièmement, nous voulons intégrer les produits-croix qui apparaissent pour les sous-fibrés $\tilde{M}_{C_j}$ dans un cadre maniable, c'est-à-dire sous une forme intrinsèque ne dépendant pas des ω_j. Nous posons donc

$$\begin{cases} \bar{\nu}_{j,k} : H_{k-1}(L) \otimes H_1(C_j) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \\ \bar{\nu}'_{j,k} : H_{k-1}(M) \otimes H_1(C_j) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{M}_{C_j}, M^{\#}) \end{cases} \tag{4.13}$$

définis par

$$\begin{cases} \bar{\nu}_{j,k}(z \otimes [\omega_j]) = \nu_{j,k}(c_{k-1}(z)) & \text{pour} \quad z \in H_{k-1}(L) \\ \bar{\nu}'_{j,k}(z' \otimes [\omega_j]) = \nu'_{j,k}(c'_{k-1}(z')) & \text{pour} \quad z' \in H_{k-1}(M) , \end{cases} \tag{4.13.1}$$

avec la convention d'écriture (2.1), et où $[\omega_j]$ désigne la classe d'homologie dans $H_1(C_j)$ de ω_j considéré comme simplexe (cycle) singulier; ces définitions sont légitimes et conduisent à des isomorphismes car $H_1(C_j)$ est libre sur $[\omega_j]$. Nous obtenons bien quelque chose d'intrinsèque pour $\bar{\nu}'_{j,k}$ car la formule (4.10) donne, par bilinéarité du produit tensoriel et du produit-croix et compte tenu de ce que c' coïncide avec l'identification canonique de M à $M \times \{\lambda\}$,

$$\bar{\nu}'_{j,k}(z' \otimes [\alpha]) = z' \times [\alpha]_{(C_j, \{\lambda\})} \quad \text{pour tout 1-cycle } \alpha \text{ de } C_j , \tag{4.14}$$

avec la même convention d'écriture que pour (4.10). En revanche, il ne faut pas se laisser méprendre par l'écriture qui peut laisser croire que $\bar{\nu}_{j,k}$ est intrinsèque; en effet, si on remplace ω_j par son opposé, la valeur de $\bar{\nu}_{j,k}$ se

trouve modifiée par l'intervention d'une monodromie qui n'est plus l'identité comme dans le cas du sous-fibré trivial.

Nous allons maintenant tirer les conséquences de ces isomorphismes pour nos fibrés de départ $\tilde{P}_*$ et $\tilde{M}_*$, ce que nous pouvons faire grâce au lemme 4.6 et au corollaire 4.5. Pour cela, nous nous servons aussi de l'isomorphisme naturel

$$\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_1(C_j) \to H_1(\mathbf{P}^1_*) \tag{4.15}$$

qui fait que $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ est libre sur les classes d'homologie dans $\mathbf{P}^1_*$ des ω_j. Comme il peut maintenant y avoir ambiguïté sur l'espace dans lequel on prend la classe d'homologie d'un ω_j, nous précisons

(4.16) a_j = classe d'homologie de ω_j dans C_j pour $1 \leqslant j \leqslant s-1$.

Nous pouvons alors définir les homomorphismes suivants

$$\begin{cases} \bar{\nu}_k : H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_k(\tilde{P}_*, L^{\#}) \\ \bar{\nu}'_k : H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_k(\tilde{M}_*, M^{\#}) \end{cases} \tag{4.17}$$

par les conditions

$$\begin{cases} \bar{\nu}_k(z \otimes \mathrm{incl}_*(a_j)) = \mathrm{incl}_*(\bar{\nu}_{j,k}(z \otimes a_j)) \\ \bar{\nu}'_k(z' \otimes \mathrm{incl}_*(a_j)) = \mathrm{incl}_*(\bar{\nu}'_{j,k}(z' \otimes a_j)) \end{cases} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1 , \tag{4.17.1}$$

en notant indistinctement incl_* tout homomorphisme induit en homologie par une inclusion.

LEMME 4.18. *Les homomorphismes* $\bar{\nu}_k$ *et* $\bar{\nu}'_k$ *définis ci-dessus sont des isomorphismes pour tout* k. *Ils font commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow{\bar{\nu}_k}_{\sim} & H_k(\tilde{P}_*, L^{\#}) \\ \uparrow & \circlearrowright & \uparrow \\ H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow[\sim]{\bar{\nu}'_k} & H_k(\tilde{M}_*, M^{\#}) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les homomorphismes naturels. L'isomorphisme $\bar{\nu}'_k$ *se réduit à la forme triviale donnée par la formule intrinsèque*

$$\bar{\nu}'_k(z' \otimes [\alpha]) = z' \times [\alpha]_{(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})} \quad \textit{pour tout 1-cycle } \alpha \textit{ de } \mathbf{P}^1_* ,$$

où $[\alpha]_{(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})}$ *désigne l'image de* $[\alpha]$ *par l'homomorphisme naturel* $H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_1(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})$.

Démonstration. Nous allons écrire $\bar{\nu}_k$ comme composé d'isomorphismes déjà établis. Nous avons en effet, pour commencer, la suite d'isomorphismes

$$\bigoplus_{j=1}^{s-1} (H_{k-1}(L) \otimes H_1(C_j)) \overset{1}{\tilde{\to}} \bigoplus_{j=1}^{s-1} H_k(\tilde{P}_{C_j}, L^{\#}) \overset{2}{\tilde{\to}} H_k(\tilde{P}_B, L^{\#}) \overset{3}{\tilde{\to}} H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$$

où la flèche numérotée 1 est la somme directe des isomorphismes de Wang modifiés $\bar{\nu}_{j,k}$ définis en (4.13) et 2 et 3 sont les isomorphismes naturels établis au lemme 4.6 et au corollaire 4.5. Nous composons ensuite à gauche par la suite d'isomorphismes

$$H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \overset{4}{\tilde{\to}} H_{k-1}(L) \otimes \Big(\bigoplus_{j=1}^{s-1} H_1(C_j)\Big) \overset{5}{\tilde{\to}} \bigoplus_{j=1}^{s-1} (H_{k-1}(L) \otimes H_1(C_j))$$

où 4 est obtenu en tensorisant par l'identité l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme naturel (4.15) et 5 représente l'isomorphisme canonique dû à la commutation du produit tensoriel avec les sommes directes. En composant ces cinq isomorphismes on obtient bien une application satisfaisant aux conditions (4.17.1) qui définissent $\bar{\nu}_k$. On a la même décomposition en isomorphismes pour $\bar{\nu}'_k$. Maintenant, dans les deux décompositions de $\bar{\nu}_k$ et $\bar{\nu}'_k$, les paires d'isomorphismes correspondants commutent aux homomorphismes naturels. Le fait significatif est la propriété de commutation pour les isomorphismes 1: elle résulte de la naturalité de l'isomorphisme de Wang pour les *sous-fibrés* exprimée par la commutativité du diagramme (4.9) et accessoirement de la commutation des isomorphismes (4.12) aux inclusions. Les autres commutations sont de nature élémentaire et, pour ce qui est de 2 et 3, elles sont contenues dans le lemme 4.6 et le corollaire 4.5. On obtient ainsi la commutativité du diagramme de l'énoncé. Il nous reste à établir la formule concernant $\bar{\nu}'_k$. Il suffit de le faire pour $\alpha = \omega_j$ puisque $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ est libre sur les classes des ω_j dans $\mathbf{P}^1_*$. Ces classes apparaissent notées $\mathrm{incl}_*(a_j)$ dans les formules (4.17.1) définissant $\bar{\nu}'_k$. La relation à établir résulte alors de la formule (4.14) et de la naturalité du produit-croix (cf. [Sp] 5.3.11). □

Remarque 4.19. L'isomorphisme $\bar{\nu}'_k$ est, à l'isomorphisme naturel $H_1(\mathbf{P}^1_*) \tilde{\to} H_1(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})$ près, la formule de Künneth pour le couple de produits $(M \times \mathbf{P}^1_*, M \times \{\lambda\})$.

Remarque 4.20. Alors que $\bar{\nu}'_k$ est intrinsèque, $\bar{\nu}_k$ dépend, de la même manière que les $\bar{\nu}_{j,k}$, de l'orientation choisie sur les C_j mais il dépend aussi du choix fait en (4.1) du bouquet lui-même des C_j sur lequel on rétracte par déformation $\mathbf{P}^1_*$.

Nous allons, pour finir, substituer les expressions obtenues pour $H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$ et $H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})$ dans les suites exactes d'homologie relative pour ces couples, ce qui nous donnera la proposition terminale de ce paragraphe. Nous voulons y faire directement apparaître L et M à la place de $L^{\#}$ et $M^{\#}$ comme nous l'avons fait pour les isomorphismes de Wang. Nous servant des isomorphismes (4.12), nous définissons donc les injections j et j' par les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{array}{ccc} L^{\#} \hookrightarrow \tilde{P}_* & & M^{\#} \hookrightarrow \tilde{M}_* \\ \uparrow c \quad \nearrow j & & \uparrow c' \quad \nearrow j' \\ L & & M \end{array} \tag{4.21}$$

Les injections j et j' commutent avec les inclusions représentées dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \overset{j}{\to} & \tilde{P}_* \\ \circlearrowleft m & \subset & \circlearrowleft h^* \\ M & \overset{j'}{\to} & \tilde{M}_* \end{array} \tag{4.22}$$

où h^* est nommée pour la première fois et où l'on reconnaît l'injection canonique m qui intervient dans l'énoncé du théorème 1.3.

Notre proposition peut alors s'énoncer:

PROPOSITION 4.23. *Etant donné un bouquet de cercles de sommet λ sur lequel $\mathbf{P}^1_*$ se rétracte par déformation et une orientation sur chacun de ces cercles, on a une suite exacte longue associée formant la ligne supérieure du diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \to H_k(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \overset{\xi_{k+1}}{\to} & H_k(L\,) & \overset{j_k}{\to} & H_k(\tilde{P}_*) & \overset{\mu_k}{\to} & H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \overset{\xi_k}{\to} & H_{k-1}(L) \to \ldots \\ \uparrow m_k \otimes \mathrm{Id} & \subset & \uparrow m_k & \subset & \uparrow h_k^* & \subset & \uparrow m_{k-1} \otimes \mathrm{Id} & \subset & \uparrow m_{k-1} \\ \ldots \to H_k(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \overset{0}{\to} & H_k(M) & \overset{j'_k}{\to} & H_k(\tilde{M}_*) & \overset{\mu'_k}{\to} & H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \overset{0}{\to} & H_{k-1}(M) \to \ldots \end{array} \tag{4.23.1}$$

$$\chi'_k : H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_k(\tilde{M}_*)$$

La ligne inférieure est une suite exacte longue qui ne dépend pas des choix effectués; l'homomorphisme μ'_k admet pour section le produit-croix homologique χ'_k dont la restriction aux éléments décomposables s'écrit $z' \otimes u \mapsto z' \times u$. Les flèches verticales sont les homomorphismes naturels; nous y voyons mis en évidence les homomorphismes m_k et m_{k-1} induits par l'injection canonique m qui figurent dans l'énoncé du théorème 1.3. Conformément à la convention d'écriture (2.1), les homomorphismes j_k et j'_k sont induits par les injections j et j' définies en (4.21) et l'homomorphisme h_k^* est induit par l'inclusion h^* nommée en (4.22). Nous convenons que $H_k(\,.\,) = 0$ pour $k < 0$.

Démonstration. Pour montrer l'exactitude des lignes du diagramme de l'énoncé et sa commutativité, il suffit de montrer qu'il est obtenu en faisant les substitutions permises par le lemme 4.18 dans le diagramme suivant:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots \to & H_{k+1}(\tilde{P}_*, L^{\#}) & \to & H_k(L^{\#}) & \to & H_k(\tilde{P}_*) & \to & H_k(\tilde{P}_*, L^{\#}) & \to & H_{k-1}(L^{\#}) & \to \ldots \\
(4.23.2) \qquad \uparrow & & \curvearrowright & \uparrow & \curvearrowright & \uparrow & \curvearrowright & \uparrow & \curvearrowright & \uparrow & \\
\ldots \to & H_{k+1}(\tilde{M}_*, M^{\#}) & \to & H_k(M^{\#}) & \to & H_k(\tilde{M}_*) & \to & H_k(\tilde{M}_*, M^{\#}) & \to & H_{k-1}(M^{\#}) & \to \ldots
\end{array}
$$

qui est formé des suites exactes d'homologie relative pour les couples $(\tilde{P}_*, L^{\#})$ et $(\tilde{M}_*, M^{\#})$ reliées en un diagramme commutatif par les homomorphismes induits par inclusion.

Plus précisément, nous substituons, pour tout k, les produits tensoriels $H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$ et $H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$ à $H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$ et $H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})$ au moyen des isomorphismes $\bar{\nu}_k$ et $\bar{\nu}'_k$ du lemme 4.18. Nous substituons aussi $H_k(L)$ et $H_k(M)$ à $H_k(L^{\#})$ et $H_k(M^{\#})$ au moyen des isomorphismes induits par les isomorphismes (4.12). On obtient bien ainsi les objets du diagramme de l'énoncé et il reste à vérifier que les flèches de (4.23.2) sont transmuées en les flèches dudit diagramme.

Les flèches horizontales de (4.23.2) induites par les inclusions $L^{\#} \hookrightarrow \tilde{P}_*$ et $M^{\#} \hookrightarrow \tilde{M}_*$ sont, d'après les diagrammes (4.21), effectivement transmuées en les flèches j_k et j'_k induites par les injections j et j'. En ce qui concerne les autres flèches horizontales, les noms qu'elles portent dans le diagramme de l'énoncé apparaissant pour la première fois à cette occasion, il n'y a rien à montrer; excepté toutefois pour les flèches qui devraient s'appeler ξ'_{k+1} et ξ'_k et dont l'énoncé affirme la nullité. Mais cela résultera de l'existence des sections χ'_k qui impliqueront la surjectivité des μ'_k donc, par exactitude, la nullité des ξ'_k. Le caractère intrinsèque de la ligne inférieure du diagramme de la proposition 4.23, contrairement à sa ligne supérieure, provient du caractère intrinsèque de l'isomorphisme $\bar{\nu}'_k$, contrairement à l'isomorphisme $\bar{\nu}_k$ (cf. remarques 4.19 et 4.20).

Venons-en aux flèches verticales pour lesquelles il faut montrer que des flèches naturelles sont transmuées en flèches naturelles. Il n'y a pas de problème pour la flèche médiane qui reste inchangée. Pour les autres, il s'agit de montrer la commutativité des diagrammes avec flèches verticales naturelles suivants:

$$
\begin{array}{ccc}
H_k(L) & \overset{c_k}{\tilde{\to}} & H_k(L^{\#}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_k(M) & \overset{c'_k}{\tilde{\to}} & H_k(M^{\#})
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \overset{\bar{\nu}_k}{\tilde{\to}} & H_k(\tilde{P}_*, L^{\#}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \overset{\bar{\nu}'_k}{\tilde{\to}} & H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})
\end{array}
$$

Cela est trivial pour le premier diagramme, manifestant le simple fait que les isomorphismes c et c' commutent aux inclusions. La commutativité du second diagramme, qui est le fait significatif, constitue une partie du lemme 4.18. Nous avons ainsi fini de montrer que le diagramme (4.23.2) est transformé en le diagramme de l'énoncé par les substitutions que nous avons faites. Notons que l'assertion de commutativité du lemme 4.18 que nous avons utilisée repose sur celle du diagramme (4.9) et donc la commutativité du diagramme de la proposition 4.23 repose sur la naturalité de l'isomorphisme de Wang pour les sous-fibrés.

Il nous reste maintenant seulement à montrer que χ'_k est une section de μ'_k. Or l'isomorphisme $\bar{\nu}'_k$ transmue, par définition, μ'_k en l'homomorphisme naturel $H_k(\tilde{M}_*) \to H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})$ et, d'après le lemme 4.18, transforme un élément décomposable $z' \otimes [\alpha]$ de $H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$ en $z' \times [\alpha]_{(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})}$. Il suffit donc de vérifier que $z' \times [\alpha]$ retourne bien à $z' \times [\alpha]_{(\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})}$ par cet homomorphisme naturel. Mais comme celui-ci est induit par l'inclusion $M \times \mathbf{P}^1_* \hookrightarrow M \times (\mathbf{P}^1_*, \{\lambda\})$, cela résulte de la naturalité du produit-

croix. Cette dernière partie de la proposition 4.23 repose ainsi sur la dernière assertion du lemme 4.18, donc sur la réduction à la formule (4.10) de l'isomorphisme de Wang dans le cas trivial. □

Remarque 4.24. Nous avons vu, lors de la description informelle de l'isomorphisme de Wang, que le premier point clef dans la démonstration du théorème 1.3 consistait en la naturalité de cet isomorphisme par rapport aux sous-fibrés et sa réduction à un produit-croix dans le cas trivial. D'après la démonstration ci-dessus, cela est manifesté dans la proposition 4.23 par la commutativité du diagramme qui y figure, d'une part, et, d'autre part, par la présence des homomorphismes nuls et des sections χ'_k dans sa suite exacte inférieure qui font qu'elle n'est qu'une version de la formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1_*$.

Remarque 4.25. D'après la formule (4.11), on a pour ξ_k les formules suivantes qui ne nous serviront pas dans cet article:

$$(4.25.1) \qquad \xi_k(z \otimes [\omega_j]_{\mathbf{P}^1_*}) = (-1)^{k-1}(\theta_{j,k-1}(z) - z) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1 ,$$

où $\theta_{j,k-1}$ est, à l'isomorphisme de L avec $L^{\#}$ près, la monodromie en homologie de rang $k-1$ au-dessus d'un lacet ω_j ayant servi à orienter le cercle C_j du bouquet sur lequel on a choisi de rétracter par déformation $\mathbf{P}^1_*$.

Remarque 4.26. D'après la démonstration qui en a été donnée, la proposition 4.23 et la remarque 4.25 sont valables pour n'importe quel couple formé d'un fibré topologique localement trivial et d'un sous-fibré trivialisable sur une base séparée et paracompacte qui se rétracte faiblement par déformation sur un bouquet de cercles. Il convient d'y remplacer le couple (L, M) par un couple de fibres types et les injections j, j' par un homéomorphisme de ce couple sur le couple de fibres au-dessus du sommet du bouquet choisi.

5. Réintroduction des hyperplans mauvais dans l'éclaté

Dans ce paragraphe, nous passons de l'homologie du couple $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ à celle du couple $(\tilde{P}, \tilde{M})$ (cf. fig. 3.2). C'est-à-dire que, nous limitant toujours au complémentaire de $\tilde{A}$, nous étudions l'incidence en homologie de la réintroduction des transformées strictes des hyperplans «mauvais» que nous avions dû ôter au §3 pour aboutir à une fibration localement triviale. L'étude de l'homologie du couple $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ menée au §4 était basée sur cette fibration. Quand on passe de $\tilde{P}_*$ à $\tilde{P}$ on perd la structure de fibré localement trivial, mais celle de fibré trivial de $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ se prolonge à $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Pour connaître donc les perturbations apportées par la réintroduction des hyperplans mauvais, nous cherchons à caractériser

conjointement les groupes $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$. Nous sommes devant l'homologie relative d'une variété complexe modulo le complémentaire d'une sous-variété fermée. Lorsque, comme c'est le cas ici, la variété ambiante est séparée paracompacte, on dispose, pour cette caractérisation, de l'isomorphisme de Leray que nous décrirons. Bien que, pour avoir cet isomorphisme, il ne soit pas nécessaire que la sous-variété ôtée soit connexe, la description sera plus naturelle si l'on réintroduit chaque hyperplan mauvais séparément. Le premier lemme ci-dessous montre qu'on peut s'y ramener.

Rappelons (cf. fig. 3.2) que

$$\begin{cases} \tilde{P}_* = \tilde{P}\backslash(L_1^{\#} \cup \ldots \cup L_s^{\#}) \\ \tilde{M}_* = \tilde{M}\backslash(M_1^{\#} \cup \ldots \cup M_s^{\#}) , \end{cases}$$

qui sont fibrés au-dessus de

$$\mathbf{P}_*^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} .$$

Nous voulons réintroduire chacun des $L_i^{\#}$ séparément. Pour chaque $i (1 \leqslant i \leqslant s)$, nous posons donc (cf. fig. 5.1)

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \mathbf{P}_i^1 = \mathbf{P}_*^1 \cup \{\lambda_i\} \\ \tilde{P}_i = \tilde{P}_* \cup L_i^{\#} \\ \tilde{M}_i = \tilde{M}_* \cup M_i^{\#} = M \times \mathbf{P}_i^1 . \end{cases}$$

Notons que ce sont des ouverts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, $\tilde{P}$ et $\tilde{M}$ respectivement. On a en effet les égalités

$$(5.2) \qquad \mathbf{P}_i^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_j \mid j \neq i\} , \quad \tilde{P}_i = \tilde{P} \setminus \bigcup_{j \neq i} L_j^{\#} , \quad \tilde{M}_i = \tilde{M} \setminus \bigcup_{j \neq i} M_j^{\#}$$

et les $L_i^{\#}$ et $M_i^{\#}$ sont fermés dans $\tilde{P}$ et $\tilde{M}$ respectivement puisque ce sont les traces sur $\tilde{P}$ et $\tilde{M}$ des $\mathscr{L}_i^{\#}$ qui sont fermés dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. fig. 3.2).

LEMME 5.3. *On a, pour tout k, les isomorphismes entrant dans le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\ \uparrow & \subsetneq & \uparrow \\ \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_*) & \xrightarrow{\sim} & H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \end{array}$$

où toutes les flèches sont obtenues à partir d'homomorphismes induits par inclusion.

Démonstration. Elle ressemble à celle du lemme 4.6. Pour $1 \leqslant i \leqslant s$, il existe des voisinages ouverts mutuellement disjoints U_i des $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}$. En effet, $\tilde{\mathbf{P}}^n$ étant compact est normal et il existe donc des voisinages ouverts mutuellement disjoints $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_s$ des fermés $\mathscr{L}_1^{\#}, \ldots, \mathscr{L}_s^{\#}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$; on prend alors $U_i = \mathscr{U}_i \cap \tilde{P}$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$ (cf. fig. 3.2). Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*) & \xrightarrow{1} & H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\ \uparrow 2 & & \uparrow 3 \\ \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(U_i, U_i \backslash L_i^{\#}) & \xrightarrow{4} & H_k(\bigcup_{i=1}^{s} U_i, \bigcup_{i=1}^{s} U_i \backslash \bigcup_{i=1}^{s} L_i^{\#}) \end{array}$$

où toutes les flèches sont obtenues à partir d'homomorphismes induits par inclusion. Il est commutatif par le même argument élémentaire que dans la démonstration du lemme 4.6. La flèche numérotée 3 est un isomorphisme obtenu en excisant le fermé $\tilde{P} \backslash \bigcup_{i=1}^{s} U_i$ dans l'ouvert $\tilde{P}_*$ de $\tilde{P}$. La flèche 2 est somme directe des isomorphismes obtenus en excisant le fermé $\tilde{P}_i \backslash U_i$ dans l'ouvert $\tilde{P}_* = \tilde{P}_i \backslash L_i^{\#}$ de $\tilde{P}_i$. La flèche 4 est un isomorphisme car $\bigcup_{i=1}^{s} U_i$ est déconnecté en les U_i qui en sont des unions de composantes connexes par arcs. On obtient alors que la flèche 1 est un isomorphisme et c'est la flèche supérieure du diagramme de l'énoncé. On montre de la même manière que la flèche inférieure de ce diagramme est aussi un isomorphisme. Quant à sa commutativité, elle résulte du même argument élémentaire que dans la démonstration du lemme 4.6. □

Pour caractériser conjointement les groupes d'homologie $H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_*)$ auxquels nous nous sommes ramenés, nous allons utiliser la version en homologie singulière à coefficients entiers d'un isomorphisme envisagé par Jean Leray dans la définition de son opération «cobord» (cf. [Lr] chap. II, n° 19), isomorphisme qui a des propriétés de naturalité et de réduction à un produit-croix dans le cas trivial analogues à celles de l'isomorphisme de Wang. Nos couples s'écrivent, en effet,

$$(5.4) \qquad \begin{cases} (\tilde{P}_i, \tilde{P}_*) = (\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \backslash L_i^{\#}) \\ (\tilde{M}_i, \tilde{M}_*) = (\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^{\#}) \end{cases} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s$$

et l'isomorphisme de Leray porte sur les groupes $H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \backslash L_i^{\#})$ et $H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^{\#})$ sous des conditions concernant les couples $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$ et $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ qui sont données par le lemme suivant. Ce lemme donne aussi des conditions qui assurent la naturalité et la réduction à un produit croix de l'isomorphisme concernant $H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^{\#})$.

LEMME 5.5. *Pour* $1 \leqslant i \leqslant s$, *les couples* $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$ *et* $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ *vérifient les conditions suivantes:*

(i) *$\tilde{P}_i$ et $\tilde{M}_i$ sont des variétés analytiques complexes séparées paracompactes et $L_i^{\#}$ et $M_i^{\#}$ en sont des sous-variétés fermées respectives de codimension complexe pure 1.*

(ii) *La variété $\tilde{M}_i$ est une sous-variété fermée de $\tilde{P}_i$ transverse à $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}_i$ et l'on a $M_i^{\#} = \tilde{M}_i \cap L_i^{\#}$ (cf. fig. 5.1).*

(iii) *On a $(\tilde{M}_i, M_i^{\#}) = (M \times \mathbf{P}_i^1, M \times \{\lambda_i\})$, les facteurs M et $\mathbf{P}_i^1$ sont des variétés analytiques complexes séparées paracompactes et l'égalité est non seulement ensembliste mais aussi valable pour les structures de variété.*

Démonstration. Nous démontrons les points dans l'ordre (iii), (i), (ii):

(iii) L'égalité ensembliste est contenue dans (3.25) et (5.1). Les facteurs M et $\mathbf{P}_i^1$ sont des variétés analytiques complexes en tant qu'ouverts de $\mathscr{M}$ et $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ respectivement. Comme $\mathscr{M}$ et $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sont compactes, M et $\mathbf{P}_i^1$ sont séparées paracompactes car cette propriété se transmet d'une variété à ses sous-variétés: en effet, pour une variété topologique séparée, il est équivalent d'être paracompacte ou d'avoir une base dénombrable d'ouverts pour chacune de ses composantes connexes (cf. [Ms] II.15, theorem 1 et [Bk] I.9.10, propositions 16 et 18). Nous avons d'autre part vu, après (3.5), que les structures de variété de $\tilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ comme sous-variété de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ et comme variété produit coïncident. Quand ensuite on prend le produit de sous-variétés de chacun des facteurs, on obtient bien une variété dont les structures comme sous-variété de $\tilde{\mathscr{M}}$ et comme variété produit coïncident.

(i) Compte tenu de la caractérisation des variétés séparées paracompactes que nous venons de donner, cette propriété se conserve par produit. Les assertions concernant $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ sont alors claires d'après le point (iii). En ce qui concerne $\tilde{P}_i$, nous avons vu que c'est un ouvert de $\tilde{P}$ qui est une variété analytique complexe en tant qu'ouvert de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. fig. 3.2). Comme $\tilde{P}_i$ est donc une sous-variété de la variété compacte $\tilde{\mathbf{P}}^n$, elle est aussi séparée paracompacte puisque, nous l'avons vu, cette propriété se transmet d'une variété à ses sous-variétés. D'autre part, $L_i^{\#}$ est la trace de $\mathscr{L}_i^{\#}$ sur l'ouvert $\tilde{P}$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. fig. 3.2). Comme $\mathscr{L}_i^{\#}$ est une sous-variété fermée de codimension complexe pure 1 dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$, il en est donc de même pour $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}$ donc dans $\tilde{P}_i$.

(ii) L'égalité $M_i^{\#} = \tilde{M}_i \cap L_i^{\#}$ est claire à partir des définitions (cf. figs. 3.2 et 5.1). Pour les autres assertions, constatons que, d'après ces définitions, $\tilde{M}_i$ est la trace de $\tilde{M}$ sur $\tilde{P}_i$ (cf. les mêmes figures). Comme $\tilde{P}_i$ est un ouvert de $\tilde{P}$, il nous suffit donc de voir que $\tilde{M}$ est une sous-variété fermée de $\tilde{P}$ transverse à $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}$. Mais $\tilde{M}$ et $L_i^{\#}$ sont les traces de $\tilde{\mathscr{M}}$ et $\mathscr{L}_i^{\#}$ sur $\tilde{P}$ qui est un ouvert de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. fig. 3.2). Nous sommes donc ramenés à montrer que $\tilde{\mathscr{M}}$ est une sous-variété fermée de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ transverse à $\mathscr{L}_i^{\#}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Le premier point ayant été vu au §3, il nous reste la transversalité à prouver.

Pour cela, constatons que la démonstration du lemme 3.13 prouve en fait les assertions suivantes concernant une sous-variété S de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, indépendamment du fait qu'elle fasse ou non partie d'une stratification:

(5.5.1) si $\mathscr{M}$ est transverse à S dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, alors la transformée totale $\tilde{S}$ de S est une sous-variété de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ transverse à $\tilde{\mathscr{M}}$, ce qui fait que si $\tilde{S} \cap \tilde{\mathscr{M}}$ est non vide, c'est aussi une sous-variété de $\tilde{\mathbf{P}}^n$;

(5.5.2) si, de plus, un hyperplan $\mathscr{K}$ du pinceau Λ est transverse à S dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, alors sa transformée stricte $\mathscr{K}^{\#}$ est transverse dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ à $\tilde{S} \cap \tilde{\mathscr{M}}$ et à $\tilde{S} \setminus \tilde{\mathscr{M}}$ donc aussi à $\tilde{S}$.

Ces assertions nous serviront également au §11. Si nous les appliquons ici avec $S = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et $\mathscr{K} = \mathscr{L}_i^{\#}$, nous trouvons le résultat de transversalité voulu. □

Sous la condition (i) du lemme 5.5, on a, pour tout k, les isomorphismes que nous qualifierons de Leray

$$(5.6) \qquad \begin{cases} \tau_{i,k}\colon H_{k-2}(L_i^{\#}) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \setminus L_i^{\#}) \\ \tau'_{i,k}\colon H_{k-2}(M_i^{\#}) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \setminus M_i^{\#}) \end{cases} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s\,,$$

avec la convention $H_{k-2}(L_i^{\#}) = H_{k-2}(M_i^{\#}) = 0$ pour $k < 2$. On peut décrire informellement ces isomorphismes de la manière suivante: Soit δ_i un $(k-2)$-cycle de $L_i^{\#}$ (cf. fig. 5.1); faisons-le «épaissir» dans $\tilde{P}_i$, chaque point donnant un 2-disque fermé transverse à $L_i^{\#}$ dans $\tilde{P}_i$: ce n'est pas un produit mais un fibré localement trivial; les fibres ont une orientation déduite de celles de $L_i^{\#}$ et $\tilde{P}_i$ qu'on peut suivre continuement le long de δ_i; orientons alors le tout conformément aux orientations de δ_i et de ces fibres: on «obtient» un k-cycle relatif Δ_i de $\tilde{P}_i$ modulo $\tilde{P}_i \setminus L_i^{\#}$; l'isomorphisme de Leray $\tau_{i,k}$ fait correspondre la classe d'homologie de Δ_i à la classe d'homologie de δ_i.

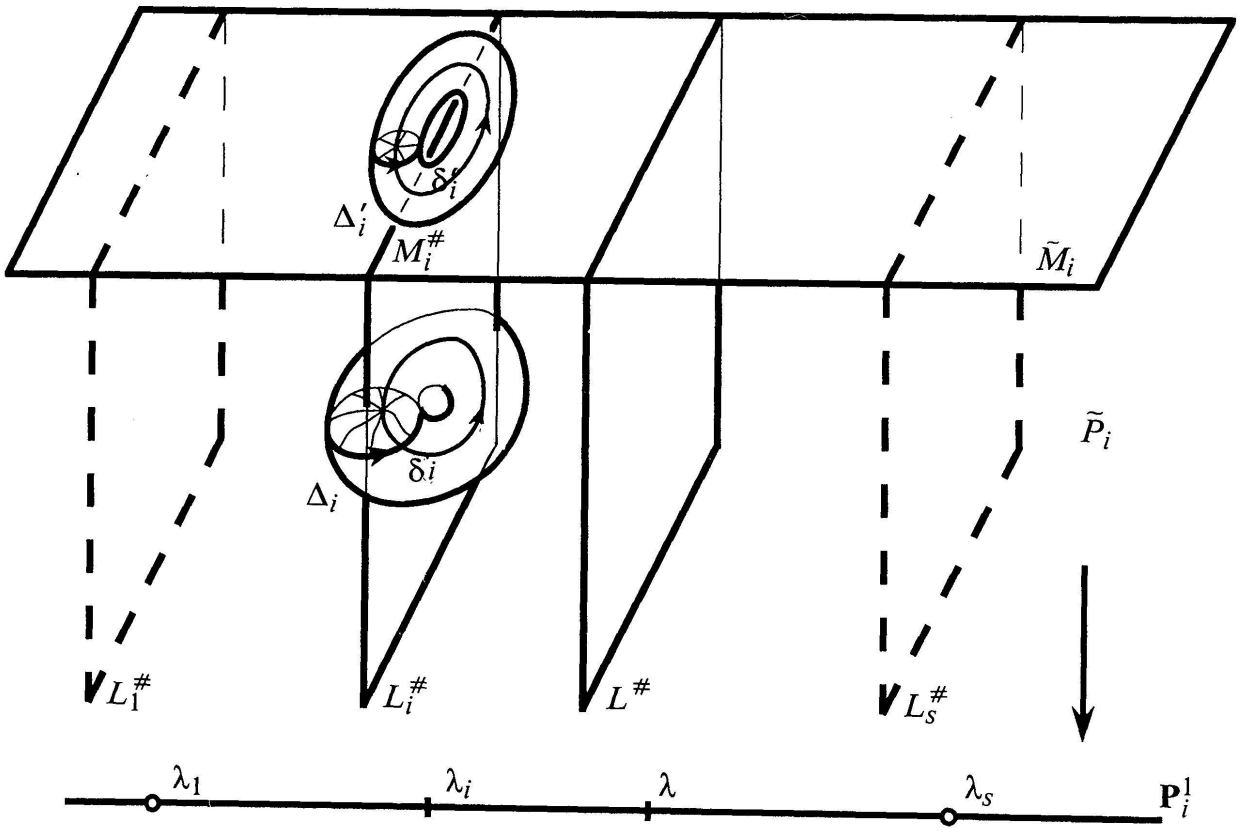


FIGURE 5.1

Le deuxième point clef dans la démonstration du théorème 1.3 est que, de manière analogue à ce qui se passait pour l'isomorphisme de Wang, l'isomorphisme de Leray pour le couple $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ se comporte, sous la condition (ii) du lemme 5.5, *naturellement* par rapport à l'isomorphisme pour le couple $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$. Cela veut dire que le diagramme suivant, où les flèches verticales sont induites par inclusion, est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H_{k-2}(L_i^{\#}) & \overset{\tau_{i,k}}{\tilde{\to}} & H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \backslash L_i^{\#}) \\ \uparrow & \subsetneq & \uparrow \\ H_{k-2}(M_i^{\#}) & \overset{\tau'_{i,k}}{\tilde{\to}} & H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^{\#}) \end{array} \tag{5.7}$$

Ainsi donc, reprenant notre description informelle, si δ_i est homologue dans $L_i^{\#}$ à un cycle δ_i' de $M_i^{\#}$ (compte tenu des isomorphismes (3.29), c'est le cas si l'homomorphisme m_{k-2}^i considéré dans le théorème 1.3 est surjectif), alors Δ_i est homologue dans $\tilde{P}_i$ modulo $\tilde{P}_i \backslash L_i^{\#}$ à un cycle relatif Δ_i' de $\tilde{M}_i$ modulo $\tilde{M}_i \backslash M_i^{\#}$ obtenu en faisant «épaissir» δ_i' dans $\tilde{M}_i$ (cf. fig. 5.1). Cela précise l'assertion de l'introduction selon laquelle, si certains cycles de L_i sont homologues à des cycles de M, alors les perturbations apportées par les hyperplans mauvais peuvent être «poussées» dans l'axe.

Mais, d'autre part, le couple $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$ ayant la forme triviale $(M \times \mathbf{P}_i^1, M \times \{\lambda_i\})$ donnée par le point (iii) du lemme 5.5, l'isomorphisme de Leray $\tau'_{i,k}$ prend la forme triviale d'un produit-croix homologique

$$\tau'_{i,k}(z_i'^{\#}) = z' \times \bar{u}_i \quad \text{pour} \quad z' \in H_{k-2}(M)\ , \tag{5.8}$$

où $\bar{u}_i \in H_2(\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_*^1)$ est la classe fondamentale définissant l'orientation canonique de $\mathbf{P}_i^1$ au voisinage de λ_i (cf. [Gb] chap. 22) et où $z_i'^{\#}$ correspond à z' dans l'isomorphisme induit en homologie de rang $k-2$ par l'identification canonique de M à $M_i^{\#} = M \times \{\lambda_i\}$. On tombe à nouveau sur une forme de la formule de Künneth, cette fois pour le couple de produits $(M \times \mathbf{P}_i^1, M \times \mathbf{P}_*^1)$.

Revenant à notre description informelle, ce qui précède signifie qu'en raison de la forme triviale du couple $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$, l'«épaississement» de δ_i' peut être réalisé comme le produit par un 2-disque fermé convenablement orienté entourant λ_i dans $\mathbf{P}_i^1$ (cf. fig. 5.1). Cela précise l'affirmation de l'introduction selon laquelle les perturbations dues aux hyperplans mauvais qui peuvent être «poussées» dans l'axe s'y «trivialisent».

Nous donnons en annexe des indications sommaires sur la manière dont on peut établir la version de l'isomorphisme de Leray que nous avons

présentée. Nous y justifions en même temps les assertions (5.7) de naturalité et (5.8) de réduction à un produit-croix dans le cas trivial.

Ayant en main les isomorphismes de Leray pour les couples $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$ et $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$, nous allons en déduire, grâce au lemme 5.3, la proposition principale du paragraphe concernant les groupes $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$. Nous aurons à faire intervenir, en connexion avec la formule (5.8), les images des classes fondamentales $\bar{u}_i \in H_2(\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_*^1)$ par les homomorphismes naturels $H_2(\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_*^1) \to H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}_*^1)$; nous les noterons $\bar{w}_i$. Il est plus suggestif géométriquement de considérer

$$(5.9)\qquad \begin{cases} D_1, \ldots, D_s & s \text{ disques fermés} \\ & \text{mutuellement disjoints dans } \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \\ & \text{centrés respectivement en } \lambda_1, \ldots, \lambda_s \\ \partial D_1, \ldots, \partial D_s & \text{leurs frontières respectives} \end{cases}$$

et, pour $1 \leqslant i \leqslant s$,

$$(5.10)\qquad \Omega_i \qquad \text{un 2-cycle fondamental de } D_i \text{ modulo } \partial D_i \text{ compatible avec l'orientation canonique de } \mathbf{P}^1(\mathbf{C}).$$

On a alors, pour $1 \leqslant i \leqslant s$,

$$(5.11)\qquad \bar{w}_i = [\Omega_i]_{(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}_*^1)},$$

classe d'homologie de Ω_i considéré comme 2-cycle relatif de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ modulo $\mathbf{P}_*^1$. D'autre part, de même que dans le lemme 4.18 et la proposition 4.23 nous avons remplacé $L^{\#}$ et $M^{\#}$ par L et M, nous ferons ici figurer directement les L_i et M à la place des $L_i^{\#}$ et $M_i^{\#}$ grâce aux isomorphismes suivants, réciproques des isomorphismes (3.29),

$$(5.12)\qquad \begin{cases} c^i : L_i \xrightarrow{\sim} L_i^{\#} \\ c'^i : M \xrightarrow{\sim} M_i^{\#} = M \times \{\lambda_i\} \end{cases} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s,$$

où c'^i coïncide avec l'identification canonique de M à $M \times \{\lambda_i\}$. Nous pouvons alors définir, pour tout k,

$$(5.13)\qquad \begin{cases} \tau_k : \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) \to H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\ \tau'_k : \oplus^s H_{k-2}(M) \to H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \end{cases}$$

au moyen des formules suivantes utilisant les isomorphismes de Leray (5.6)

$$(5.13.1)\qquad \begin{cases} \tau_k(\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} z_i) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{incl}_*(\tau_{i,k}(c^i_{k-2}(z_i))) \\ \tau'_k(\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} z'_i) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{incl}_*(\tau'_{i,k}(c'^{\,i}_{k-2}(z'_i))) \end{cases}$$

avec la convention d'écriture (2.1) appliquée aux isomorphismes c^i et $c'^{\,i}$ et en notant indistinctement incl_* tous les homomorphismes induits en homologie par inclusion.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition principale de ce paragraphe:

PROPOSITION 5.14. *On a, pour tout k, les isomorphismes τ_k et τ'_k entrant dans le diagramme commutatif suivant*

$$(5.14.1)\qquad \begin{array}{ccc} \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} H_{k-2}(L_i) & \overset{\tau_k}{\tilde{\to}} & H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\ \uparrow \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} m^i_{k-2} & \circlearrowleft & \uparrow \\ \oplus^s H_{k-2}(M) & \overset{\tau'_k}{\tilde{\to}} & H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont naturelles. Nous y avons mis en évidence les homomorphismes m^i_{k-2} intervenant dans l'énoncé du théorème 1.3. Les isomorphismes τ_k et τ'_k sont définis par les formules (5.13.1) qui font intervenir les isomorphismes de Leray (5.6). Pour τ'_k, on a aussi l'expression suivante

$$(5.14.2)\qquad \tau'_k(\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} z'_i) = \sum_{i=1}^{s} z'_i \times \bar{w}_i\,,$$

où $\bar{w}_i \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ est la classe d'homologie d'un «petit» 2-cycle relatif Ω_i définissant au voisinage de λ_i l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Les $\bar{w}_i$ sont plus précisément définis par (5.9), (5.10) et (5.11). Nous convenons que $H_k(\,.\,) = 0$ pour $k < 0$.

Démonstration. Si l'on prend pour τ_k et τ'_k les homomorphismes définis en (5.13) et (5.13.1), le diagramme de l'énoncé est l'enveloppe externe du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{s} c_{k-2}^{i}} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i^{\#}) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{s} \tau_{i,k}} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*) & \to & H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\oplus^{s} H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{s} c_{k-2}^{\prime i}} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(M_i^{\#}) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{s} \tau'_{i,k}} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_*) & \to & H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)
\end{array}$$

où toutes les flèches non nommées sont naturelles. Pour montrer la première partie de la proposition, il suffit alors de voir que les flèches horizontales sont des isomorphismes et que les trois rectangles sont commutatifs. Dans le rectangle de gauche, les flèches horizontales sont sommes directes d'isomorphismes induits par les isomorphismes (5.12); ce rectangle est commutatif car ces isomorphismes commutent aux inclusions. Le rectangle de droite est celui du lemme 5.3 qui contient les assertions nécessaires le concernant. Les faits significatifs sont rassemblés dans le rectangle central. Ses flèches horizontales sont, compte tenu des égalités (5.4), sommes directes pour $1 \leqslant i \leqslant s$ des isomorphismes de Leray (5.6). Il est commutatif en raison de la naturalité de l'isomorphisme de Leray par rapport à la trace sur une sous-variété fermée transversale, naturalité qui s'exprime dans la commutativité des diagrammes (5.7). Ce qui concerne le diagramme (5.14.1) se trouve ainsi établi. Pour ce qui est de la formule (5.14.2), elle résulte de la réduction à un produit-croix de l'isomorphisme de Leray dans le cas trivial, donnée par la formule (5.8). En effet, si l'on substitue les résultats de la formule (5.8) pour $1 \leqslant i \leqslant s$ dans la formule (5.13.1) concernant τ'_k, on trouve, compte tenu de ce que c'^{i} coïncide avec l'identification canonique de M à $M \times \{\lambda_i\}$,

$$\tau'_k\left(\bigoplus_{i=1}^{s} z'_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{incl}_*(z'_i \times \bar{u}_i)$$

et comme $\bar{w}_i = \mathrm{incl}_*(\bar{u}_i)$, il ne reste plus qu'à utiliser la naturalité du produit-croix pour aboutir à la formule de l'énoncé. □

Remarque 5.15. Le même raisonnement que pour le lemme 5.3, mais dans une situation plus simple, montre, de manière classique, qu'on a, pour tout k, l'isomorphisme naturel

$$\bigoplus_{i=1}^{s} H_k(\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_*^1) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}_*^1)$$

somme des homomorphismes induits par inclusion. Il en résulte que $H_k(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}_*^1) = 0$ pour $k \neq 2$ et que $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}_*^1)$ est libre sur les $\bar{w}_i$ qui interviennent dans la proposition 5.14. La formule (5.14.2) montre alors que l'isomorphisme τ'_k de cette proposition n'est autre que celui donné par la formule de Künneth pour le couple de produits $(M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), M \times \mathbf{P}_*^1)$.

Nous allons terminer ce paragraphe de manière similaire au précédent, en remplaçant $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ dans les suites exactes d'homologie relative de ces couples par les expressions que la proposition 5.14 en donne. Nous tirerons aussi les conséquences de la formule explicite (5.14.2) dans ce contexte. Pour cela, il nous faut introduire

(5.16) $w \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique.

En relation avec la description géométrique (5.9) à (5.11) pour les $\bar{w}_i$, il sera souvent plus parlant d'écrire

(5.17) $$w = [\Omega] ,$$

où Ω est un 2-cycle appartenant à w. La classe w interviendra à travers le lemme suivant:

LEMME 5.18. *Si* $\varepsilon: H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \to H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ *est l'homomorphisme naturel, alors on a*

$$\varepsilon(w) = \bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s .$$

Démonstration. En se servant des expressions (5.11) et (5.17), la formule ci-dessus s'écrit

$$[\Omega]_{(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)} = \sum_{i=1}^{s} [\Omega_i]_{(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)} ,$$

ce qui est géométriquement clair. Voici toutefois une démonstration en bonne et due forme:

Considérons, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) & \xrightarrow{\varepsilon} & H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*) \\ \downarrow \alpha_i & \swarrow \beta_i & \uparrow \gamma_i \\ & \overset{\delta_i}{\tilde{\leftarrow}} & \\ H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_i\}) & & H_2(\mathbf{P}^1_i, \mathbf{P}^1_*) \end{array}$$

où toutes les flèches sont induites par inclusion. La flèche δ_i est un isomorphisme d'excision. Rappelons que $\bar{w}_i = \gamma_i(\bar{u}_i)$ où $\bar{u}_i$ est la classe fondamentale de $H_2(\mathbf{P}^1_i, \mathbf{P}^1_*)$ compatible avec l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1_i$. Mais, comme celle-ci est induite par l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on a $\delta_i(\bar{u}_i) = \alpha_i(w)$. On en tire les égalités

$$\beta_i(\varepsilon(w)) = \delta_i(\bar{u}_i) \quad \text{pour tout} \quad i .$$

La remarque 5.15 donne d'autre part l'isomorphisme naturel

$$\gamma: \bigoplus_{i=1}^{s} H_2(\mathbf{P}^1_i, \mathbf{P}^1_*) \xrightarrow{\sim} H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$$

qui est somme des γ_i et on a $\beta_i \circ \gamma_j = 0$ pour $j \neq i$ puisque $\mathbf{P}^1_j \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_i\}$. Si donc $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ est identifié à $\bigoplus_{i=1}^{s} H_2(\mathbf{P}^1_i, \mathbf{P}^1_*)$ au moyen de γ, les γ_i en sont les sections et les β_i sont, aux isomorphismes δ_i près, les projections associées. Il en résulte qu'on a

$$\beta_i(\bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s) = \delta_i(\bar{u}_i) \quad \text{pour tout} \quad i ,$$

et il en résulte aussi que ces égalités comparées aux précédentes impliquent l'égalité $\varepsilon(w) = \bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s$. □

La considération simultanée des suites exactes d'homologie relative des couples $(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ fait intervenir le diagramme commutatif d'inclusions suivant:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}_* & \overset{i}{\hookrightarrow} & \tilde{P} \\ \uparrow h^* & & \uparrow h \\ \tilde{M}_* & \overset{i'}{\hookrightarrow} & \tilde{M} \end{array} \tag{5.19}$$

Les inclusions i, i' et h y sont nommées pour la première fois mais h^* a déjà été nommée en (4.22) et intervient dans la proposition 4.23.

Nous pouvons maintenant énoncer le corollaire de la proposition 5.14 que ces suites exactes permettent d'obtenir:

COROLLAIRE 5.20. *On a les deux suites exactes longues entrant dans le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \to & \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} H_{k-1}(L_i) & \overset{\zeta_{k+1}}{\to} & H_k(\tilde{P}_*) & \overset{i_k}{\to} & H_k(\tilde{P}) & \overset{\eta_k}{\to} & \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} H_{k-2}(L_i) & \overset{\zeta_k}{\to} & H_{k-1}(\tilde{P}_*) & \to \ldots \\ & \uparrow \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} m^i_{k-1} & & \uparrow h^*_k & & \uparrow h_k & & \uparrow \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} m^i_{k-2} & & \uparrow h^*_{k-1} & \end{array} \tag{5.20.1}$$

$$\ldots \to \oplus^s H_{k-1}(M) \overset{\zeta'_{k+1}}{\to} H_k(\tilde{M}_*) \overset{i'_k}{\to} H_k(\tilde{M}) \overset{\eta'_k}{\to} \oplus^s H_{k-2}(M) \overset{\zeta'_k}{\to} H_{k-1}(\tilde{M}_*) \to \ldots$$

où nous avons appliqué la convention d'écriture (2.1) aux homomorphismes induits par les inclusions i, i', h^* et h qui forment le diagramme (5.19). Nous y avons mis en évidence les homomorphismes m^i_{k-1} et m^i_{k-2} induits par les inclusions m^i qui figurent dans l'énoncé du théorème 1.3. Toutes les flèches verticales sont donc naturelles. On a de plus, pour ζ'_k, la formule explicite

$$\zeta'_k(\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} z'_i) = (-1)^k \sum_{i=1}^{s} z'_i \times \partial \bar{w}_i \,, \tag{5.20.2}$$

où $\bar{w}_i \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ est la classe d'homologie d'un «petit» 2-cycle relatif Ω_i définissant au voisinage de λ_i l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Les $\bar{w}_i$ sont plus précisément définis par (5.9), (5.10) et (5.11). Enfin, η'_k vérifie la relation suivante

$$\eta'_k(z' \times w) = \oplus^s z' \quad \text{pour} \quad z' \in H_{k-2}(M) \,, \tag{5.20.3}$$

où $w \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ *est, conformément à la définition (5.16), la classe fondamentale de* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ *compatible avec son orientation canonique. L'homomorphisme* η'_k *est d'ailleurs complètement déterminé par cette formule car il s'annule sur les éléments de la forme* $z'' \times v$, *avec* $z'' \in H_k(M)$ et $v \in H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$, *et ceux-ci décrivent un supplémentaire dans* $H_k(\tilde{M})$ *des éléments de la forme* $z' \times w$ *avec* $z' \in H_{k-2}(M)$. *Nous convenons toujours que* $H_k(\ .\ ) = 0$ *pour* $k < 0$.

Démonstration. On obtient le diagramme (5.20.1) en substituant $\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} H_{k-2}(L_i)$ et $\oplus^s H_{k-2}(M)$ respectivement à $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ pour tout k dans le diagramme commutatif constitué par les suites exactes d'homologie relative des couples $(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ reliées entre elles par les homomorphismes naturels. Cette substitution est permise par les isomorphismes τ_k et τ'_k de la proposition 5.14; ce faisant, la flèche naturelle $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \to H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ est transmuée en l'homomorphisme naturel $\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} m^i_{k-2}$ en raison de la commutativité du diagramme (5.14.1). Cela donne bien le diagramme (5.20.1).

D'après ces substitutions, l'homomorphisme ζ'_k est obtenu en composant l'homorphisme bord $\partial: H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*) \to H_{k-1}(\tilde{M}_*)$ avec l'isomorphisme τ'_k. La formule (5.14.2) pour τ'_k donne alors

$$\zeta'_k(\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} z'_i) = \partial(\tau'_k(\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} z'_i)) = \partial(\sum_{i=1}^{s} z'_i \times \bar{w}_i) .$$

Mais on a

$$\partial(z'_i \times \bar{w}_i) = (-1)^{k-2} z'_i \times \partial \bar{w}_i ,$$

en notant aussi ∂ l'homomorphisme bord $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*) \to H_2(\mathbf{P}^1_*)$ (cf. [Sp] 5.3.15). La formule (5.20.2) en résulte.

L'homorphisme η'_k est obtenu en faisant suivre l'homomorphisme naturel $e'_k: H_k(\tilde{M}) \to H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ de l'isomorphisme réciproque $(\tau'_k)^{-1}$ de τ'_k. Alors, par naturalité du produit-croix, on a, pour $z' \in H_{k-2}(M)$,

$$\eta'_k(z' \times w) = (\tau'_k)^{-1}(e'_k(z' \times w)) = (\tau'_k)^{-1}(z' \times \varepsilon(w)) ,$$

où ε est l'homomorphisme naturel $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \to H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$. Mais, d'après le lemme 5.18 et par bilinéarité du produit-croix

$$z' \times \varepsilon(w) = z' \times (\bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s) = z' \times \bar{w}_1 + \ldots + z' \times \bar{w}_s .$$

La formule (5.20.3) résulte alors, elle aussi, de la formule (5.14.2).

Par ailleurs, la formule de Künneth pour $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ donne un isomorphisme

$$(H_k(M) \otimes H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))) \oplus (H_{k-2}(M) \otimes H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{M})$$

qui est le produit-croix homologique dont la restriction aux éléments décomposables s'écrit $z' \otimes v \mapsto z' \times v$. Comme $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ est libre sur la classe fondamentale w, l'image de $H_{k-2}(M) \otimes H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ par cet isomorphisme est précisément formée des éléments de $H_k(\tilde{M})$ de la forme $z' \times w$ avec $z' \in H_{k-2}(M)$. Un supplémentaire des éléments de cette

forme est donc donné par l'image de $H_k(M) \otimes H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$. Mais les éléments de ce supplémentaire sont eux-mêmes de la forme $z' \times \hat{\lambda}$ où $z' \in H_k(M)$ et où $\hat{\lambda}$ est la classe d'homologie du 0-simplexe singulier de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ d'image λ, classe sur laquelle $H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ est libre. Si donc $\tilde{\lambda}$ est la classe d'homologie dans $H_0(\mathbf{P}^1_*)$ du même 0-simplexe, on a, par naturalité du produit-croix,

$$z' \times \hat{\lambda} = i'_k(z' \times \tilde{\lambda})$$

et η'_k s'annule donc dessus d'après l'exactitude de la ligne inférieure du diagramme (5.20.1). Cela montre la dernière assertion du corollaire 5.20. □

Dans la suite, nous ne nous servirons de ce qui a été fait dans ce paragraphe qu'à travers le corollaire 5.20 (excepté que, de manière indépendante de tout le reste, nous renverrons aux lemmes élémentaires 5.15 et 5.18 pour la démonstration du lemme élémentaire 7.7). On retrouve bien, dans ce corollaire, le deuxième point clef de la démonstration du théorème 1.3 dont nous avons parlé au moment de la présentation informelle de l'isomorphisme de Leray. En effet, d'après les démonstrations de la proposition 5.14 et du corollaire 5.20, la naturalité de l'isomorphisme de Leray par rapport à une sous-variété fermée transverse s'exprime dans la commutativité du diagramme (5.20.1) et la réduction à un produit-croix de l'isomorphisme de Leray dans le cas trivial est manifestée par les formules explicites (5.20.2) et (5.20.3).

6. Retour de l'éclaté à l'espace initial

Dans ce paragraphe, nous étudions d'un point de vue homologique la relation entre, d'une part, les éléments $\tilde{P}, \tilde{M}, L^{\#}, L_i^{\#}, M^{\#}, M_i^{\#}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ sur lesquels a porté notre étude aux paragraphes précédents et, d'autre part, les éléments P, L, L_i, M dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ sur lesquels porte le théorème 1.3 (cf. fig. 3.2). Nous nous étions en effet placés dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ pour rendre compte de l'«isotopie» décrite informellement dans l'introduction et l'éclatement de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de l'axe $\mathscr{M}$ du pinceau Λ avait été motivée par la nécessité de «répéter» cet axe. Toute l'étude géométrique qui précède a été faite dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Nous allons maintenant «redescendre» de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ à $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ au moyen du morphisme d'éclatement f. Comme nous ne nous intéressons qu'à ce qui se passe en dehors de A dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et de sa transformée totale $\tilde{A}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$, nous allons en fait étudier la géométrie de

(6.1) $f\colon \tilde{P} \to P$ application induite par le morphisme d'éclatement f

(cf. fig. 3.1 et 3.2).

Nous avons déjà vu en (3.29) que f donc f induisent les isomorphismes suivants:

$$(6.2)\qquad \begin{cases} L^{\#} \xrightarrow{\sim} L \\ L_i^{\#} \xrightarrow{\sim} L_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s \\ M^{\#} \xrightarrow{\sim} M \\ M_i^{\#} \xrightarrow{\sim} M \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s\ . \end{cases}$$

Nous en avons en fait déjà tenu compte dans les propositions principales des §§4 et 5 en y faisant directement intervenir L, L_i et M à la place de $L^{\#}, L_i^{\#}$ et $M^{\#}, M_i^{\#}$.

Sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, l'application f coïncide avec la *première projection*

$$(6.3)\qquad f' : \tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to M$$

puisque, nous l'avons vu au §3, le morphisme f coïncide avec la première projection sur $\tilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. La formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et la manière dont la projection f' agit en homologie sur les produits-croix (cf. [Sp] 5.3.12) donnent alors, pour tout k, la suite exacte courte scindée suivante

$$(6.4)\qquad 0 \to H_{k-2}(M) \xrightarrow{\sigma'_k} H_k(\tilde{M}) \xrightarrow{f'_k} H_k(M) \to 0\ ,$$

dans laquelle on a appliqué la convention d'écriture (2.1) à f' et où σ'_k est donné par

$$(6.5)\qquad \begin{aligned} \sigma'_k :\ H_{k-2}(M) &\to H_k(\tilde{M}) \\ z' &\mapsto z' \times w\ , \end{aligned}$$

w étant la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique, conformément à la définition (5.16); on convient que $H_{k-2}(M) = 0$ pour $k < 2$.

Il nous reste à voir comment se transforme $\tilde{P}$. Nous avons noté au §3 que le morphisme f induit un isomorphisme analytique de $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathscr{M}}$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \mathscr{M}$. L'application f réalise donc un isomorphisme de $\tilde{P} \setminus \tilde{M}$ sur $P \setminus M$. Nous venons de constater, d'autre part, qu'elle réduit $\tilde{M}$ en M suivant la première projection f'. Nous allons voir que, globalement, elle se comporte, en homologie, comme une simple juxtaposition de ces deux phénomènes.

Définissons, en effet, pour tout k, l'homomorphisme σ_k comme composé de σ'_k suivi de l'homomorphisme $H_k(\tilde{M}) \to H_k(\tilde{P})$ induit par inclusion, ce qu'on peut représenter par la commutation du diagramme

(6.6)
$$\begin{array}{ccc} & & H_k(\tilde{P}) \\ & \overset{\sigma_k}{\nearrow} & \circlearrowleft \uparrow h_k \\ H_{k-2}(M) & \overset{\sigma'_k}{\to} & H_k(\tilde{M}) \end{array}$$

où h_k est, conformément à la convention (2.1), induit par l'inclusion h nommée en (5.19). Il est plus parlant d'écrire, en posant $w = [\Omega]$ comme en (5.17),

(6.7) $\qquad \sigma_k([\eta]) = [\eta \times \Omega]\tilde{P} \qquad$ pour tout $\quad (k-2)$-cycle η de M ,

avec un produit-croix homologique défini au niveau des cycles (cf. [Gb] (29.27)). On peut dire que σ_k fait correspondre à tout élément de $H_{k-2}(M)$ son «produit-croix plongé» par la classe fondamentale w de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

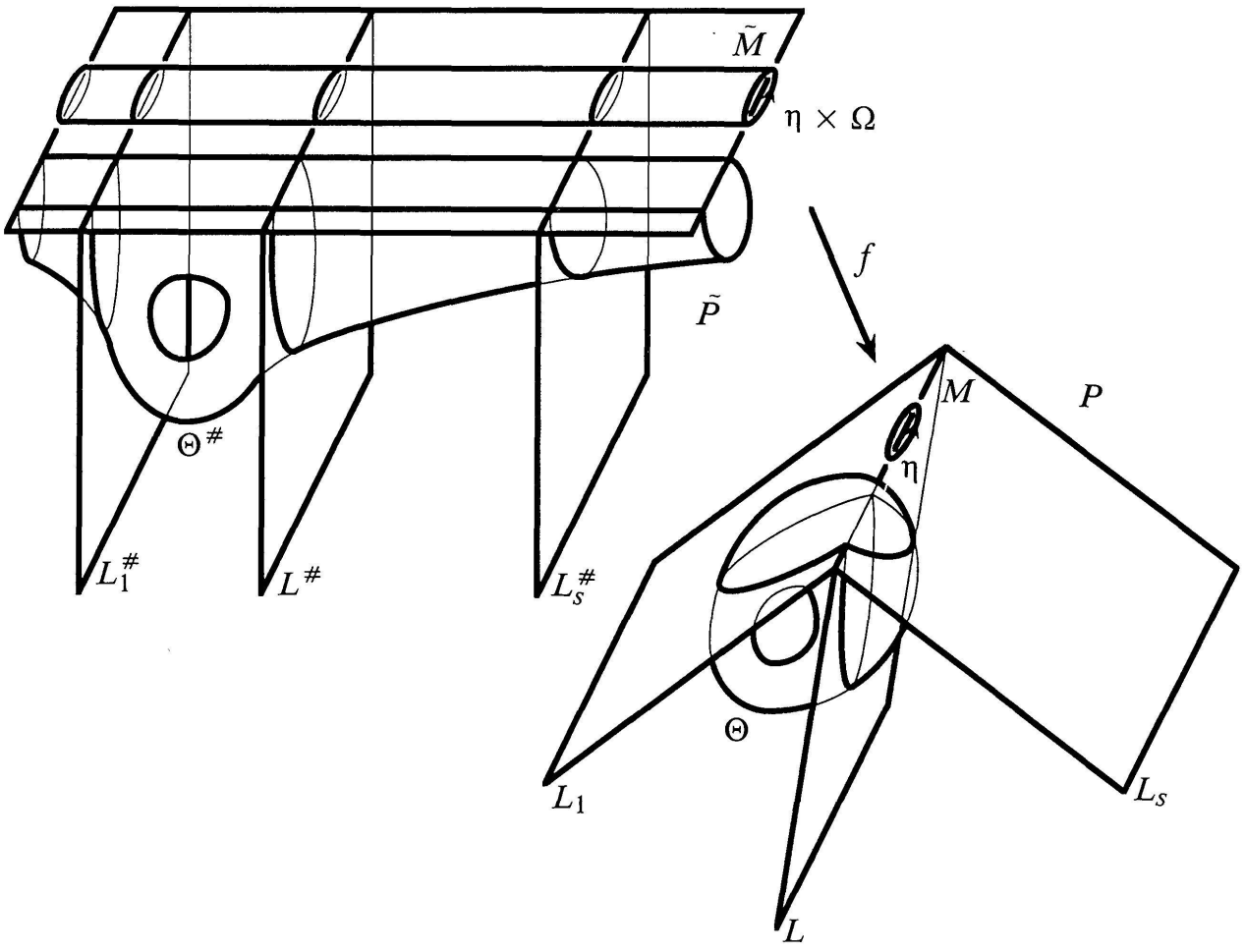


FIGURE 6.1

Le comportement dont nous avons parlé est alors décrit par la proposition suivante:

PROPOSITION 6.8. *Pour tout k, l'homomorphisme σ_k défini ci-dessus entre dans la suite exacte courte scindée suivante:*

$$0 \to H_{k-2}(M) \xrightarrow{\sigma_k} H_k(\tilde{P}) \xrightarrow{f_k} H_k(P) \to 0$$

où f_k est, suivant la convention (2.1), induit par l'application f définie en (6.1) comme restriction du morphisme d'éclatement. Nous convenons que $H_{k-2}(M) = 0$ pour $k < 2$.

Démonstration. Elle est faite dans [Ch2] proposition 4 qui d'ailleurs s'inspire de [A – F2] §4, theorem 2 et y renvoie pour partie. □

La signification d'une partie du contenu de la proposition 6.8 peut être informellement décrite comme suit: Tout k-cycle de P est homologue à un cycle Θ qui est l'image par f d'un k-cycle $\Theta^{\#}$ de $\tilde{P}$ (cf. fig. 6.1) et les seuls k-cycles de $\tilde{P}$ qui soient «ratatinés» par f sont, à homologie près, les «transformées totales» $\eta \times \Omega$ de $(k-2)$-cycles η de M, produits-croix de η par un 2-cycle fondamental Ω de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Nous rassemblons, pour finir, le contenu de ce paragraphe dans le corollaire suivant qui est clair à partir de la suite exacte (6.4) et de la proposition 6.8:

COROLLAIRE 6.9. *On a, pour tout k, les deux suites exactes courtes scindées suivantes réunies par les homomorphismes naturels en un diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma_k} & H_k(\tilde{P}) & \xrightarrow{f_k} & H_k(P) & \to & 0 \\ & & \uparrow \mathrm{Id} & \subset & \uparrow h_k & \subset & \uparrow & & \\ 0 & \to & H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma'_k} & H_k(\tilde{M}) & \xrightarrow{f'_k} & H_k(M) & \to & 0 \end{array} \tag{6.9.1}$$

Rappelons (cf. (6.5)) que l'homomorphisme σ'_k est donné par

$$\sigma'_k(z') = z' \times w \quad \text{pour} \quad z' \in H_{k-2}(M)\,, \tag{6.9.2}$$

w étant la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique. Rappelons aussi (cf. (6.6)) que σ_k est alors précisément défini par la commutation du carré de gauche de ce diagramme et qu'une écriture plus parlante géométriquement en est donnée par (6.7). Rappelons enfin que nous utilisons la convention d'écriture (2.1) que nous avons appliquée à l'inclusion h nommée en (5.19) et aux applications f et f' introduites en (6.1) et (6.3) qui sont des restrictions convenables du morphisme d'éclatement, étant entendu que f' coïncide avec la première projection de $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Nous convenons, comme d'habitude, que $H_{k-2}(M) = 0$ pour $k < 2$. □

7. Assertion de surjectivité du théorème 1.3

Dans ce paragraphe, nous introduisons le plus économiquement possible, et pour des valeurs convenables de p, des hypothèses sur les homomorphismes m_p et m'_p induits en homologie de rang p par les inclusions $m: M \hookrightarrow L$ et $m': M \hookrightarrow L_i$ (cf. fig. 3.2) de manière à aboutir à la conclusion de surjectivité du théorème 1.3 concernant l'homomorphisme l_k induit en homologie de rang k par l'inclusion $l: L \hookrightarrow P$. L'étude que nous avons menée jusqu'ici l'a été sans faire de telles hypothèses qui portent donc sur la comparaison entre les groupes d'homologie des sections de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ par l'axe $\mathscr{M}$ du pinceau $\wedge$, d'une part, et par les hyperplans générique $\mathscr{L}$ et exceptionnels $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$ de ce pinceau, d'autre part. Mais nous avons fait en sorte que, dans les propositions auxquelles nous avons abouti, les homomorphismes m_p et m'_p qui relient ces groupes d'homologie apparaissent clairement.

Pour nous servir du cadre géométrique posé aux paragraphes précédents, nous considérerons l'inclusion $l: L \hookrightarrow P$ au travers du détour matérialisé par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}_* & \overset{i}{\hookrightarrow} & \tilde{P} \\ \uparrow j & \circlearrowright & \downarrow f \\ L & \overset{l}{\hookrightarrow} & P \end{array} \tag{7.1}$$

(cf. fig. 3.2). Dans ce diagramme, l'application j, définie en (4.21), est composée de l'inclusion $L^{\#} \hookrightarrow \tilde{P}_*$ et de l'isomorphisme $L \xrightarrow{\sim} L^{\#}$ réciproque de l'isomorphisme (3.29) induit par f; elle intervient dans la proposition 4.23. L'inclusion i, nommée en (5.19), intervient dans le corollaire 5.20. L'application f, introduite en (6.1), est induite par le morphisme d'éclatement f; elle intervient dans le corollaire 6.9. En fait, nous ne nous servirons dans tout le §7 que de la commutativité du diagramme (7.1) et des propositions terminales des §§4, 5 et 6 qui sont celles que nous venons de citer. Une exception non significative est celle du lemme élémentaire 7.7 pour la démonstration duquel il nous sera commode de renvoyer aux lemmes élémentaires 5.15 et 5.18.

En ce qui concerne les homomorphismes induits en homologie, le diagramme (7.1) donne, pour tout k, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{P}) \\ \uparrow j_k & \subsetneq & \downarrow f_k \\ H_k(L) & \xrightarrow{l_k} & H_k(P) \end{array} \tag{7.2}$$

écrit avec la convention (2.1).

LEMME 7.3. *Pour que l_k soit surjectif pour un k donné, il faut et il suffit que:*

(i) *f_k soit surjectif;*

(ii) $\operatorname{Im} i_k + \operatorname{Ker} f_k = H_k(\tilde{P})$;

(iii) $\operatorname{Im} j_k + \operatorname{Ker} (f_k \circ i_k) = H_k(\tilde{P}_*)$.

Démonstration. C'est une itération du lemme algébrique suivant qui, plus loin, nous servira aussi à l'envers:

LEMME 7.4. *Etant donné une suite $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ de modules et d'homomorphismes, pour que $v \circ u$ soit surjectif, il faut et il suffit que v soit surjectif et que* $\operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} v = F$.

Démonstration. C'est une vérification sans détours qui est laissée au lecteur. □

Pour en déduire le lemme 7.3, on applique le lemme 7.4 successivement avec $u = j_k$ et $v = f_k \circ i_k$ puis avec $u = i_k$ et $v = f_k$. □□

Nous allons maintenant chercher des conditions suffisantes pour que les conditions du lemme 7.3 soient satisfaites.

LEMME 7.5. *La condition (i) du lemme 7.3 est toujours vérifiée.*

Démonstration. C'est contenu dans la suite exacte de la proposition 6.8 qui est aussi la suite exacte supérieure du corollaire 6.9. □

Nous examinons la condition (iii) du lemme 7.3 avant la condition (ii):

LEMME 7.6. *Pour que la condition (iii) du lemme 7.3 soit satisfaite pour un k donné, il suffit que m_{k-1} soit surjectif.*

Démonstration. Nous allons chercher à satisfaire à une condition plus forte que la condition (iii) du lemme 7.3 mais plus simple, à savoir:

$$\operatorname{Im} j_k + \operatorname{Ker} i_k = H_k(\tilde{P}_*). \tag{7.6.1}$$

Nous allons utiliser la partie suivante du diagramme de la proposition 4.23

$$\begin{array}{ccccc} H_k(L) & \overset{j_k}{\to} & H_k(\tilde{P}_*) & \overset{\mu_k}{\to} & H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \\ & & \uparrow h_k^* & \curvearrowleft & \uparrow m_{k-1} \otimes \mathrm{Id} \\ & & H_k(\tilde{M}_*) & \overset{\mu'_k}{\to} & H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \end{array} \qquad (7.6.2)$$

$$\chi'_k$$

et la commutativité du diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} H_k(\tilde{P}_*) & \overset{i_k}{\to} & H_k(\tilde{P}) \\ \uparrow h_k^* & & \uparrow h_k \\ H_k(\tilde{M}_*) & \overset{i'_k}{\to} & H_k(\tilde{M}) \end{array} \qquad (7.6.3)$$

donné en homologie par le carré commutatif (5.19) et qui fait partie du diagramme du corollaire 5.20. D'après l'exactitude de la ligne supérieure de (7.6.2) donnée par la proposition 4.23, on a

$$\mathrm{Im}\, j_k = \mathrm{Ker}\, \mu_k \ .$$

Mais, *si* m_{k-1} *est surjectif,* il en est de même de $m_{k-1} \otimes \mathrm{Id}$ (cf. [Sp] 5.1.4), donc de $\mu_k \circ (h_k^* \circ \chi'_k)$ qui lui est égal puisque le produit-croix χ'_k est une section de μ'_k d'après la proposition 4.23. Alors, d'après le lemme 7.4, on a

$$\mathrm{Ker}\, \mu_k + \mathrm{Im}\, (h_k^* \circ \chi'_k) = H_k(\tilde{P}_*) \ .$$

Pour obtenir la relation (7.6.1) lorsque m_{k-1} est surjectif, il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{Ker}\, i_k \supset \mathrm{Im}\, (h_k^* \circ \chi'_k) \ ,$$

c'est-à-dire que

$$i_k \circ h_k^* \circ \chi'_k = 0 \ . \qquad (7.6.4)$$

Mais

$$i_k \circ h_k^* \circ \chi'_k = h_k \circ i'_k \circ \chi'_k$$

d'après la commutativité de (7.6.3), et i'_k va de $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ vers $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, ce qui fait que, sur un élément décomposable $z' \otimes u$ de $H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$, on a, d'après la naturalité du produit-croix,

$$(i'_k \circ \chi'_k)\,(z' \otimes u) = i'_k(z' \times u) = z' \times \upsilon \ ,$$

où υ est l'image de u par l'homomorphisme naturel $H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$. Comme $H_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = 0$, cela montre que

$$i'_k \circ \chi'_k = 0$$

et implique donc l'égalité (7.6.4). La relation (7.6.1) se trouve ainsi établie dans le cas où m_{k-1} est surjectif et le lemme est démontré. □

Il nous reste à examiner la condition (ii) du lemme 7.3. Nous serons amenés, pour cela, à utiliser simultanément la proposition 4.23, le corollaire 5.20 et le corollaire 6.9 et nous aurons aussi besoin du lemme suivant:

LEMME 7.7. *Les classes* $\bar{w}_i \in H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$, *avec* $1 \leqslant i \leqslant s$, *qui interviennent dans la proposition 5.14 et son corollaire 5.20 vérifient les propriétés suivantes:*

(i) $\partial\bar{w}_1 + \ldots + \partial\bar{w}_s = 0$

(ii) $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ *est libre sur* $\partial\bar{w}_1, \ldots, \partial\bar{w}_{s-1}$

(rappelons que nous avons supposé que $s \geqslant 2$*).*

Démonstration. Ces assertions sont en fait géométriquement claires à partir de la description des $\bar{w}_i$ donnée par (5.9), (5.10) et (5.11). Voici toutefois une démonstration en forme: Considérons la partie suivante de la suite exacte d'homologie relative du couple $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$:

$$H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \xrightarrow{\varepsilon} H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*) \xrightarrow{\partial} H_1(\mathbf{P}^1_*) \to H_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = 0 .$$

D'après le lemme 5.18, on a

$$\bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s = \varepsilon(w) ,$$

où w est le générateur de $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ compatible avec l'orientation canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. La relation (i) résulte alors de l'exactitude de la suite. Cette suite montre aussi que ∂ induit un isomorphisme

$$\bar{\partial}: H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)/\operatorname{Ker}\partial \xrightarrow{\sim} H_1(\mathbf{P}^1_*) ,$$

où $\operatorname{Ker}\partial$ est engendré par $\varepsilon(w) = \bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_s$. Mais, d'après la remarque 5.15, $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1_*)$ est libre sur $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_s$. Une vérification algébrique simple conduit alors à la propriété (ii). □

Des conditions suffisantes pour que la condition (ii) du lemme 7.3 soit satisfaite sont énoncées dans le lemme ci-dessous et apparaissant naturellement au cours de sa démonstration:

LEMME 7.8. *Pour que la condition (ii) du lemme 7.3 soit satisfaite pour un* k *donné, il suffit que* m^i_{k-2} *soit surjectif pour* $1 \leqslant i \leqslant s$ *et que* m_{k-2} *soit injectif.*

Démonstration. Nous allons utiliser, pour commencer, les diagrammes des corollaires 6.9 et 5.20 dont nous rappelons les régions qui nous serviront:

$$\begin{array}{ccccc} H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma_k} & H_k(\tilde{P}) & \xrightarrow{f_k} & H_k(P) \\ \uparrow \mathrm{Id} & \subset & \uparrow h_k & & \\ H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma'_k} & H_k(\tilde{M}) & & \end{array} \tag{7.8.1}$$

$$H_k(\tilde{P}_*) \xrightarrow{i_k} H_k(\tilde{P}) \xrightarrow{\eta_k} \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) \xrightarrow{\zeta_k} H_{k-1}(\tilde{P}_*)$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow h_k & \subset & \uparrow \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2} & \subset & \uparrow h^*{}_{k-1} \\ H_k(\tilde{M}) & \xrightarrow{\eta'_k} & \oplus^s H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\zeta'_k} & H_{k-1}(\tilde{M}_*) \end{array} \tag{7.8.2}$$

D'après l'exactitude des lignes supérieures de (7.8.1) et (7.8.2) donnée par les corollaires 6.9 et 5.20, on a

$$\operatorname{Ker} f_k = \operatorname{Im} \sigma_k \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} i_k = \operatorname{Ker} \eta_k \, .$$

La condition (ii) du lemme 7.3 est donc équivalente à

$$\operatorname{Im} \sigma_k + \operatorname{Ker} \eta_k = H_k(\tilde{P}) \, . \tag{7.8.3}$$

Or, d'après le lemme 7.4, cette relation est elle-même équivalente à la surjectivité de $\eta_k \circ \sigma_k$ considéré comme un homomorphisme de $H_{k-2}(M)$ dans $\operatorname{Im} \eta_k$. On est donc ramené à montrer que

$$\operatorname{Im} (\eta_k \circ \sigma_k) = \operatorname{Im} \eta_k \, . \tag{7.8.4}$$

Comme l'exactitude de la ligne supérieure de (7.8.2) donne

$$\operatorname{Im} \eta_k = \operatorname{Ker} \zeta_k \, ,$$

nous sommes alors conduits à caractériser les éléments de $\operatorname{Ker} \zeta_k$. En raison de la commutativité de (7.8.2) et de la formule explicite pour ζ'_k données par le corollaire 5.20, il est naturel de tenter de le faire sous l'hypothèse suivante:

Supposons que m^i_{k-2} *soit surjectif pour tout* i.

Soit

$$\bigoplus_{i=1}^{s} z_i \in \operatorname{Ker} \zeta_k \, .$$

Avec l'hypothèse que nous venons de faire, on a

$$\bigoplus_{i=1}^{s} z_i = \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z'_i) \quad \text{avec} \quad z'_i \in H_{k-2}(M) \, ,$$

donc, en se servant des faits mentionnés,

$$0 = \zeta_k\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z'_i)\Big) = h^*_{k-1}\Big(\zeta'_k\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} z'_i\Big)\Big) = h^*_{k-1}\Big((-1)^k \sum_{i=1}^{s} z'_i \times \partial \bar{w}_i\Big)$$

avec les $\bar{w}_i$ définis dans le corollaire 5.20. Cette égalité nous amène à considérer la partie suivante du diagramme commutatif de la proposition 4.23

$$\begin{array}{ccc} H_{k-1}(\tilde{P}_*) & \overset{\mu_{k-1}}{\to} & H_{k-2}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \\ \uparrow h^*_{k-1} & \circlearrowleft & \uparrow m_{k-2} \otimes \mathrm{Id} \\ H_{k-1}(\tilde{M}_*) & \overset{\mu'_{k-1}}{\to} & H_{k-2}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \end{array}$$

$$H_{k-1}(\tilde{M}_*) \xleftarrow{\chi'_{k-1}} H_{k-2}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$$

où, rappelons-le, le produit-croix χ'_{k-1} est une section de μ'_{k-1}. On a donc, en effet,

$$0 = h^*_{k-1}\Big(\sum_{i=1}^{s} z'_i \times \partial\bar{w}_i\Big) = (h^*_{k-1} \circ \chi'_{k-1})\Big(\sum_{i=1}^{s} z'_i \otimes \partial\bar{w}_i\Big)$$

et *a fortiori*

$$0 = (\mu_{k-1} \circ h^*_{k-1} \circ \chi'_{k-1})\Big(\sum_{i=1}^{s} z'_i \otimes \partial\bar{w}_i\Big) = \sum_{i=1}^{s} m_{k-2}(z'_i) \otimes \partial\bar{w}_i \,.$$

Mais, d'après le lemme 7.7, cela n'est possible que si

$$m_{k-2}(z'_1) = \ldots = m_{k-2}(z'_s) \,.$$

Supposons de plus que m_{k-2} *soit injectif.*

Les égalités ci-dessus impliquent alors que

$$z'_1 = \ldots = z'_s$$

et on a donc

$$\bigoplus_{i=1}^{s} z_i = \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z') \quad \text{avec} \quad z' \in H_{k-2}(M) \,.$$

Mais la forme particulière de ce second membre permet de lui appliquer la formule (5.20.3) du corollaire 5.20

$$\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z') = \Big(\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}\Big)(\oplus^s z') = \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(\eta'_k(z' \times w)) \,,$$

où w est la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique. Donc, d'après la commutativité de (7.8.2),

$$\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z') = \eta_k(h_k(z' \times w)) \,.$$

D'après la définition même de σ_k rappelée dans le corollaire 6.9, cela s'écrit

$$\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(z') = \eta_k(\sigma_k(z')) \,.$$

On obtient donc

$$\mathrm{Ker}\,\zeta_k \subset \mathrm{Im}\,(\eta_k \circ \sigma_k) \,,$$

ce qui, compte tenu de l'égalité $\operatorname{Im}\eta_k = \operatorname{Ker}\zeta_k$, donne la relation (7.8.4) à laquelle nous nous étions ramenés. □

Les lemmes 7.3, 7.5, 7.6 et 7.8 démontrent l'assertion de surjectivité du théorème 1.3.

8. Assertion d'injectivité du théorème 1.3

Dans ce paragraphe, nous faisons le même travail qu'au § 7, mais en vue de la conclusion d'injectivité du théorème 1.3 concernant l'homomorphisme l_k induit en homologie de rang k par l'inclusion $l: L \hookrightarrow P$ (cf. fig. 3.2). Comme au § 7, les seuls éléments dont nous aurons besoin seront (outre le lemme élémentaire 7.7) le diagramme commutatif (7.1), la proposition 4.23, le corollaire 5.20 et le corollaire 6.9. Du moins en serait-il ainsi si, comme dernière condition pour l'injectivité de l_k, nous nous contentions de celle donnée par le lemme 8.6. Nous parviendrons à l'affaiblir en celle du lemme 8.7 en utilisant aussi le corollaire 3.30 et les isomorphismes (3.29).

Nous nous servons toujours du diagramme commutatif (7.2), conséquence de (7.1), que nous rappelons:

$$\begin{array}{ccc} H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{P}) \\ \uparrow j_k & & \downarrow f_k \\ H_k(L) & \xrightarrow{l_k} & H_k(P) \end{array} \tag{8.1}$$

Nous avons, pour l'injectivité de l_k, le lemme suivant:

Lemme 8.2. *Pour que l_k soit injectif pour un k donné, il faut et il suffit que:*

(i) *j_k soit injectif;*

(ii) $\operatorname{Ker} i_k \cap \operatorname{Im} j_k = \{0\}$;

(iii) $\operatorname{Ker} f_k \cap \operatorname{Im}(i_k \circ j_k) = \{0\}$.

Démonstration. On utilise cette fois le lemme algébrique suivant:

Lemme 8.3. *Soit $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ une suite de modules et d'homomorphismes. Pour que $v \circ u$ soit injectif, il faut et il suffit que u soit injectif et que* $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

Démonstration. Laissée au lecteur. □

Pour en déduire le lemme 8.2, on applique le lemme 8.3 successivement avec $u = i_k \circ j_k$ et $v = f_k$ puis avec $u = j_k$ et $v = i_k$. □ □

Nous cherchons maintenant des conditions suffisantes pour que les conditions du lemme 8.2 soient satisfaites.

LEMME 8.4. *Pour que la condition (i) du lemme 8.2 soit satisfaite pour un k donné, il suffit que m_k soit surjectif.*

Démonstration. Elle utilise la partie suivante du diagramme de la proposition 4.23:

$$\begin{array}{ccccc} H_k(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow{\xi_{k+1}} & H_k(L) & \xrightarrow{j_k} & H_k(\tilde{P}_*) \\ \uparrow {\scriptstyle m_k \otimes \mathrm{Id}} & \circlearrowright & \uparrow {\scriptstyle m_k} & & \\ H_k(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow{0} & H_k(M) & & \end{array} \tag{8.4.1}$$

Soit $z \in \operatorname{Ker} j_k$. D'après l'exactitude de la ligne supérieure de (8.4.1) donnée par la proposition 4.23, on a $z = \xi_{k+1}(y)$ avec $y \in H_k(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$. *Si m_k est surjectif,* il en est de même de $m_k \otimes \mathrm{Id}$ et on a $y = (m_k \otimes \mathrm{Id})\,(y')$ avec $y' \in H_k(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$. La commutativité de (8.4.1) donne alors

$$z = \left(\xi_{k+1} \circ (m_k \otimes \mathrm{Id})\right)(y') = (m_k \circ 0)\,(y') = 0\,,$$

ce qui implique que j_k est injectif. □

LEMME 8.5. *Pour que la condition (ii) du lemme 8.2 soit satisfaite pour un k donné, il suffit que m^i_{k-1} soit surjectif pour $1 \leqslant i \leqslant s$ et que m_{k-1} soit injectif.*

Démonstration. On se sert des parties suivantes des diagrammes du corollaire 5.20 et de la proposition 4.23:

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-1}(L_i) & \xrightarrow{\zeta_{k+1}} & H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{P}) \\ \uparrow {\scriptstyle \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-1}} & \circlearrowright & \uparrow {\scriptstyle h^*_k} & & \\ \oplus^s H_{k-1}(M) & \xrightarrow{\zeta'_{k+1}} & H_k(\tilde{M}_*) & & \end{array} \tag{8.5.1}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
H_k(L) & \xrightarrow{j_k} & H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{\mu_k} & H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \\
\uparrow h_k^* & & \circlearrowright & & \uparrow m_{k-1} \otimes \mathrm{Id} \\
H_k(\tilde{M}_*) & & \xrightarrow{\mu'_k} & & H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)
\end{array}
\qquad (8.5.2)
$$

χ'_k

D'après l'exactitude des lignes supérieures de ces diagrammes, on a

$$\operatorname{Ker} i_k = \operatorname{Im} \zeta_{k+1} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} j_k = \operatorname{Ker} \mu_k \ .$$

On est donc ramené à montrer que

$$\operatorname{Im} \zeta_{k+1} \cap \operatorname{Ker} \mu_k = \{0\} \ . \qquad (8.5.3)$$

Soit donc $z \in \operatorname{Im} \zeta_{k+1} \cap \operatorname{Ker} \mu_k$. Utilisons d'abord le fait que z appartienne à l'image de ζ_{k+1}. On a

$$z = \zeta_{k+1}\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} y_i\Big) \quad \text{avec} \quad y_i \in H_{k-1}(L_i) \ .$$

Cela nous amène à introduire notre première hypothèse:

Supposons que m^i_{k-1} *soit surjectif pour tout* i.

Alors

$$z = \zeta_{k+1}\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-1}(y'_i)\Big) \quad \text{avec} \quad y'_i \in H_{k-1}(M)$$

et, d'après la commutativité de (8.5.1) et la formule (5.20.2) du corollaire 5.20, on a

$$z = h_k^*\Big(\zeta'_{k+1}\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} y'_i\Big)\Big) = h_k^*\Big((-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{s} y'_i \times \partial \bar{w}_i\Big)$$

avec les $\bar{w}_i$ définis dans le corollaire 5.20. Utilisons maintenant le fait que z appartienne au noyau de μ_k. On a

$$0 = \mu_k((-1)^{k+1} z) = (\mu_k \circ h_k^*)\Big(\sum_{i=1}^{s} y'_i \times \partial \bar{w}_i\Big) \ .$$

Comme le produit-croix χ'_k est une section de μ'_k d'après la proposition 4.23, on trouve, compte tenu de la commutativité de (8.5.2):

$$0 = (\mu_k \circ h_k^* \circ \chi'_k)\Big(\sum_{i=1}^{s} y'_i \otimes \partial \bar{w}_i\Big) = \sum_{i=1}^{s} m_{k-1}(y'_i) \otimes \partial \bar{w}_i \ .$$

Mais, d'après le lemme 7.7, cela implique que $m_{k-1}(y'_1) = \ldots = m_{k-1}(y'_s)$.

Supposons de plus que m_{k-1} *soit injectif.*

Les égalités ci-dessus donnent alors $y'_1 = \ldots = y'_s$ et, dans ces conditions,

$$\sum_{i=1}^{s} y'_i \times \partial \bar{w}_i = y'_1 \times \sum_{i=1}^{s} \partial \bar{w}_i = 0$$

d'après l'assertion (i) du lemme 7.7. On a donc $z = 0$, ce qui établit la relation (8.5.3) à laquelle nous nous étions ramenés. □

Il nous reste à satisfaire à la condition (iii) du lemme 8.2. Nous commençons par chercher à satisfaire à une condition plus forte mais plus simple:

LEMME 8.6. *Pour que* $\operatorname{Ker} f_k \cap \operatorname{Im} i_k = \{0\}$, il suffit qu'on ait $\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m_{k-2}^{i} = \{0\}$.

Démonstration. Nous nous servons des portions suivantes des diagrammes des corollaires 6.9 et 5.20:

$$\begin{array}{ccccc} H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma_k} & H_k(\tilde{P}) & \xrightarrow{f_k} & H_k(P) \\ \uparrow \mathrm{Id} & \searrow & \uparrow h_k & & \\ H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma'_k} & H_k(\tilde{M}) & & \end{array} \tag{8.6.1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{P}) & \xrightarrow{\eta_k} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) & \xrightarrow{\zeta_k} & H_{k-1}(\tilde{P}_*) \\ \uparrow h_k & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow \bigoplus_{i=1}^{s} m_{k-2}^{i} & \searrow & \uparrow h_{k-1}^{*} \\ H_k(\tilde{M}) & \xrightarrow{\eta'_k} & \oplus^{s} H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\zeta'_k} & H_{k-1}(\tilde{M}_*) & & \end{array} \tag{8.6.2}$$

D'après l'exactitude des lignes supérieures de ces diagrammes, on a $\operatorname{Ker} f_k = \operatorname{Im} \sigma_k$ et $\operatorname{Im} i_k = \operatorname{Ker} \eta_k$ et nous sommes ramenés à montrer que:

$$\operatorname{Im} \sigma_k \cap \operatorname{Ker} \eta_k = \{0\} . \tag{8.6.3}$$

Soit donc $z \in \operatorname{Im} \sigma_k \cap \operatorname{Ker} \eta_k$. Comme, d'une part, $z \in \operatorname{Im} \sigma_k$, on a, d'après la commutativité de (8.6.1) et la définition de σ'_k contenue dans le corollaire 6.9,

$$z = h_k(\sigma'_k(y')) = h_k(y' \times w) \quad \text{avec} \quad y' \in H_{k-2}(M) ,$$

w étant la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique. Comme, d'autre part, $z \in \operatorname{Ker} \eta_k$, on a aussi

$$0 = \eta_k(z) = \eta_k(h_k(y' \times w)) = \bigoplus_{i=1}^{s} m_{k-2}^{i}(\eta'_k(y' \times w))$$

d'après la commutativité de (8.6.2). Mais la formule (5.20.3) du corollaire 5.20 donne alors

$$0 = (\bigoplus_{i=1}^{s} m_{k-2}^{i})(\oplus^{s} y') = \bigoplus_{i=1}^{s} m_{k-2}^{i}(y') ,$$

donc

$$m_{k-2}^{i}(y') = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s .$$

Si alors $\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m_{k-2}^{i} = \{0\}$, on a forcément $y' = 0$ donc $z = 0$. Cette condition sur les noyaux implique donc la relation (8.6.3) à laquelle nous nous sommes ramenés. □

Nous en déduisons une condition suffisante légèrement plus faible pour que la condition (iii) du lemme 8.2 soit satisfaite:

LEMME 8.7. *Pour que la condition (iii) du lemme 8.2 soit satisfaite pour un k donné, il suffit que*

$$\operatorname{Ker} m_{k-2} \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^{1} \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^{s} = \{0\} .$$

Démonstration. Dans tout ce que nous avons fait jusqu'ici, le fait que les hyperplans «mauvais» de l'énoncé du théorème 1.3 soient vraiment «mauvais» n'est pas intervenu, conformément à ce que nous avions annoncé dans l'introduction. Le lemme 8.6 reste donc vrai si l'on ajoute aux hyperplans «mauvais» $\mathscr{L}_i$ un «bon» hyperplan $\mathscr{L}_\infty$ de Λ transverse à toutes les strates de la stratification $\mathfrak{S}$ et distinct de $\mathscr{L}$ et des $\mathscr{L}_i$. Alors (cf. fig. 3.2), $\tilde{P}_*$ est remplacé par

$$\tilde{P}_{**} = \tilde{P} \backslash (L_1^{\#} \cup \ldots \cup L_s^{\#} \cup L_\infty^{\#}) = \tilde{P}_* \backslash L_\infty^{\neq} ,$$

en notant les objets en rapport avec $\mathscr{L}_\infty$ de la même manière que ceux en rapport avec les $\mathscr{L}_i$, c'est-à-dire suivant (3.8), (3.15), (3.23) et (3.25) mais avec $i = \infty$. Et l'inclusion $i: \tilde{P}_* \hookrightarrow \tilde{P}$ est remplacée par l'inclusion $i^*: \tilde{P}_{**} \hookrightarrow \tilde{P}$.

Le lemme 8.6 appliqué à cette nouvelle situation donne donc une condition suffisante pour avoir, pour un k donné,

$$\operatorname{Ker} f_k \cap \operatorname{Im} i_k^* = \{0\} \tag{8.7.1}$$

et cette condition est

$$\operatorname{Ker} m_{k-2}^{\infty} \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^{1} \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^{s} = \{0\} , \tag{8.7.2}$$

où $m^\infty: M \hookrightarrow L_\infty$ est notée de manière analogue aux inclusions $m^i: M \hookrightarrow L_i$ du théorème 1.3 et où l'on a utilisé la convention d'écriture (2.1) pour les homomorphismes induits en homologie. Mais comme $L^{\#} \subset \tilde{P}_{**}$, on a $\operatorname{Im}(i_k \circ j_k) \subset \operatorname{Im} i_k^*$ et donc la relation (8.7.1) implique la condition (iii) du lemme 8.2. Le lemme 8.7 sera donc établi si nous montrons que

$$\operatorname{Ker} m_l^{\infty} = \operatorname{Ker} m_l \quad \text{pour tout} \quad l . \tag{8.7.3}$$

Or, d'après le corollaire 3.30 et les isomorphismes (3.29), le couple (L_∞, M) est homéomorphe au couple (L, M). En fait, la remarque 3.22 concernant la possibilité d'avoir une isotopie de $\mathscr{L}^{\#}$ respectant $\tilde{A}$ et triviale sur $\mathscr{M} \times \mathbf{P}_*^1$, montre que cet homéomorphisme pourrait même être pris de manière à coïncider avec l'identité sur M, ce qui donnerait directement l'égalité (8.7.3). Mais nous pouvons aussi établir (8.7.3) sans nous servir de cette remarque qui n'a été que sommairement justifiée; nous utilisons pour cela une façon de faire que nous reprendrons en annexe pour justifier l'isomorphisme de Wang et ses propriétés:

L'homéomorphisme de (L, M) sur (L_∞, M) provient, par les isomorphismes (3.29), d'un homéomorphisme de $(L^{\#}, M^{\#})$ sur $(L_\infty^{\#}, M_\infty^{\#})$. Or ce dernier peut être pris comme aboutisse-

ment d'une isotopie: Soit, en effet $\alpha: [0, 1] \to \mathbf{P}^1_*$ un arc *simple* joignant λ à λ_∞. Le couple $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ étant formé d'un fibré localement trivial sur $\mathbf{P}^1_*$ et d'un sous-fibré, il induit sur $\alpha([0, 1])$, qui est homéomorphe à $[0, 1]$, un couple de fibrés admettant une trivialisation *globale* simultanée (cf. [Go] IX.1.1 qu'on peut adapter au cas d'un couple de fibrés). D'une telle trivialisation on déduit une isotopie $G: L^\# \times [0, 1] \to \tilde{P}_*$ de la fibre $L^\# = \tilde{p}_*^{-1}(\lambda)$ de $\tilde{P}_*$ telle que

(i) $\tilde{p}_*(G(x, t)) = \alpha(t)$ pour tous $x \in L^\#$ et $t \in [0, 1]$

(ii) $G(x, 0) = x$ pour tout $x \in L^\#$

(iii) G est un homéomorphisme de $L^\# \times [0, 1]$ sur $\tilde{p}_*^{-1}(\alpha([0, 1]))$

(iv) $G(M^\# \times [0, 1]) = \tilde{M}_* \cap \tilde{p}_*^{-1}(\alpha([0, 1]))$.

L'aboutissement

$$\begin{aligned} g^\#: L^\# &\to L^\#_\infty \\ x &\mapsto G(x, 1) \end{aligned}$$

d'une telle isotopie est bien un homéomorphisme du couple $(L^\#, M^\#)$ sur le couple $(L^\#_\infty, M^\#_\infty)$. De plus, cet homéomorphisme induit, par restriction, un homéomorphisme $g'^\#: M^\# \to M^\#_\infty$ qui est l'aboutissement d'une isotopie $G': M^\# \times [0, 1] \to \tilde{M}_*$ obtenue par restriction de G et possédant les propriétés analogues aux propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus. Mais comme $\tilde{M}_*$ est trivial avec $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ et $M^\# = M \times \{\lambda\}$ et que la restriction de $\tilde{p}_*$ à $\tilde{M}_*$ coïncide avec la deuxième projection, on a aussi l'isotopie triviale

$$\begin{aligned} G'': M^\# \times [0, 1] &\to M_* \\ ((\upsilon, \lambda), t) &\mapsto (\upsilon, \alpha(t)) \end{aligned}$$

qui vérifie également les propriétés (i) à (iii). Or la propriété de relèvement des homotopies que possède un fibré trivial a pour corollaire, compte tenu de ce que G' et G'' vérifient (i) et (ii), l'existence d'une homotopie

$$H: M^\# \times [0, 1] \times [0, 1] \to \tilde{M}_*$$

de G' vers G'' telle que

$$H(y, 0, t') = y \quad \text{et} \quad \tilde{p}_*(H(y, t, t')) = \alpha(t) \quad \text{pour} \quad y \in M^\# \quad \text{et} \quad t, t' \in [0, 1]$$

(cf. [Sp] 2.8.10). Alors l'application

$$\begin{aligned} M^\# \times [0, 1] &\to M^\#_\infty \\ (y, t') &\mapsto H(y, 1, t') \end{aligned}$$

est une homotopie de $g'^\#$ vers l'identification canonique

$$\begin{aligned} M^\# &\to M^\#_\infty \\ (\upsilon, \lambda) &\mapsto (\upsilon, \lambda_\infty) . \end{aligned}$$

Dans ces conditions, la transmuée $g: L \to L_\infty$ de $g^\#$ par les isomorphismes (3.29) réalise bien un homéomorphisme du couple (L, M) sur le couple (L_∞, M), mais aussi, l'homéomorphisme $g': M \to M$ qu'elle induit étant la transmuée de $g'^\#$, est homotope dans M à l'identité de M. Alors, même si l'on ignore que g' peut être prise *égale* à l'identité, on sait du moins qu'elle induit l'identité en homologie et l'égalité (8.7.3) en résulte. Cela termine la démonstration du lemme 8.7. □

Les lemmes 8.2, 8.4, 8.5 et 8.7 démontrent l'assertion d'injectivité du théorème 1.3.

L'assertion de surjectivité ayant été prouvée au terme du §7, le théorème 1.3 se trouve donc démontré. Y compris, remarquons-le, l'assertion selon laquelle il est possible de considérer artificiellement comme «mauvais» des hyperplans de $\wedge$ qui sont en fait «bons». Nulle part, en effet, dans la démonstration qui précède, nous n'avons fait intervenir le fait que les hyperplans «mauvais» fussent vraiment «mauvais». □ □

9. Démonstration du théorème 1.1 et du corollaire 1.2

1°. Démonstration du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3

Pour montrer les assertions du théorème 1.1, le théorème 1.3 va nous permettre une récurrence qui nous ramènera à une situation en basse dimension où un calcul direct est possible. On pense naturellement à une récurrence sur la dimension n de l'espace ambiant $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Mais cela n'est pas commode car nous verrons que, dans l'étape de récurrence où nous utilisons les sections par un pinceau d'hyperplans comme dans le théorème 1.3, la codimension de A peut diminuer dans les sections exceptionnelles si l'on ne suppose pas que $\dim A \geqslant 1$. Nous ferons donc une récurrence sur $d = \dim A$ amorcée à $d = 0$ avec n donc q quelconques. Nous écarterons le cas trivial où $A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire $q = 0$.

Pour commencer, le cas où A est vide, pour lequel nous avons convenu que $q = n + 1$, correspond donc à $d = -1$ et se trouve hors récurrence. Dans ce cas, $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) = \mathscr{L}$. Or, à homéomorphisme près, $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ peut être obtenu en attachant à $\mathscr{L}$ une $2n$-boule fermée B^{2n} le long de la $(2n-1)$-sphère S^{2n-1} formant son bord. On a donc

$$H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathscr{L}) = H_k(B^{2n}, S^{2n-1}) = 0 \quad \text{pour} \quad k \leqslant 2n - 1$$

(cf. [Gb] chap. 19). Comme dans ce cas $n + q - 2 = 2n - 1$, les conclusions du théorème 1.1 résultent alors de la suite exacte d'homologie relative pour le couple $(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathscr{L})$.

La récurrence débute à $d = \dim A = 0$. Dans ce cas, $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ est composé d'un nombre fini de points avec $p \neq 0$. On a $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}$ et $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) = \mathscr{L}$. Mais $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}$ se rétracte par déformation sur un bouquet composé de $\mathscr{L}$ et de $p-1$ $(2n-1)$-sphères, donc l'inclusion $\mathscr{L} \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}$ induit des isomorphismes

$$H_k(\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}) \quad \text{pour} \quad k \leqslant 2n - 2 .$$

Comme cette fois $n + q - 2 = 2n - 2$, les conclusions du théorème 1.1 sont bien valables dans ce cas. Remarquons que, pour $k = n - 2$, nous avons seulement besoin de la surjectivité de l'homomorphisme ci-dessus. Nous pourrions donc nous contenter de la relation $H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}, \mathscr{L}) = 0$ pour $k \leqslant 2n - 2$.

Pour l'étape de récurrence, nous supposons que les conclusions du théorème 1.1 sont valables pour $\dim A = d_0 \geqslant 0$ et nous allons montrer qu'elles sont alors aussi valables pour $\dim A = d_0 + 1$. Dans la suite de cette partie, A sera donc un ensemble algébrique fermé de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ de codimension q avec $\dim A = d_0 + 1$ et $A \neq \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$; notons que cela implique que $n \geqslant 2$. Nous allons nous ramener au cas où $\dim A = d_0$ à l'aide du théorème 1.3.

La première chose, dans cette réduction, est d'intégrer $\mathscr{L}$ à un pinceau $\wedge$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 1.3:

LEMME 9.1. *Sous les hypothèses du théorème 1.1 et si $n \geqslant 2$, il existe un $(n-2)$-plan projectif $\mathscr{M}$ contenu dans $\mathscr{L}$ et transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de la stratification $\mathfrak{S}$ de A.*

Démonstration. $\mathscr{L}$ est projectivement isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ et $\mathscr{L} \cap A$ en est un sous-ensemble algébrique fermé. Comme d'autre part $\mathscr{L}$ est transverse à toutes les strates de $\mathfrak{S}$, la restriction $\mathfrak{S}_{|\mathscr{L}}$ de $\mathfrak{S}$ à $\mathscr{L}$, composée des $S \cap \mathscr{L}$ non vides pour $S \in \mathfrak{S}$, est une stratification de Whitney de $\mathscr{L} \cap A$ (cf. [Ch1] lemme 2.2.2). D'après le corollaire 10.18 de la proposition d'algébricité 10.10 ci-dessous, il existe donc un hyperplan projectif $\mathscr{M}$ de $\mathscr{L}$ transverse dans $\mathscr{L}$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}_{|\mathscr{L}}$. Alors $\mathscr{M}$ est un $(n-2)$-plan de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}$. En effet, supposons que $\mathscr{M}$ rencontre $S \in \mathfrak{S}$ en x. D'après la transversalité de $\mathscr{L}$ à S dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ d'une part et la transversalité de $\mathscr{M}$ à $S \cap \mathscr{L}$ dans $\mathscr{L}$ d'autre part, on a les relations suivantes entre espaces tangents en x:

$$T_x S + T_x \mathscr{L} = T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$$
$$T_x(S \cap \mathscr{L}) = T_x S \cap T_x \mathscr{L}$$
$$T_x(S \cap \mathscr{L}) + T_x \mathscr{M} = T_x \mathscr{L}.$$

Une vérification algébrique simple montre que ces relations impliquent

$$T_x S + T_x \mathscr{M} = T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{C}),$$

ce qui est le résultat de transversalité annoncé. □

Soit donc $\mathscr{M}$ comme dans le lemme 9.1 et soit $\wedge$ le pinceau d'hyperplans d'axe $\mathscr{M}$. Alors $\wedge$ satisfait aux hypothèses du théorème 1.3 vis-à-vis de A et de $\mathfrak{S}$ et $\mathscr{L}$ en est un «bon» hyperplan. Notons, comme dans ce théorème, $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$ les «mauvais» hyperplans de $\wedge$; nous pouvons supposer que $s \geqslant 2$ pour nous conformer aux hypothèses du théorème, en considérant au besoin

comme «mauvais» de «bons» hyperplans, artifice que l'énoncé du théorème 1.3 permet.

Nous adoptons aussi, dans notre situation, les autres notations du théorème 1.3. La conclusion que nous recherchons pour l'étape de récurrence est la surjectivité de l_k pour $k \leqslant n+q-2$ et son injectivité pour $k \leqslant n+q-3$. Cela résultera du théorème 1.3 si nous montrons que les m_k et m_k^i satisfont à des propriétés de surjectivité ou d'injectivité convenables. Nous allons voir qu'elles sont données par l'hypothèse de récurrence appliquée aux ensembles algébriques fermés $\mathscr{L} \cap A$ et $\mathscr{L}_i \cap A$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$ respectivement dans $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}_i$ (qui sont projectivement isomorphes à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$) avec $\mathscr{M}$ comme hyperplan.

Il s'agit donc de constater qu'on peut user de l'hypothèse de récurrence dans ces circonstances. Il y a deux choses dont il faut s'assurer:

— que la dimension de l'ensemble algébrique diminue bien et donc que corrélativement la codimension ne diminue pas lorsqu'on passe de $A \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à $\mathscr{L} \cap A \subset \mathscr{L}$ ou aux $\mathscr{L}_i \cap A \subset \mathscr{L}_i$;

— que $\mathscr{M}$ est transverse dans $\mathscr{L}$ aux strates d'une stratification de Whitney de $\mathscr{L} \cap A$ et aussi transverse dans chaque $\mathscr{L}_i$ aux strates d'une stratification de Whitney de $\mathscr{L}_i \cap A$.

Ces exigences sont satisfaites de manière naturelle pour $\mathscr{L} \cap A$ en raison de la transversalité de $\mathscr{L}$ aux strates de $\mathfrak{S}$. D'une part, en effet, une section transversale fait chuter la dimension de A dès lors que A est non vide. D'autre part, la trace de $\mathfrak{S}$ sur $\mathscr{L}$ est alors une stratification de Whitney de $\mathscr{L} \cap A$ qui convient. Cela est précisé dans les points (i) et (iii) du lemme ci-dessous.

La situation n'est plus la même pour les $\mathscr{L}_i \cap A$ puisque précisément les $\mathscr{L}_i$ sont «mauvais». Mais la transversalité de $\mathscr{M}$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de $\mathfrak{S}$ permet de satisfaire malgré tout aux deux exigences ci-dessus:

En ce qui concerne la première, en effet, $\mathscr{L}_i \cap A$ se trouve pris en tenailles entre A et $\mathscr{M} \cap A$. Or il y a, d'une part, grâce à la transversalité de $\mathscr{M}$ aux strates de $\mathfrak{S}$, une chute de dimension de 2 lorsqu'on passe de A à $\mathscr{M} \cap A$, pourvu que $\dim A \geqslant 1$. Mais nous avons précisément organisé notre récurrence de manière à ce que cette inégalité soit satisfaite lors de l'étape de récurrence. D'autre part, de A à $\mathscr{L}_i \cap A$ et de $\mathscr{L}_i \cap A$ à $\mathscr{M} \cap A$, la dimension ne peut à chaque fois chuter de plus de 1 car il s'agit de sections hyperplanes dans des espaces projectifs complexes. La dimension a donc dû forcément chuter exactement de 1 à chaque fois. Cette question est précisée dans le point (ii) du lemme ci-dessous.

Le point clef dans la déduction du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3 est que $\mathscr{L}_i \cap A$ satisfait aussi à la deuxième exigence. Autrement dit que l'axe $\mathscr{M}$ est «bon» même au sein des hyperplans «mauvais». Nous montrons, en effet, qu'en raison de la transversalité de $\mathscr{M}$ aux strates de $\mathfrak{S}$, chaque $\mathscr{L}_i$ est transverse à ces strates sauf en un nombre fini de points non situés sur $\mathscr{M}$. Cela permet de raffiner la trace de $\mathfrak{S}$ sur $\mathscr{L}_i$ en une stratification de Whitney de $\mathscr{L}_i \cap A$ sans rien toucher au voisinage de $\mathscr{M}$ et de répondre ainsi à la question. Cela fait l'objet du point (iv) du lemme ci-dessous.

Les éléments qui nous permettront d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathscr{L} \cap A$ et $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{L}$, d'une part, et à $\mathscr{L}_i \cap A$ et $\mathscr{M}$ dans chaque $\mathscr{L}_i$, d'autre part, sont donc rassemblés dans le lemme suivant:

LEMME 9.2. *Avec les hypothèses et notations du théorème 1.3, le pinceau* $\wedge$ *possède les propriétés suivantes:*

(i) $\dim \mathscr{L} \cap A = \dim A - 1$ *si* $\dim A \geqslant 0$;

(ii) $\dim \mathscr{L}_i \cap A = \dim A - 1$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant s$ *si* $\dim A \geqslant 1$;

(iii) *la restriction* $\mathfrak{S}_{|\mathscr{L}}$ *de* $\mathfrak{S}$ *à* $\mathscr{L}$ *(composée des* $S \cap \mathscr{L}$ *non vides pour* $S \in \mathfrak{S}$*) est une stratification de Whitney de* $\mathscr{L} \cap A$ *et* $\mathscr{M}$ *est transverse dans* $\mathscr{L}$ *à toutes les strates de* $\mathfrak{S}_{|\mathscr{L}}$;

(iv) *pour* $1 \leqslant i \leqslant s$, *la restriction* $\mathfrak{S}_{|\mathscr{L}_i}$ *de* $\mathfrak{S}$ *à* $\mathscr{L}_i$ *peut être raffinée en une stratification de Whitney* $\mathfrak{S}_i$ *de* $\mathscr{L}_i \cap A$ *aux strates de laquelle* $\mathscr{M}$ *soit transverse dans* $\mathscr{L}_i$.

Avant de démontrer ce lemme, nous menons à son terme l'étape de récurrence avec son aide, achevant ainsi la démonstration du théorème 1.1:

(9.3) *Fin de la démonstration du théorème 1.1.*

Rappelons que dans la situation de l'étape de récurrence, nous avons $\dim A = d_0 + 1 \geqslant 1$. D'après les points (i) et (iii) du lemme 9.2, nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathscr{L} \cap A$ dans $\mathscr{L}$ avec $\mathscr{M}$ pour hyperplan; comme la codimension de $\mathscr{L} \cap A$ dans $\mathscr{L}$ est encore q, cela nous donne que

$$m_k \text{ est surjectif} \quad \text{pour} \quad k \leqslant (n-1) + q - 2\,,$$
$$m_k \text{ est injectif} \quad \text{pour} \quad k \leqslant (n-1) + q - 3\,.$$

D'après les points (ii) et (iv) du lemme 9.2, l'hypothèse de récurrence peut aussi être appliquée, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, à $\mathscr{L}_i \cap A$ dans $\mathscr{L}_i$ avec $\mathscr{M}$ comme hyperplan et on obtient que, pour $1 \leqslant i \leqslant s$,

$$m_k^i \text{ est surjectif} \quad \text{pour} \quad k \leqslant (n-1) + q - 2 ,$$
$$m_k^i \text{ est injectif} \quad \text{pour} \quad k \leqslant (n-1) + q - 3 .$$

Les hypothèses qui permettent, à l'aide du théorème 1.3, de conclure à la surjectivité de l_k sont donc remplies pour $k \leqslant n + q - 2$ et celles qui permettent de conclure à son injectivité le sont pour $k \leqslant n + q - 3$. La récurrence se trouve ainsi terminée à l'aide du théorème 1.3. □

Remarque 9.4. L'hypothèse de récurrence nous a donné pour les m_k^i des conclusions de surjectivité et d'injectivité un rang plus loin que ce dont nous avions besoin.

Remarque 9.5. Nous avons dit dans l'introduction que la validité du théorème 1.1 était conditionnée par la particularité de l'espace ambiant permettant l'amorce de la récurrence. Nous pouvons maintenant préciser cela. Notre espace ambiant est $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ tout entier et sa section hyperplane générique $\mathscr{L}$ tout entier. Nous avons amorcé la récurrence en nous servant de la relation $H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}, \mathscr{L}) = 0$ pour $k \leqslant 2n - 2$. Nous pourrions en fait tirer parti de la remarque précédente, faire une récurrence sur n sans nous servir du point (ii) du lemme 9.2 et descendre dans la récurrence jusqu'à la situation où soit $n = 1$, soit $A = \varnothing$, ce qui nous donnerait la condition plus simple $H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathscr{L}) = 0$ pour $k \leqslant 2n - 1$. D'autre part, dans l'étape de récurrence, nous avons appliqué l'hypothèse de récurrence à des situations où l'espace ambiant était une section hyperplane générique ou exceptionnelle de l'espace ambiant de départ: dans notre cas, il s'agissait de $\mathscr{L}$ et des $\mathscr{L}_i$ qui sont tous isomorphes à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ donc du même type que l'espace ambiant de départ, ce qui nous a permis de poursuivre la récurrence. Ce sont là des exigences très particulières. C'est pourquoi, bien qu'au § 11 nous généralisions le théorème 1.3 au cas d'une variété quasi-projective lisse $X\backslash A$, nous ne pourrons en déduire un analogue général du théorème 1.1 qui tienne compte de la codimension de A. Il faudrait, en effet, qu'on ait la relation $H_k(X, \mathscr{L} \cap X) = 0$ pour $k \leqslant 2\dim X - 1$ (en supposant X de dimension pure) et que, de plus, cette relation soit héréditaire par sections hyperplanes successives de X. Mais cela ne doit pas être impossible: voir (12.2).

Pour terminer la démonstration du théorème 1.1, il reste maintenant à prouver le lemme 9.2:

(9.6) *Démonstration du lemme 9.2.*

Nous démontrons les points dans l'ordre (iii), (i), (ii), (iv).

Preuve de (iii). Nous avons déjà vu, dans la démonstration du lemme 9.1, que $\mathfrak{S}_{|\mathscr{L}}$ est une stratification de Whitney de $\mathscr{L} \cap A$. Et l'existence de $\mathscr{M}$ y a été prouvée en le prenant

précisément transverse à toutes les strates de $\mathcal{S}_{|\mathcal{L}}$. Mais, réciproquement, n'importe quel $(n-2)$-plan $\mathcal{M}$ contenu dans $\mathcal{L}$ et transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathcal{S}$ possède cette propriété. En effet, si x est un point commun à $\mathcal{M}$ et à une strate $S \cap \mathcal{L}$ de $\mathcal{S}_{|\mathcal{L}}$, on a alors les relations

$$T_x S + T_x \mathcal{M} = T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$$
$$T_x(S \cap \mathcal{L}) = T_x S \cap T_x \mathcal{L}$$
$$T_x \mathcal{M} \subset T_x \mathcal{L}$$

d'où l'on tire aisément que

$$T_x(S \cap \mathcal{L}) + T_x \mathcal{M} = T_x \mathcal{L}.$$

Preuve de (i). Pour commencer, A est réunion localement finie (donc finie puisque A est compact) des strates de $\mathcal{S}$. Il est aussi réunion de leurs adhérences qui sont analytiques fermées. On a donc, si $x \in A$,

$$\dim_x A = \sup_{S \in \mathcal{S}} \dim_x \bar{S}$$

avec la convention $\dim_x \bar{S} = -1$ pour $x \notin \bar{S}$ (cf. [Wh3] 5.3(K)). Mais chaque strate étant pure, on a $\dim_x \bar{S} = \dim S$ pour tout $x \in \bar{S}$ (cf. [Wh2] lemma 3.13; ce lemme y est énoncé dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ mais est valable dans une variété analytique complexe quelconque: cf. [Ch3] 2e partie, §5 pour plus de détails). Par conséquent

$$\dim_x A = \sup_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ x \in \bar{S}}} \dim S .$$

(On peut en fait montrer cette égalité sans se servir de l'analyticité de l'adhérence des strates (cf. [Ch3] 2e partie, corollaire 5.36)). De la même manière, puisque $\mathcal{S}_{|\mathcal{L}}$ est une stratification de $\mathcal{L} \cap A$, on a, pour $x \in \mathcal{L} \cap A$,

$$\dim_x(\mathcal{L} \cap A) = \sup_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ x \in \overline{S \cap \mathcal{L}}}} \dim (S \cap \mathcal{L}) .$$

Mais, si $S \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$, on a, par transversalité de $\mathcal{L}$ à S,

$$\dim (S \cap \mathcal{L}) = \dim S + \dim \mathcal{L} - \dim \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) = \dim S - 1 .$$

Il en résulte que, pour $x \in \mathcal{L} \cap A$,

$$\dim_x(\mathcal{L} \cap A) \leqslant \dim_x A - 1 . \tag{9.6.1}$$

D'un autre côté, on a la formule valable pour une intersection d'ensembles analytiques locaux complexes quelconques (cf. [Wh3] 2.12C)

$$\dim_x(\mathcal{L} \cap A) \geqslant \dim_x \mathcal{L} + \dim_x A - \dim \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) = \dim_x A - 1 \tag{9.6.2}$$

sans avoir à utiliser d'hypothèse de transversalité.

Maintenant, si $\mathcal{L} \cap A \neq \emptyset$, on a, d'après (9.6.1), $\dim (\mathcal{L} \cap A) \leqslant \dim A - 1$, relation valable aussi quand $\mathcal{L} \cap A = \emptyset$ avec la convention $\dim \emptyset = -1$, dès lors que $\dim A \geqslant 0$. D'autre part, dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, l'hyperplan projectif $\mathcal{L}$ rencontre

toute composante irréductible de A de dimension $\geqslant 1$. Il résulte alors de (9.6.2) que, si $\dim A \geqslant 1$, on a $\dim(\mathscr{L} \cap A) \geqslant \dim A - 1$, relation qui est aussi trivialement valable pour $\dim A \leqslant 0$. On obtient donc que $\dim(\mathscr{L} \cap A) = \dim A - 1$ dès lors que $\dim A \geqslant 0$.

Preuve de (ii). On ne peut raisonner comme en (i) car $\mathscr{L}_i$ n'est en général pas transverse aux strates de $\mathfrak{S}$. Toutefois l'inégalité suivante, analogue à (9.6.2) qui n'utilise pas cette hypothèse, est toujours valable:

$$\dim_x(\mathscr{L}_i \cap A) \geqslant \dim_x A - 1 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{L}_i \cap A \,. \tag{9.6.3}$$

Nous faisons intervenir d'autre part la transversalité de $\mathscr{M}$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}$: par la même méthode que dans la preuve de (i), on obtient

$$\dim_y(\mathscr{M} \cap A) \leqslant \dim_y A - 2 \quad \text{pour} \quad y \in \mathscr{M} \cap A \,. \tag{9.6.4}$$

Mais on a aussi la formule concernant l'intersection des sous-ensembles analytiques $\mathscr{L}_i \cap A$ et $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{L}_i$ qui donne

$$\dim_y(\mathscr{M} \cap A) \geqslant \dim_y(\mathscr{L}_i \cap A) - 1 \quad \text{pour} \quad y \in \mathscr{M} \cap A \,.$$

Des deux inégalités précédentes on tire alors

$$\dim_y(\mathscr{L}_i \cap A) \leqslant \dim_y A - 1 \quad \text{pour} \quad y \in \mathscr{M} \cap A \,. \tag{9.6.5}$$

Maintenant, comme dans la preuve de (i), la relation (9.6.3) donne $\dim(\mathscr{L}_i \cap A) \geqslant \dim A - 1$. D'autre part, dans $\mathscr{L}_i$ qui est projectivement isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$, l'hyperplan $\mathscr{M}$ rencontre toute composante irréductible de dimension $\geqslant 1$ de l'ensemble algébrique fermé $\mathscr{L}_i \cap A$. Il résulte alors de (9.6.5) que, si $\dim(\mathscr{L}_i \cap A) \geqslant 1$, on a $\dim(\mathscr{L}_i \cap A) \leqslant \dim A - 1$. Mais cette relation est aussi valable quand $\dim(\mathscr{L}_i \cap A) \leqslant 0$, pourvu que $\dim A \geqslant 1$. On obtient donc que $\dim(\mathscr{L}_i \cap A) = \dim A - 1$ dès lors que $\dim A \geqslant 1$. Remarquons que cette égalité peut être mise en défaut si l'on ne suppose pas que $\dim A \geqslant 1$ lors de l'étape de récurrence: il suffit de considérer l'exemple où A est composé d'un nombre fini de points que ne rencontre pas $\mathscr{M}$ et où $\mathscr{L}_i$ contient certains d'entre eux.

Preuve de (iv): C'est, comme nous l'avons annoncé, le point clef de la déduction du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3.

Nous commençons par montrer que la transversalité de $\mathscr{M}$ aux strates de $\mathfrak{S}$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ implique que chaque $\mathscr{L}_i$ est transverse à ces strates sauf peut-être en un nombre fini de points. Fixons donc i et posons

$$C = \{x \in \mathscr{L}_i \cap A \mid \mathscr{L}_i \text{ n'est pas transverse en } x \text{ dans } \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \text{ à la strate de } \mathfrak{S} \text{ passant par } x\} \,. \tag{9.6.6}$$

Comme $\mathscr{L}_i$ contient $\mathscr{M}$, la transversalité dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ de $\mathscr{M}$ aux strates de $\mathfrak{S}$ implique qu'*a fortiori* $\mathscr{L}_i$ est transverse à ces strates en tout point de rencontre *situé sur* $\mathscr{M}$. On a donc $\mathscr{M} \cap C = \varnothing$. Cela entraînera la finitude de C car C est en fait un sous-ensemble *algébrique fermé* de $\mathscr{L}_i$. L'algébricité de C est démontrée au § 10: elle est donnée par le corollaire 10.17 de la proposition d'algébricité 10.10. Comme donc, dans l'espace projectif complexe $\mathscr{L}_i$, l'hyperplan projectif $\mathscr{M}$ ne rencontre pas l'ensemble algébrique fermé C, on a forcément $\dim C \leqslant 0$, ce qui montre que C est vide ou composé d'un nombre fini de points $c_1, \ldots, c_p$.

Si $C = \emptyset$, c'est que $\mathscr{L}_i$ est en fait un «bon» hyperplan de Λ, artificiellement considéré comme «mauvais», donc se comporte comme $\mathscr{L}$. D'après le point (iii) du même lemme on peut prendre dans ce cas $\mathscr{S}_i = \mathscr{S}_{|\mathscr{L}_i}$.

Supposons maintenant que $C \neq \emptyset$. Alors $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ avec $p \geqslant 1$. Nous allons voir que, dans ce cas, on peut prendre, de manière fort naturelle

$$\mathscr{S}_i = \mathscr{S}_{|\mathscr{L}_i \setminus C} \cup \{\{c_1\}, \ldots, \{c_p\}\} . \tag{9.6.7}$$

Pour montrer que $\mathscr{S}_i$ convient, nous commençons par prouver l'assertion suivante:

$$\begin{cases} \mathscr{S}_{|\mathscr{L}_i \setminus C} \text{ est une stratification de Whitney de l'ensemble analytique fermé} \\ (\mathscr{L}_i \cap A)\setminus C \text{ dans } \mathscr{L}_i \setminus C \text{ et } \mathscr{M} \text{ est transverse dans } \mathscr{L}_i \setminus C \text{ à toutes ses strates.} \end{cases} \tag{9.6.8}$$

Notons que $\mathscr{M}$ est bien contenu dans $\mathscr{L}_i \setminus C$ puisqu'il ne rencontre pas C. Pour montrer (9.6.8), nous constatons que $\mathscr{S}_{|\mathscr{L}_i \setminus C}$ est la restriction à $\mathscr{L}_i \setminus C$ de $\mathscr{S}_{|\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\setminus C}$. Comme $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\setminus C$ est un ouvert de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, il est aisé de voir que $\mathscr{S}_{|\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\setminus C}$ est une stratification de Whitney de $A \setminus C$ (pour plus de détails, cf. [Ch3] 2e partie, § 5) aux strates de laquelle $\mathscr{M}$ est transverse. Or, par définition de C, la sous-variété $\mathscr{L}_i \setminus C$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\setminus C$ est transverse à toutes les strates de $\mathscr{S}_{|\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\setminus C}$. La situation est alors analogue à celle du point (iii) et conduit donc à une conclusion analogue qui est précisément l'assertion (9.6.8).

Nous allons maintenant passer en revue pour $\mathscr{S}_i$ toutes les propriétés qui définissent une stratification de Whitney (cf. [Wh2] §§ 18 et 19. [L – T2] (1.2) et [Ch3] 2e partie, § 5):

Lissité des strates. Compte tenu de (9.6.8), il est clair que $\mathscr{S}_i$ est une partition finie de $\mathscr{L}_i \cap A$ en sous-variétés analytiques pures de $\mathscr{L}_i$.

Caractère strict des strates. Il s'agit de voir que chaque strate $S' \in \mathscr{S}_i$ est *stricte* dans $\mathscr{L}_i$, c'est-à-dire que son adhérence $\overline{S'}$ dans $\mathscr{L}_i$ (ou, ce qui revient au même, dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$) ainsi que $\overline{S'}\setminus S'$ sont des sous-ensembles analytiques fermés de $\mathscr{L}_i$. Cela est clair si $S' = \{c_j\}$. Si S' est de la forme $S \cap (\mathscr{L}_i \setminus C)$ avec $S \in \mathscr{S}$, alors $S' = (\bar{S} \cap \mathscr{L}_i)\setminus\big((\bar{S}\setminus S) \cup C\big)$, ce qui est une différence de deux ensembles analytiques fermés de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ puisque S est stricte dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. L'analyticité de $\overline{S'}$ est alors donnée par [Wh3] 5.3(U). Comme d'autre part $\overline{S'} \subset \bar{S} \cap \mathscr{L}_i$, on a l'égalité $\overline{S'}\setminus S' = \overline{S'} \cap \big((\bar{S}\setminus S) \cup C\big)$, ce qui donne aussi l'analyticité de $\overline{S'}\setminus S'$.

Propriété de frontière. Il s'agit de montrer que, pour toute strate $S \in \mathscr{S}_i$, son adhérence $\bar{S}$ est réunion de strates. Cela est encore une fois clair si $S = \{c_j\}$. Si $S \in \mathscr{S}_{|\mathscr{L}_i \setminus C}$, nous écrivons $\bar{S} = \big(\bar{S} \cap (\mathscr{L}_i \setminus C)\big) \cup (\bar{S} \cap C)$. Le premier terme de cette union est l'adhérence de S dans $\mathscr{L}_i \setminus C$ donc est réunion d'éléments de $\mathscr{S}_{|\mathscr{L}_i \setminus C}$ étant donnée la propriété de frontière possédée par $\mathscr{S}_{|\mathscr{L}_i \setminus C}$ qui, d'après (9.6.8), est une stratification dans $\mathscr{L}_i \setminus C$. Le deuxième terme est un sous-ensemble (éventuellement vide) de C donc est réunion de $\{c_j\}$. On obtient bien, au total, une réunion d'éléments de $\mathscr{S}_i$.

Conditions (a) et (b) de Whitney. Avec l'algébricité de C, c'est là le deuxième élément important dans la démonstration du point (iv). Nous devons montrer que tout couple (S, T) de strates de $\mathscr{S}_i$ vérifie ces conditions. Nous savons déjà, d'après (9.6.8), que $\mathscr{S}_{|\mathscr{L}_i \setminus C}$ est une stratification de Whitney dans $\mathscr{L}_i \setminus C$. Par conséquent, si $S, T \in \mathscr{S}_{|\mathscr{L}_i \setminus C}$, le couple (S, T) vérifie les conditions (a) et (b) dans $\mathscr{L}_i \setminus C$ donc dans $\mathscr{L}_i$ puisqu'il s'agit de conditions de nature locale. Parmi les autres couples (S, T) de strates, les seuls pour lesquels il y ait un problème sont ceux qui sont tels que

$$S \in \mathcal{S}_{|\mathscr{L}_i \setminus C} \quad \text{et} \quad T = \{c_j\} \quad \text{avec} \quad c_j \in \bar{S} .$$

Nous allons traiter ce problème comme un cas très particulier de l'important lemme de Whitney selon lequel les points de la petite strate en lesquels un couple vérifie les conditions (a) et (b) sont génériques (cf. [Wh2] lemma 19.3, récemment précisé par Teissier: [Te] VI.2.1). Le lemme de Whitney est énoncé dans un ouvert de $\mathbf{C}^m$ mais, compte tenu du caractère local des conditions (a) et (b) et de leur invariance par isomorphisme analytique, nous pourrions, nous aussi, nous ramener à un ouvert de $\mathbf{C}^{n-1}$ par l'intermédiaire d'une carte de $\mathscr{L}_i$ au voisinage de c_j. Nous continuerons à raisonner dans $\mathscr{L}_i$, laissant au lecteur le soin de vérifier que les autres éléments du raisonnement sont susceptibles de subir la même réduction. Les hypothèses du lemma 19.3 de [Wh2] sont qu'on est en présence de deux ensembles analytiques fermés V et W de dimension constante, avec $\dim V > \dim W$. Ici, les rôles de V et W seront joués respectivement par $\bar{S}$ et $\{c_j\}$. Vérifions qu'ils satisfont aux hypothèses en question. Nous avons vu que les strates de $\mathcal{S}_i$ sont strictes dans $\mathscr{L}_i$, ce qui implique que $\bar{S}$ et $\bar{S}\setminus S$ sont analytiques fermés. Comme S est pure, $\bar{S}$ est alors de dimension constante et $\dim(\bar{S}\setminus S) < \dim \bar{S}$, d'après [Wh2] lemma 3.13. D'autre part, $\{c_j\}$ est trivialement analytique fermé de dimension constante 0 et, comme $\{c_j\} \subset \bar{S}\setminus S$, on a bien $\dim\{c_j\} < \dim \bar{S}$. La conclusion du lemma 19.3 de [Wh2] est qu'il existe un sous-ensemble analytique fermé Z de W avec $\dim Z < \dim W$ tel que, V^0 et W^0 étant les parties lisses de V et W, le couple $(V^0, W^0\setminus Z)$ satisfasse aux conditions (a) et (b). Dans notre cas où $W = \{c_j\}$, l'inégalité $\dim Z < \dim W$ implique que $Z = \varnothing$. Notre conclusion est donc que le couple $(\bar{S}^0, \{c_j\})$, où $\bar{S}^0$ désigne la partie lisse de $\bar{S}$, satisfait aux conditions (a) et (b). Comme S est un ouvert de $\bar{S}^0$, on obtient *a fortiori* que le couple $(S, \{c_j\})$ vérifie les conditions (a) et (b) de Whitney.

Nous avons ainsi fini de vérifier que $\mathcal{S}_i$ est une stratification de Whitney de $\mathscr{L}_i \cap A$. Il est clair, d'après la définition (9.6.7), que c'est un raffinement de $\mathcal{S}_{|\mathscr{L}_i}$.

Il reste à nous assurer que $\mathscr{M}$ est transverse dans $\mathscr{L}_i$ aux strates de $\mathcal{S}_i$. Mais c'est bien le cas car, d'une part, d'après (9.6.8), $\mathscr{M}$ est transverse aux éléments de $\mathcal{S}_{|\mathscr{L}_i\setminus C}$ dans $\mathscr{L}_i\setminus C$ donc dans $\mathscr{L}_i$ et, d'autre part, $\mathscr{M}$ ne rencontre pas les $\{c_j\}$.

Cela achève la preuve du point (iv) donc la démonstration du lemme 9.2. □

Remarque 9.7. Une démonstration du point (iv) figure déjà dans [Ch2] au cours de la preuve de la proposition 3 dans une récurrence similaire. Mais elle comporte deux erreurs que voici:

1°. Dans [Ch2] aussi on considère l'ensemble C introduit en (9.6.6) dans la démonstration ci-dessus (il est nommé D dans [Ch2]). Mais on n'y montre pas que C est algébrique fermé. On se contente de montrer que C est analytique local d'adhérence algébrique. Il est ensuite affirmé que $\bar{C}$ ne rencontre pas $\mathscr{M}$ à partir de l'argument suivant: $\mathscr{L}_i$ étant transverse à toutes les strates de $\mathcal{S}$ en tout point de $\mathscr{M}$, le serait aussi en tout point d'un voisinage de $\mathscr{M}$. Or, si cela est clair au voisinage de chaque point de $\mathscr{M} \cap A$ pour la strate passant par ce point, ce ne l'est plus pour d'autres strates auxquelles il peut être adhérent. Ce n'est effectivement le cas qu'en raison de la condition (a) de Whitney qui a d'ailleurs été introduite par Whitney en vue de l'ouverture de la transversalité (cf. [Wh1] Introduction). Ici, la condition (a) intervient dans la démonstration de la proposition 10.10 qui permet, au travers de son corollaire 10.17, de montrer que C est fermé.

2°. Dans [Ch2], la condition (b) de Whitney pour $\mathcal{S}_i$ est justifiée par l'inclusion $C_3 \subset C_4$ du cône tangent classique C_3 en un point d'un ensemble analytique (C_3 est l'ensemble des limites de sécantes menées par ce point) dans le cône C_4, ensemble des directions contenues dans une limite d'espaces tangents en des points lisses convergeant vers ce point (cf. [Wh1] (3.1)). Cet argument est doublement erroné. D'une part, ce n'est pas parce qu'une limite de sécantes $\overline{c_j x_m}$, $m \in \mathbf{N}$, est contenue dans *une* limite d'espaces tangents que pour autant il est clair qu'elle soit contenue dans *la* limite, quand elle existe, des espaces tangents en les x_m. D'autre part, on doit présupposer l'analyticité de $\bar{S}$ au voisinage de c_j que nous démontrons ici directement; dans [Ch2] elle est censée résulter de la propriété de frontière, mais ce n'est vrai que si l'on entend cette propriété au sens de [Wh2], c'est-à-dire avec une condition supplémentaire de dimension (cf. [Wh2] (18.3)); or cette condition de dimension est censée, dans [Ch2], résulter précisément de la condition (b), ce qui constitue un cercle vicieux.

La démonstration du théorème 1.1 qui avait été ramenée au lemme 9.2 est maintenant terminée. □ □

Remarque 9.8. Nous avons montré, au cours de la démonstration du point (iv) du lemme 9.2, qu'étant donné un ensemble algébrique fermé A de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geqslant 2$, et un pinceau Λ d'hyperplans d'axe transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates d'une stratification de Whitney $\mathcal{S}$ de A, chaque hyperplan de Λ est transverse à toutes les strates de $\mathcal{S}$ sauf peut-être en un nombre fini de points non situés sur l'axe. Cela résultait de la proposition d'algébricité 10.10 au travers de son corollaire 10.17. Un autre corollaire de cette proposition, le corollaire 10.19, joint à la proposition 10.20 qui provient du théorème de Sard, montre qu'il n'y a en fait qu'un nombre fini d'hyperplans de Λ qui ne soient vraiment transverses à toutes les strates de $\mathcal{S}$, fait dont nous nous sommes servis dès l'énoncé du théorème 1.3. Un pinceau Λ comme ci-dessus présente donc une certaine analogie avec les pinceaux de Lefschetz (cf. [Lf] II.8 et V.2 et [La] § 1). Mais, à la différence de ceux-ci, un même hyperplan de Λ peut rencontrer non transversalement une même strate de $\mathcal{S}$ en plusieurs points distincts et les contacts ne sont pas forcément quadratiques.

2°. Démonstration du corollaire 1.2 à partir du théorème 1.1

L'hypothèse $q \geqslant 2$ implique que $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ est simplement connexe car le complémentaire d'un ensemble algébrique fermé de codimension $\geqslant 2$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est, nous le redémontrons ci-dessous, simplement connexe. D'autre part, la section $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ est non vide et, elle aussi, simplement connexe. En effet, si A est vide, on a $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) = \mathscr{L}$ et si $\dim A \geqslant 0$, alors la transversalité de $\mathscr{L}$ à toutes les strates de $\mathcal{S}$ implique que $\mathscr{L} \cap A$ est de dimension $\dim A - 1$ (comme dans la preuve du point (i) du lemme 9.2) donc est aussi de codimension $\geqslant 2$ dans $\mathscr{L}$. L'assertion est triviale dans le premier cas et dans le second, le même argument que ci-dessus s'applique puisque $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) = \mathscr{L}\backslash(\mathscr{L} \cap A)$ et que $\mathscr{L}$ est projectivement isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$. Dans ces conditions de

simple connexité, le théorème de Whitehead (cf. [Sp] 7.5.9) dit que les conclusions du théorème 1.1 impliquent celles du corollaire 1.2.

Il nous reste à justifier que le complémentaire d'un ensemble algébrique fermé de codimension $\geqslant 2$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est simplement connexe. On peut le faire en se ramenant à un théorème selon lequel le groupe fondamental d'une variété différentiable connexe n'est pas modifié par l'ablation d'une sous-variété fermée de codimension $\geqslant 3$ (cf. [Go] X.2.3). Mais il est intéressant de constater que notre assertion peut aussi être démontrée à l'aide d'un théorème du type de Lefschetz, plus précisément à l'aide du théorème de Zariski mentionné au §1, dans une version valable pour le complémentaire d'un ensemble algébrique fermé quelconque de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, celle de [Ch1] ou de [H-L2] par exemple. En fait, la proposition préliminaire plus faible (5.1.4) de [Ch1] est suffisante. On procède par récurrence sur la dimension d de l'ensemble algébrique A. Si $A = \varnothing$, c'est-à-dire $d = -1$, son complémentaire est $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ qui est bien simplement connexe. Supposons maintenant l'assertion valable pour $d = d_0 \geqslant -1$ et plaçons-nous dans le cas où $\dim A = d_0 + 1$. On a alors $\dim A \geqslant 0$ donc $n \geqslant 2$ et on peut appliquer la proposition (5.1.4) de [Ch1] (voir la remarque ci-dessous). D'après cette proposition, on peut choisir un hyperplan projectif $\mathscr{L}'$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ transverse à toutes les strates d'une stratification de Whitney $\mathscr{S}$ de A et tel que l'inclusion $\mathscr{L}' \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ induise une surjection

$$\pi_1(\mathscr{L}' \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A), e') \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A, e')$$

avec un point base e' quelconque de $\mathscr{L}' \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$. Mais le choix de $\mathscr{L}'$ fait que, comme ci-dessus, l'ensemble algébrique fermé $\mathscr{L}' \cap A$ est de dimension d_0 donc de codimension $\geqslant 2$ dans $\mathscr{L}'$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence qui donne que $\mathscr{L}' \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) = \mathscr{L}'\backslash(\mathscr{L}' \cap A)$ est simplement connexe. La surjection en question implique alors que l'espace connexe par arcs $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ est aussi simplement connexe, ce qui achève la récurrence. La simple connexité du complémentaire d'un ensemble algébrique fermé de codimension $\geqslant 2$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est ainsi établie.

La démonstration du corollaire 1.2 qui avait été ramenée à cette assertion se trouve alors terminée. □

Remarque 9.9. La proposition (5.1.4) de [Ch1] que nous avons appliquée dans la démonstration ci-dessus au complémentaire d'un ensemble algébrique fermé de A de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geqslant 2$, est énoncée dans [Ch1] pour le cas où A est une hypersurface mais, comme nous l'avons signalé au §1, sa démonstration est valable pour un ensemble algébrique fermé quelconque. Signalons d'autre part que l'hyperplan $\mathscr{L}'$ que nous avons utilisé est, dans la démonstration de [Ch1], pris dans un ouvert de Zariski non vide Ω contenu dans l'ensemble $\mathscr{E}$ des hyperplans projectifs de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ transverses aux strates de $\mathscr{S}$, choix que nous avons respecté ci-dessus. La proposition (5.1.4) est pourtant énoncée dans [Ch1] pour $\mathscr{L}' \in \mathscr{E}$, ce qui est un glissement injustifié (mais que le corollaire 10.18 ci-dessous, selon lequel $\mathscr{E}$ *est* un ouvert de Zariski, justifie).

Remarque 9.10. Dans le cas où la codimension q de A est 1, on a $n + q - 2 = n - 1$ et $n + q - 3 = n - 2$ et les conclusions du corollaire 1.2 sont encore valables d'après le theorem 3.4.1 et le lemma de l'appendix de [H-L4].

10. Lemmes d'algébricité et de généricité

Nous avons regroupé dans ce paragraphe les justifications des assertions d'algébricité ou de généricité utilisées dans la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.3 ou formulées dans leur énoncé même. Nous les obtenons toutes comme corollaires de la proposition principale d'algébricité 10.10 ci-dessous, à l'exception toutefois de la proposition finale 10.20 qui utilise le théorème de Sard. Nous ferons essentiellement des raisonnements d'analyticité susceptibles d'être généralisés au cas d'un espace analytique non projectif. Dans notre cas particulier, nous pourrons conclure à l'algébricité grâce au théorème de Chow affirmant l'identité entre sous-ensembles analytiques fermés et algébriques fermés d'un espace projectif complexe.

Etant donné $n \geqslant 0$, soit

$$\pi : \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \quad \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$$

la surjection canonique. Pour $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, nous poserons

$$\hat{x} = \pi^{-1}(x) \cup \{0\} . \tag{10.1}$$

C'est une droite vectorielle de $\mathbf{C}^{n+1}$. Si P est un r-plan projectif de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec $0 \leqslant r \leqslant n$, nous poserons aussi

$$\hat{P} = \pi^{-1}(P) \cup \{0\} . \tag{10.2}$$

C'est un $(r+1)$-plan vectoriel de $\mathbf{C}^{n+1}$. En particulier $\{\hat{x}\} = \hat{x}$ pour tout $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.

Pour $0 \leqslant r \leqslant n$, nous noterons

$$\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \quad \text{l'ensemble des } r\text{-plans projectifs de } \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) . \tag{10.3}$$

Nous regarderons $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ toujours au travers de l'identification canonique

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{C}^{n+1}) \\ P \qquad &\mapsto \qquad \hat{P} \end{aligned} \tag{10.4}$$

avec la grassmannienne $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{C}^{n+1})$ des sous-espaces vectoriels de dimension $r+1$ de $\mathbf{C}^{n+1}$, le sous-espace $\hat{P}$ étant défini par (10.2). Nous aurons donc sur $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ une structure de variété analytique complexe compacte et connexe de dimension $(r+1)\,((n+1)-(r+1)) = (r+1)\,(n-r)$ (cf. [Wh3] 5.13 B et [Di2] (16.11.8) et (16.11.9)). C'est en fait une structure de variété algébrique (cf. [Di1] §3, n° 5). Dans le cas particulier où $r = 0$, on a l'isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{G}^0(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \\ x \quad &\mapsto \quad \{x\} . \end{aligned} \tag{10.5}$$

Mais on a aussi un plongement analytique

$$\Psi : \mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{C}^{n+1}) \rightarrowtail \mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C}) . \tag{10.6}$$

avec $N = \binom{n+1}{r+1} = \dfrac{(n+1)n\ldots(n-r+1)}{(r+1)!}$, qui à $F \in \mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{C}^{n+1})$ fait correspondre le point $\Psi(F)$ de $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ dont des coordonnées homogènes sont données par un système de *coordonnées grassmanniennes* de F. On obtient un tel système en portant en colonnes d'une matrice les coordonnées des vecteurs d'une base de F et en en prenant les mineurs d'ordre $r+1$ (ordonnés par exemple lexicographiquement mais qu'il est plus commode d'indexer par le multiindice des lignes choisies); le point $\Psi(F)$ ne dépend pas du choix de cette base (cf. [Wh3] 5.13 D). Ce plongement est en fait algébrique (cf. [Di1] §3, n° 5). On a alors aussi le plongement

$$\Psi \circ \Phi : \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \rightarrowtail \mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C}) \tag{10.7}$$

et, pour $P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$, on appelle aussi «coordonnées grassmanniennes de P» les coordonnées grassmanniennes de $\Phi(P)$. Dans le cas particulier où $r = 0$, on a $N - 1 = n$ et $\Psi \circ \Phi$ est un isomorphisme, réciproque de l'isomorphisme (10.5); et pour $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, les coordonnées grassmanniennes de $\{x\}$ coïncident avec les coordonnées homogènes de x. D'après le plongement (10.7), pour montrer l'algébricité d'un sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$, nous pourrons nous contenter d'un raisonnement d'analyticité dans $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ car, d'après le théorème de Chow (cf. [Wh3] 5.9 G), l'ensemble $\Psi(\Phi(\mathscr{E}))$ est algébrique fermé si et seulement s'il est analytique fermé dans $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ donc si et seulement si $\mathscr{E}$ est analytique fermé dans $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Notons qu'alors les dimensions au sens algébrique et au sens analytique de $\mathscr{E}$ coïncident (cf. [H-P] chap. X, §§ 5 et 14).

Il sera aussi question d'algébricité de sous-ensembles de la variété algébrique $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Comme elle se plonge dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ et qu'on a aussi l'analogue du théorème de Chow pour les sous-ensembles algébriques fermés d'un produit d'espaces projectifs complexes (cf. [Wh3] 5.11 B), un sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ sera algébrique fermé si et seulement s'il est analytique fermé dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Ici aussi les dimensions algébrique et analytique complexe de $\mathscr{F}$ coïncident.

Etant donnée une sous-variété analytique pure S de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geqslant 0$, nous considérons, pour $0 \leqslant r \leqslant n$, l'ensemble

$$\mathscr{S}^r(S) = \{(x, P) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \mid x \in S \cap P \text{ et } P \text{ n'est pas transverse en } x \text{ à } S \text{ dans } \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\}\,. \tag{10.8}$$

Et, si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de sous-variétés pures de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, nous posons

$$\mathscr{S}^r(\mathfrak{S}) = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \mathscr{S}^r(S)\,. \tag{10.9}$$

Voici alors l'énoncé de la proposition principale de ce paragraphe:

PROPOSITION 10.10. *Soit A un ensemble algébrique fermé de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec $n \geqslant 0$ et soit $\mathfrak{S}$ une stratification de A satisfaisant à la condition (a) de Whitney (mais pas forcément à la condition (b) et ne possédant pas forcément la propriété de frontière: cf. [Wh2] §§ 18 et 19, [L-T2] (1.2) et [Ch3]*

2e partie, §5). Alors, avec les notations (10.9) et (10.8) ci-dessus, $\mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$ *est un sous-ensemble algébrique fermé de* $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ *pour* $0 \leqslant r \leqslant n$. *Pour* $n \geqslant 1$ *et* $r = n - 1$, *on a la majoration* $\dim \mathscr{S}^{n-1}(\mathfrak{S}) \leqslant n - 1$ *(avec la convention* $\dim \varnothing = -1$*).*

Remarque 10.11. On peut en fait montrer que, si A est un sous-ensemble propre de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ (c'est-à-dire distinct de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$) et non vide et si $d = \dim A$, on a, pour $0 \leqslant r \leqslant n$,

$$\dim \mathscr{S}^r(\mathfrak{S}) = \begin{cases} r(n-r) + d & \text{si} \quad r + d < n \\ (r+1)(n-r) - 1 & \text{si} \quad r + d \geqslant n - 1 \end{cases}$$

(cf. [Ch3] 2e partie, corollaire 6.9). Nous nous contenterons ici de la majoration $\dim \mathscr{S}^{n-1}(\mathfrak{S}) \leqslant n - 1$ pour $r = n - 1$ qui est plus simple à établir. Elle nous servira à montrer que certains sous-ensembles algébriques sont distincts de l'ambiant.

Nous ferons reposer la démonstration de la proposition 10.10 sur les deux lemmes suivants:

LEMME 10.12. *Sous les hypothèses de la proposition 10.10, les ensembles* $\mathscr{S}^r(S)$ *pour* $S \in \mathfrak{S}$ *sont analytiques locaux d'adhérence analytique dans* $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$.

LEMME 10.13. *Sous les hypothèses de la proposition 10.10, l'ensemble* $\mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$ *est fermé dans* $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$.

Le premier lemme est dû à ce que toute strate S est différence de deux ensembles analytiques fermés; il en résultera grâce à l'analyticité de la modification de Nash de $\bar{S}$. Le second lemme provient de la condition (a) de Whitney satisfaite par $\mathfrak{S}$. Nous commençons par démontrer ces lemmes:

(10.14) *Démonstration du lemme 10.12.*

Nous ferons comme annoncé mais nous lirons les choses sur cartes. Soit S une strate de $\mathfrak{S}$ de dimension d. Il nous suffit de montrer que l'assertion du lemme est vraie au voisinage de tout point de l'adhérence de $\mathscr{S}^r(S)$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Nous allons en fait voir qu'étant donné

$$x \in \bar{S} ,$$

il existe un ouvert Ω de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ de la forme

$$\Omega = U \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) , \tag{10.14.1}$$

avec U voisinage ouvert de x dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, tel que $\mathscr{S}^r(S) \cap \Omega$ soit différence de deux ensembles analytiques fermés de Ω. Il sera alors clair que $\mathscr{S}^r(S) \cap \Omega$ est analytique local et le fait que son adhérence dans Ω soit analytique résultera de [Wh3] 5.3(U).

En fait U sera simplement l'ouvert de définition d'une carte standard de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ au voisinage de x:

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^n \tag{10.14.2}$$

A une permutation des coordonnées près, on peut supposer et nous supposerons que U est formé des points y de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ de coordonnées homogènes $(y_0 : \ldots : y_n)$ avec $y_0 \neq 0$ et que $\varphi(y) = (y_1/y_0, \ldots, y_n/y_0)$. Nous allons tout lire sur cette carte. Il nous sera commode de poser:

$$\begin{cases} y' = \varphi(y) & \text{pour} \quad y \in U \\ E' = \varphi(E \cap U) & \text{pour} \quad E \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \,. \end{cases} \tag{10.14.3}$$

Alors S' (qui est non vide puisque $x \in \bar{S}$) est une sous-variété pure de dimension d de $\mathbf{C}^n$ et on a

$$\overline{S'} = \varphi(\mathrm{adh}_U(S \cap U)) = \varphi(\bar{S} \cap U) = (\bar{S})'$$

où on a noté adh_U pour l'adhérence dans U. Par définition d'une stratification, $\bar{S}$ et $\bar{S} \setminus S$ sont analytiques fermés. La relation ci-dessus montre alors qu'il en est de même pour $\overline{S'}$ et $\overline{S'} \setminus S'$ et, d'après [Wh2] lemma 3.13, $\overline{S'}$ est de dimension constante d.

Notons d'autre part

$$H = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus U \tag{10.14.4}$$

l'hyperplan projectif à l'infini associé à U. Alors, pour tout $P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ tel que $P \not\subset H$, P' est un r-plan affine de $\mathbf{C}^n$. Pour un tel P, nous noterons

$$P'' \quad \text{le } r\text{-plan vectoriel parallèle à } P'. \tag{10.14.5}$$

La raison pour considérer P'' est que, si $P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ et $y \in P \cap U$ (donc $P \not\subset H$), l'espace tangent à P en y se lit à travers la carte (10.14.2) comme

$$T_y\varphi(T_yP) = T_{y'}P' = P'' \,, \tag{10.14.6}$$

de sorte que, si $P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ et $y \in P \cap S \cap U$, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} &P \text{ est non transverse en } y \text{ à } S \text{ dans } \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \Leftrightarrow \\ &P'' \text{ est non transverse à } T_{y'}S' \text{ dans } \mathbf{C}^n. \end{aligned} \tag{10.14.7}$$

Introduisons alors

$$\mathscr{R} = \{(u, Q) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n) \mid u \in S' \text{ et } Q \text{ n'est pas transverse à } T_uS' \text{ dans } \mathbf{C}^n\} \,, \tag{10.14.8}$$

$$\begin{aligned} &\delta : V \to \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n) \quad \text{avec} \quad V = \{P \in \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \mid P \not\subset H\} \\ &P \mapsto P' \,, \end{aligned} \tag{10.14.9}$$

$$\mathscr{E} = \{(y, P) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \mid y \in P\} \,. \tag{10.14.10}$$

On a, d'après (10.14.7),

$$\mathscr{S}^r(S) \cap \Omega = \mathscr{E} \cap (\varphi \times \delta)^{-1}(\mathscr{R}) \,. \tag{10.14.11}$$

Nous allons nous servir de ce que l'image réciproque d'un ensemble analytique fermé par une application analytique est un ensemble analytique fermé de l'espace de départ (cf. [Wh3] 5.3 (BB)). Remarquons d'autre part que $\mathscr{E} \cap \Omega \subset U \times V$ donc que l'intersection avec $\mathscr{E}$ d'un

ensemble fermé de $U \times V$ est fermée dans $\mathscr{E} \cap \Omega$. Pour montrer, comme annoncé, que $\mathscr{L}^r(S) \cap \Omega$ est différence de deux ensembles analytiques fermés de Ω et achever ainsi la démonstration du lemme 10.12, il nous suffira donc de prouver les trois points suivants:

(i) $\mathscr{E}$ est un ensemble analytique fermé;

(ii) V est ouvert et δ est une application analytique;

(iii) $\mathscr{R}$ est différence de deux ensembles analytiques fermés de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n)$.

Le point significatif est le troisième. Nous les justifions dans l'ordre.

(i) Nous avons vu que cette assertion implique l'algébricité de $\mathscr{E}$ et c'est en fait une démonstration directe d'algébricité que nous allons faire. La relation $y \in P$ est équivalente à $\hat{y} \subset \hat{P}$ (avec les notations (10.1) et (10.2)). Si alors Y est la matrice colonne formée des coordonnées d'un vecteur non nul de $\hat{y}$ (c'est-à-dire d'un système de coordonnées homogènes de y), et si M est la matrice $(n+1) \times (r+1)$ obtenue en portant en colonnes les coordonnées d'une base de $\hat{P}$, la relation $\hat{y} \subset \hat{P}$ s'exprime par l'annulation de tous les mineurs d'ordre $r+2$ de la matrice formée par la juxtaposition de Y et M. En développant ces mineurs suivant la première colonne, on obtient des polynômes séparément homogènes, de degré 1 en les coordonnées homogènes de y et de degré 1 en les mineurs d'ordre $r+1$ de M, lesquels forment un système de coordonnées grassmanniennes de $\hat{P}$; l'algébricité de $\mathscr{E}$ résulte alors de [Wh3] 5.11 A et 5.11 D compte tenu du plongement (10.7).

(ii) Nous allons utiliser les plongements (10.7) de $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ dans $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ et (10.6) de $\mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n)$ dans $\mathbf{P}^{N'-1}(\mathbf{C})$. Pour commencer, un élément P de $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ appartient à V si et seulement si ses systèmes de coordonnées grassmanniennes comportent au moins une coordonnée de multiindice contenant 0 non nulle. La même condition sur les coordonnées homogènes d'un point de $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ donne un ouvert υ dont la trace sur l'image du plongement de $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ est l'image de V par ce plongement. Cela montre que V est ouvert. Pour voir ensuite la relation entre P et P'', identifions $\mathbf{C}^n$ à $\hat{H} = \{0\} \times \mathbf{C}^n \subset \mathbf{C}^{n+1}$ (cf. fig. 10.1): alors, pour $P \in V$, le r-plan affine P' est identifié à la projection de $\hat{P} \cap (\{1\} \times \mathbf{C}^n)$ sur $\{0\} \times \mathbf{C}^n$ et P'' est identifié à $\hat{P} \cap (\{0\} \times \mathbf{C}^n)$. Soit $((\xi_{11}, \ldots, \xi_{n1}), \ldots, (\xi_{1r}, \ldots, \xi_{nr}))$ une base de P''. Alors

$$((0, \xi_{11}, \ldots, \xi_{n1}), \ldots, (0, \xi_{1r}, \ldots, \xi_{nr}))$$

est une base de $\hat{P} \cap (\{0\} \times \mathbf{C}^n)$ et on peut la compléter en une base de $\hat{P}$ par un vecteur de $\hat{P}$ n'appartenant pas à $\{0\} \times \mathbf{C}^n$ dont on peut normaliser la coordonnée d'indice 0 de sorte qu'il s'écrive $(1, \xi_{10}, \ldots, \xi_{n0})$. Posons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \xi_{10} & \xi_{11} & \ldots & \xi_{1r} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \xi_{n0} & \xi_{n1} & \ldots & \xi_{nr} \end{pmatrix}$$

Un système de coordonnées grassmanniennes de $\hat{P}$ est donné par les mineurs d'ordre $r+1$ de M. On voit alors que ceux de ces mineurs qui contiennent la 1re ligne de M donnent un système de coordonnées grassmanniennes de P''. Il y a donc une projection de $\mathbf{C}^N$ dans $\mathbf{C}^{N'}$ qui, par passage au quotient, donne une application analytique de l'ouvert υ de $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$

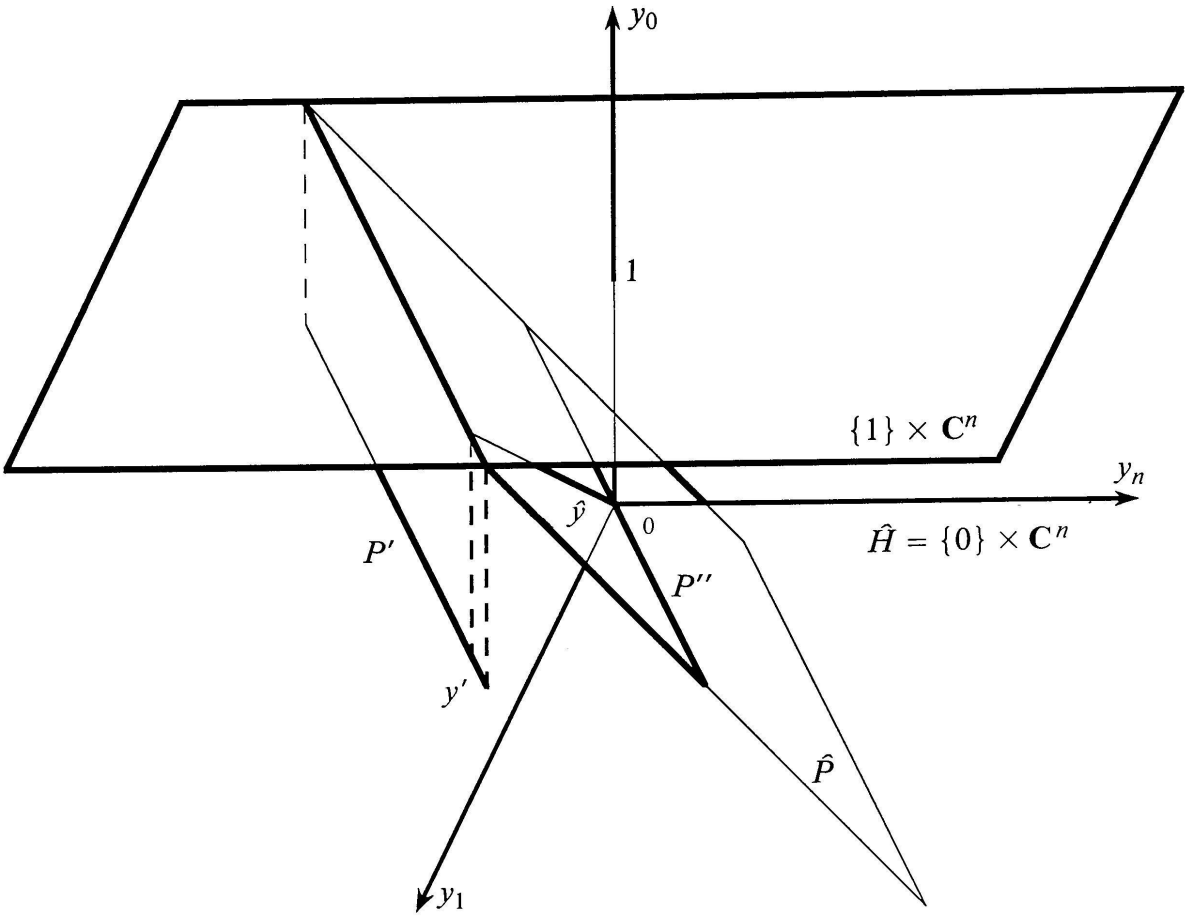


FIGURE 10.1

dans $\mathbf{P}^{N'-1}(\mathbf{C})$ dont δ peut être considérée comme une restriction grâce aux plongements (10.7) et (10.6). Nous avons en fait montré que δ est un morphisme algébrique.

(iii) Cette assertion résultera de ce que S' est différence des deux ensembles analytiques fermés $\overline{S'}$ et $\overline{S'} \setminus S'$ et de l'analyticité de la modification de Nash de $\overline{S'}$ qui est le fait essentiel sur lequel repose la démonstration de ce lemme. Rappelons que $\overline{S'}$ est de dimension constante d. Si $\overline{S'}^0$ désigne la partie lisse de $\overline{S'}$, la modification de Nash de $\overline{S'}$ est alors

$$\mathscr{N} = \overline{\{(u, T_u\overline{S'}^0) \mid u \in \overline{S'}^0\}} \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n) \,. \tag{10.14.12}$$

L'analyticité de $\mathscr{N}$ est démontrée dans [Wh2] theorem 16.4 à l'aide d'un système de champs de vecteurs analytiques au voisinage de tout point de $\overline{S'}$ tels que, pour $u \in \overline{S'}^0$, les vecteurs correspondants engendrent $T_u\overline{S'}^0$; l'existence de ces champs de vecteurs résulte de la cohérence du faisceau des idéaux des germes de fonctions holomorphes au voisinage de chaque point de $\overline{S'}$ qui s'annulent sur le germe de $\overline{S'}$ en ce point (cf. [Wh2] lemma 15.1). Nous allons relier $\mathscr{R}$ à $\mathscr{N}$. Commençons par constater que

$$\mathscr{N} \cap (S' \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)) = \{(u, T_u S') \mid u \in S'\} \tag{10.14.13}$$

puisque l'application $u \mapsto T_u S'$ de S' dans $\mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$ est continue. Posons ensuite

$$\mathscr{P} = \{(u, T, Q) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n) \mid (u, T) \in \mathscr{N}$$
$$\text{et } Q \text{ n'est pas transverse à } T \text{ dans } \mathbf{C}^n\} \,,$$

$$\mathscr{Q} = \text{projection de } \mathscr{P} \text{ sur } \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n) \,.$$

D'après (10.14.13), on a

$$\mathscr{R} = \mathscr{Q} \cap (S' \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n)) .$$

L'assertion (iii) résultera alors de ce que S' est différence de $\overline{S'}$ et $\overline{S'} \setminus S'$ et de l'analyticité de $\mathscr{Q}$ que nous allons déduire de celle de $\mathscr{N}$. Comme $\mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$ est compact, il nous suffit de montrer que $\mathscr{P}$ est analytique fermé dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n)$ pour en déduire, grâce au théorème de l'application analytique propre (cf. [Wh3] 5.4 A), que $\mathscr{Q}$ est analytique fermé dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n)$. Mais l'analyticité de $\mathscr{P}$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n)$ résulte bien de l'analyticité de $\mathscr{N}$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$ car la non transversalité de Q à T est donnée par des relations algébriques entre les coordonnées de Q et T dans des cartes standard de $\mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$ et $\mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n)$ (cf. [Di2] (16.11.10) et [Wh3] chap. 5, § 13). On a, en effet, des bases de Q et T qui sont fonctions affines de ces coordonnées et la non transversalité en question s'exprime par le fait que ce système est de rang $< n$ donc par l'annulation de déterminants en les composantes des vecteurs de ces bases. Cela achève de justifier l'assertion (iii).

La démonstration du lemme 10.12 que nous avions ramenée aux assertions (i), (ii) et (iii) se trouve ainsi terminée. □

(10.15) *Démonstration du lemme 10.13.*

Pour ce lemme aussi nous raisonnons sur cartes. Il nous suffit de montrer que la trace de $\mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$ sur tout élément d'un recouvrement ouvert de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ est fermée dans cet élément. Nous pouvons réaliser ce recouvrement, comme dans la démonstration qui précède, par des ouverts Ω du type (10.14.1) où U est un ouvert de carte standard de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Nous fixons un tel U en faisant la même hypothèse de commodité qu'après (10.14.2). Nous pouvons donc nous servir de tout ce qui a été fait dans la démonstration (10.14). Nous utiliserons les mêmes notations excepté qu'au lieu de $\mathscr{R}$ nous noterons $\mathscr{R}_S$ pour pouvoir faire varier S dans $\mathfrak{S}$. Nous écrirons donc, pour $S \in \mathfrak{S}$,

$$\mathscr{R}_S = \{(u, Q) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n) \mid u \in S' \text{ et } Q \text{ n'est pas transverse à } T_u S' \text{ dans } \mathbf{C}^n\} \tag{10.15.1}$$

(la notation S' est définie en (10.14.3)). Nous posons maintenant

$$\mathscr{R} = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \mathscr{R}_S . \tag{10.15.2}$$

La relation (10.14.11) donne alors

$$\mathscr{S}^r(\mathfrak{S}) \cap \Omega = \mathscr{E} \cap (\varphi \times \delta)^{-1}(\mathscr{R}) . \tag{10.15.3}$$

D'après la remarque qui suit (10.14.11) et la continuité de δ démontrée dans l'assertion (ii) de la démonstration (10.14), il nous suffit donc de montrer que $\mathscr{R}$ est fermé.

Comme $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n)$ sont métrisables (cf. [Wh3] chap. 5, § 14), nous pouvons raisonner sur des suites. Soit $((u_k, Q_k)) \to (u, Q)$ une suite de $\mathscr{R}$ convergeant vers un point $(u, Q) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n)$. Puisque A est fermé, on a $u \in A'$ et il existe donc une strate T de $\mathfrak{S}$ telle que $u \in T'$. Comme d'autre part $\mathfrak{S}$ est localement finie (dans notre cas, finie), il n'y a au voisinage de u qu'un nombre fini de S' pour $S \in \mathfrak{S}$ et, quitte à procéder à une extraction de suite, nous pouvons supposer que $u_k \in S'$ pour tout k pour une strate S fixe. Soit d sa dimension. Nous pouvons aussi supposer alors, grâce à la compacité de $\mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$, que $(T_{u_k} S') \to L$ pour un certain d-plan L. Maintenant, par hypothèse, Q_k est non transverse à

$T_{u_k}S'$ dans $\mathbf{C}^n$ pour tout k. Nous avons vu, dans la preuve de l'assertion (iii) de la démonstration (10.14), que l'ensemble des couples $(R, K) \in \mathbf{G}^r(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{G}^d(\mathbf{C}^n)$ qui sont non transverses dans $\mathbf{C}^n$ est algébrique fermé. La non transversalité se conserve donc à la limite et Q est non transverse à L dans $\mathbf{C}^n$. Mais nous avons supposé que la stratification $\mathfrak{S}$ satisfaisait à la condition (a) de Whitney. Comme cette condition est de nature locale et invariante par isomorphisme analytique, le couple (S', T') y satisfait au point u. On a donc $T_uT' \subset L$. Le r-plan Q est alors *a fortiori* non transverse à T_uT', ce qui signifie que $(u, Q) \in \mathscr{R}_T \subset \mathscr{R}$. Cela montre que $\mathscr{R}$ est fermé. La démonstration du lemme 10.13 que nous avions ramenée à cette assertion se trouve ainsi terminée. □

(10.16) *Démonstration de la proposition 10.10.*

D'après le lemme 10.13, $\mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$ est fermé dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Il est donc réunion des adhérences des $\mathscr{S}^r(S)$ pour $S \in \mathfrak{S}$. Comme cette réunion est localement finie (en fait finie), il résulte alors du lemme 10.12 que $\mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$ est analytique (cf. [Wh3] 5.3 (I)). Et nous avons vu que cela impliquait que $\mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$ est algébrique.

Ce qui précède montre aussi que

$$\dim \mathscr{S}^r(\mathfrak{S}) = \sup_{S \in \mathfrak{S}} \dim \overline{\mathscr{S}^r(S)} \tag{10.16.1}$$

(cf. [Wh3] 5.3 (K)). Mais on a

$$\dim \overline{\mathscr{S}^r(S)} = \dim \mathscr{S}^r(S)\ , \tag{10.16.2}$$

égalité valable pour tout ensemble analytique local V d'adhérence analytique: en effet, il est d'une part clair que $\dim V \leqslant \dim \bar{V}$. D'autre part, étant donné un point lisse de $\bar{V}$ de dimension maximum δ, il possède un voisinage ouvert dans $\bar{V}$ composé de points lisses de même dimension et ce voisinage rencontre nécessairement V; comme V est localement fermé, les points de rencontre sont aussi des points lisses de dimension δ de V, d'où $\dim \bar{V} \leqslant \dim V$.

Pour majorer $\dim \mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$, il suffit donc de majorer $\dim \mathscr{S}^r(S)$ pour $S \in \mathfrak{S}$. Lorsque $\mathscr{S}^r(S) = \varnothing$ (ce qui arrive pour $r = n$ ou $\dim S = n$), on a la convention $\dim \varnothing = -1$. En dehors de ce cas exceptionnel, on peut faire la majoration en évaluant, pour $x \in S$, la dimension des fibres F_x du morphisme d'espaces analytiques $f\colon \mathscr{S}^r(S) \to S$ induit par la projection de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Ces fibres sont, en effet, des sous-ensembles analytiques fermés de $\mathscr{S}^r(S)$ (cf. [Wh3] 5.3 (BB)) et on a, pour $(x, P) \in \mathscr{S}^r(S)$,

$$\dim_{(x,P)} \mathscr{S}^r(S) \leqslant \dim_x S + \dim_{(x,P)} F_x \tag{10.16.3}$$

(cf. [Wh3] chap. 4, theorem 6D auquel on peut se ramener par une lecture sur cartes).

L'évaluation de $\dim_{(x,P)} F_x$ est simple dans le cas où $n \geqslant 1$ et $r = n - 1$: on a, en effet, $F_x = \{x\} \times G_x$ où G_x est alors formé des hyperplans projectifs de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ *contenant* le d-plan projectif tangent en x à S (avec $d = \dim S \neq n$), c'est-à-dire l'unique d-plan projectif T tel que $x \in T$ et $T_xT = T_xS$. Alors aussi, on a un isomorphisme de dualité entre $\mathbf{G}^{n-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ et $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ (cf. [Di1] §3, n° 5) qui transforme G_x en un $(n-d-1)$-plan projectif de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Ainsi donc, dans ce cas particulier, $\dim_{(x,P)} F_x = n - d - 1$ et l'inégalité (10.16.3) donne:

$$\dim \mathscr{S}^{n-1}(S) \leqslant d + (n - d - 1) = n - 1\ .$$

Cette majoration et les relations (10.16.1) et (10.16.2) entraînent la majoration de l'énoncé concernant dim $\mathscr{S}^{n-1}(\mathfrak{S})$. □

Voici maintenant les corollaires de la proposition 10.10 justifiant les assertions d'algébricité et de généricité des paragraphes précédents:

COROLLAIRE 10.17. *Soit A un ensemble algébrique fermé de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec $n \geqslant 0$, muni d'une stratification $\mathfrak{S}$ satisfaisant à la condition (a) de Whitney. Soit P un r-plan projectif de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec $0 \leqslant r \leqslant n$. Alors l'ensemble $\mathscr{S}(\mathfrak{S}, P)$ des points en lesquels P rencontre non transversalement dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ une strate de $\mathfrak{S}$ est un sous-ensemble algébrique fermé de P.*

Démonstration. Le sous-ensemble $\mathscr{S}(\mathfrak{S}, P)$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est relié à l'ensemble $\mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$ de la proposition 10.10 par la relation

$$\mathscr{S}(\mathfrak{S}, P) \times \{P\} = \mathscr{S}^r(\mathfrak{S}) \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \{P\}) ,$$

ce qui montre que $\mathscr{S}(\mathfrak{S}, P)$ est analytique fermé donc algébrique fermé dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. □

Le corollaire 10.17 justifie l'algébricité de l'ensemble C qui intervient dans la preuve du point (iv) du lemme 9.2, point clef dans la démonstration du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3.

COROLLAIRE 10.18. *Soit A un ensemble algébrique fermé de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec $n \geqslant 0$, muni d'une stratification $\mathfrak{S}$ satisfaisant à la condition (a) de Whitney. Alors, pour $0 \leqslant r \leqslant n$, l'ensemble $\mathscr{P}^r(\mathfrak{S})$ des r-plans projectifs de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ qui ne sont pas transverses à toutes les strates de $\mathfrak{S}$ est un sous-ensemble algébrique fermé propre de $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Nous convenons, comme dans l'énoncé du théorème 1.1, que chaque r-plan projectif est transverse à toute strate qu'il ne rencontre pas.*

Démonstration. L'ensemble $\mathscr{P}^r(\mathfrak{S})$ est la projection de $\mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$ sur le second facteur de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Comme $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est compact, cette projection est propre et il résulte du théorème de l'application propre (cf. [Wh3] 5.4 A) que $\mathscr{P}^r(\mathfrak{S})$ est analytique fermé donc algébrique fermé dans $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Si d'autre part f est la restriction de cette projection à $\mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$, le même théorème donne dim $\mathscr{P}^r(\mathfrak{S}) = \operatorname{rg} f \leqslant \dim \mathscr{S}^r(\mathfrak{S})$ où rg f désigne le rang de f. Dans le cas où $n \geqslant 1$ et $r = n - 1$, la proposition 10.10 donne donc dim $\mathscr{P}^{n-1}(\mathfrak{S}) \leqslant n - 1$ et comme dim $\mathbf{G}^{n-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) = n$ on a

$$\mathscr{P}^{n-1}(\mathfrak{S}) \neq \mathbf{G}^{n-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) . \tag{10.18.1}$$

Nous allons voir par récurrence descendante sur r qu'en fait

$$\mathscr{P}^r(\mathfrak{S}) \neq \mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \tag{10.18.2}$$

pour $0 \leqslant r \leqslant n$. Cette relation est trivialement vraie pour $r = n$ car $\mathscr{P}^n(\mathfrak{S}) = \emptyset$ et

$\mathbf{G}^n(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) = \{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\}$. Supposons maintenant que $n \geqslant 1$ et que la relation soit vraie pour $r = r_0 \geqslant 1$. Cela signifie qu'il existe un r_0-plan projectif P_0 qui est transverse à toutes les strates de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Mais alors la restriction $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{S}$ à P_0 est une stratification de $P_0 \cap A$ satisfaisant à la condition (a) de Whitney (cf. [Ch3] 2e partie, proposition 5.42). Et, comme P_0 est projectivement isomorphe à $\mathbf{P}^{r_0}(\mathbf{C})$, la relation (10.18.1) pour $\mathcal{S}_0$ dans P_0 montre qu'il existe un $(r_0 - 1)$-plan projectif Q_0 contenu dans P_0 et transverse dans P_0 à toutes les strates de $\mathcal{S}_0$. Or on voit comme dans la démonstration du lemme 9.1 que Q_0 est alors transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathcal{S}$, ce qui prouve que $\mathscr{P}^{r_0-1}(\mathcal{S}) \neq \mathbf{G}^{r_0-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ et achève la récurrence. Ainsi donc la relation (10.18.2) est vraie pour $0 \leqslant r \leqslant n$, autrement dit $\mathscr{P}^r(\mathcal{S})$ est un sous-ensemble algébrique propre de $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. □

Le corollaire 10.18 justifie la généricité de l'hyperplan projectif $\mathscr{L}$ du théorème 1.1 et celle du $(n-2)$-plan projectif $\mathscr{M}$ du théorème 1.3. Nous nous en sommes aussi servis, au travers de la démonstration du lemme 9.1, dans la récurrence qui permet de déduire le théorème 1.1 du théorème 1.3.

COROLLAIRE 10.19. *Soit A un ensemble algébrique fermé de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec $n \geqslant 1$, muni d'une stratification $\mathcal{S}$ satisfaisant à la condition (a) de Whitney et soit Q un r-plan projectif de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Alors l'ensemble $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ des $(r+1)$-plans projectifs de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ contenant Q est un ensemble algébrique fermé irréductible de $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$, isomorphe à $\mathbf{P}^{n-r-1}(\mathbf{C})$, et l'ensemble $\mathscr{P}^{r+1}(\mathcal{S}, Q)$ des éléments de $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ qui ne sont pas transverses dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathcal{S}$ en est un sous-ensemble algébrique fermé (les éléments de $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ ne rencontrant pas une certaine strate lui sont considérés comme transverses).*

Démonstration. Soit R un $(n-r-1)$-plan projectif de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ ne rencontrant pas Q. Considérons, dans R, des coordonnées homogènes par rapport à une base donnée de $\hat{R}$ (notation (10.2)) et, dans $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$, des coordonnées grassmanniennes par rapport à une base de $\mathbf{C}^{n+1}$ obtenue en complétant la base de $\hat{R}$ par une base de $\hat{Q}$. Les coordonnées grassmanniennes avec lesquelles nous avons défini les plongements (10.6) et (10.7) étaient prises par rapport à la base canonique de $\mathbf{C}^{n+1}$; utiliser une autre base revient à faire subir à $\mathbf{C}^{n+1}$ un automorphisme linéaire qui induit un automorphisme algébrique de $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Avec les choix que nous avons faits, $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ est formé des éléments de $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ dont les coordonnées grassmanniennes de multiindices ne contenant pas ceux de la base de $\hat{Q}$ sont nuls. Et, pour $P \in \mathscr{L}^{r+1}(Q)$, les coordonnées homogènes dans R de l'unique point d'intersection de P avec R sont obtenues à partir des coordonnées grassmanniennes de P en omettant précisément ces zéros. Cela montre que $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ est un sous-ensemble algébrique fermé de $\mathbf{G}^{r+1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ et que l'application qui à tout $(r+1)$-plan projectif contenant Q fait correspondre son unique point d'intersection avec R donne un isomorphisme de $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ avec R donc avec $\mathbf{P}^{n-r-1}(\mathbf{C})$. Maintenant, on a, avec les notations du corollaire 10.18,

$$\mathscr{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q) = \mathscr{L}^{r+1}(Q) \cap \mathscr{P}^{r+1}(\mathfrak{S})$$

et la dernière assertion résulte alors du corollaire 10.18. □

Cela ne veut pas dire que la transversalité aux strates de $\mathfrak{S}$ soit une propriété générique des éléments de $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ car il se peut qu'on ait $\mathscr{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q) = \mathscr{L}^{r+1}(Q)$, par exemple si Q contient le sous-espace projectif tangent en un point à une strate de $\mathfrak{S}$ tout en étant de dimension $\leqslant n-2$. Mais la proposition ci-dessous implique que cette généricité est assurée si Q est transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}$. Contrairement au corollaire 10.18, cette proposition ne peut être déduite de la proposition 10.10 par des considérations de dimension et nous aurons recours au théorème de Sard pour la justifier.

PROPOSITION 10.20. *Les hypothèses et notations étant celles du corollaire 10.19, supposons de plus que Q soit transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}$. Alors $\mathscr{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q)$ est distinct de $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer qu'il existe un $(r+1)$-plan projectif contenant Q et transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}$. Pour chaque strate $S \in \mathfrak{S}$, nous allons interpréter cette transversalité en termes de valeurs critiques d'une projection de centre Q. Cela est rendu possible par le fait que, pour $x \in S \cap Q$, tout élément de $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ est transverse en x à S dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ puisqu'il contient Q et que, par hypothèse, Q possède cette propriété de transversalité. On peut alors choisir un $(n-r-1)$-plan projectif R ne rencontrant pas Q et considérer la projection sur R de centre Q

$$p: \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash Q \to R$$

qui à tout $y \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash Q$ fait correspondre l'unique point d'intersection $p(y)$ de R avec le $(r+1)$-plan projectif déterminé par Q et y. Alors, si $x \in S \backslash Q$ et P est l'unique élément de $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ passant par x, on a l'implication

(10.20.1) P est non transverse en x à S dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \Rightarrow$ x est un point critique de $p_{|S\backslash Q}$

(c'est en fait une équivalence à cause de la submersivité de p). En effet, si j est l'injection canonique de $S \backslash Q$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash Q$, l'application linéaire tangente $T_x(p_{|S\backslash Q})$ à $p_{|S\backslash Q}$ est égale à $T_x p \circ T_x j$ et, d'après le lemme 7.4, si cette application est surjective, alors $\operatorname{Im} T_x j + \operatorname{Ker} T_x p = T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ (et réciproquement d'après la surjectivité de $T_x p$). Comme $\operatorname{Im} T_x j = T_x S$ et $\operatorname{Ker} T_x p = T_x P$, cette égalité est équivalente à la transversalité de P à S en x dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, ce qui justifie (10.20.1). Alors, compte tenu de la transversalité de P à S en tout point de $S \cap Q$ et de la convention selon laquelle, si P ne rencontre pas S, il lui est considéré comme transverse, on a, pour $P \in \mathscr{L}^{r+1}(Q)$, cette autre implication (en fait équivalence):

(10.20.2) P est non transverse à S dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \Rightarrow$ le point d'intersection de P avec R est valeur critique de $p_{|S\setminus Q}$.

Ces valeurs critiques sont les mêmes que celles de l'application de classe C^∞ sous-jacente entre variétés réelles. D'après le théorème de Sard (cf. [Di2] (16.23.1)), l'ensemble K_S de ces valeurs critiques est de mesure nulle dans R. La réunion K des K_S pour $S \in \mathfrak{S}$ étant finie, est donc aussi de mesure nulle et en particulier distincte de R. Alors, si $t \in R\setminus K$, l'élément de $\mathscr{L}^{r+1}(Q)$ déterminé par Q et t est, d'après (10.20.2), transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}$. Cela montre que $\mathscr{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q) \neq \mathscr{L}^{r+1}(Q)$. Notons que ce raisonnement serait encore valable si $\mathfrak{S}$ était une quelconque famille finie ou dénombrable de sous-variétés. □

Dans le cas particulier où $n \geqslant 2$ et où Q est un $(n-2)$-plan projectif transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}$, le corollaire 10.19 et la proposition 10.20 prouvent que $\mathscr{P}^{n-1}(\mathfrak{S}, Q)$ est vide ou composé d'un nombre fini de points. Cela justifie la finitude des hyperplans «mauvais» du théorème 1.3.

Toutes les assertions d'algébricité ou de généricité que nous avons avancées dans l'énoncé des théorèmes 1.1 et 1.3 ou utilisées dans leur démonstration sont maintenant justifiées. Les démonstrations de ces théorèmes sont donc enfin complètes. □□

11. Extension du théorème 1.3 à une variété quasi-projective lisse

On peut généraliser sans trop de changements le théorème 1.3 au cas où l'espace ambiant $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est remplacé par un sous-ensemble algébrique fermé X de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec l'importante restriction, toutefois, que $X\setminus A$ soit *lisse*. Le pinceau Λ continue à être un pinceau d'hyperplans projectifs dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ mais l'ensemble dont on considère les sections, au lieu d'être le complémentaire $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\setminus A$ d'un ensemble algébrique fermé A, est une variété quasi-projective lisse $X\setminus A$. On doit, dans ce cas, munir X *tout entier* d'une stratification de Whitney $\mathfrak{S}^+$ telle que A soit union de strates, ce qui est toujours possible (cf. [L – T2] (1.2.7)), et l'axe $\mathscr{M}$ de Λ doit être pris transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de $\mathfrak{S}^+$. C'est bien une généralisation de la situation du théorème 1.3 car la stratification $\mathfrak{S}$ de A qui y est considérée peut être trivialement étendue en une stratification de Whitney $\mathfrak{S}^+$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ par la strate $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\setminus A$ à laquelle $\mathscr{M}$ et $\mathscr{L}$ sont trivialement transverses. Dans notre nouvelle situation, le «bon» hyperplan $\mathscr{L}$ et les hyperplans «mauvais» $\mathscr{L}_i$ sont considérés *relativement à* $\mathfrak{S}^+$. Cela signifie que, pour la détermination des $\mathscr{L}_i$, entrent non seulement en compte la non transversalité à des strates de A mais au moins aussi, dans l'hypothèse d'une stratification minimale, les points de tangence à $X\setminus A$.

Nous avons en fait été contraint de faire figurer explicitement ces points de tangence dans notre théorème. La raison en est que toutes les étapes de la démonstration du théorème 1.3 peuvent être généralisées sans trop de mal à notre nouvelle situation *sauf* celle du § 5 qui fait intervenir l'isomorphisme de Leray pour lequel il est indispensable que le sous-espace dont on considère le complémentaire dans la variété ambiante soit une sous-variété *lisse,* ce que $\mathscr{L}_i \cap (X \backslash A)$ n'est pas en raison précisément de ces points de tangence. Nous contournons cette difficulté par un artifice qui consiste à ôter de $X \backslash A$ ces points, ce qui revient à les ajouter à A, à poursuivre le raisonnement sans eux et à ne les réintroduire qu'au moment de la conclusion. Cette réintroduction produit alors une perturbation qui n'est pas trop grande car nous montrons, comme pour le point (iv) du lemme 9.2, que ces points de tangence sont en nombre fini.

Il y a donc deux modifications, par rapport à l'énoncé du théorème 1.3, que cette difficulté provoque:

— d'une part nous sommes obligés de considérer, à la place de l'homomorphisme naturel

$$m_k^i : H_k(\mathscr{M} \cap (X \backslash A)) \to H_k(\mathscr{L}_i \cap (X \backslash A))$$

l'homomorphisme naturel

$$m_k'^i : H_k(\mathscr{M} \cap (X \backslash A)) \to H_k((\mathscr{L}_i \cap (X \backslash A)) \backslash K_i) ,$$

où K_i est l'ensemble des points de tangence de $\mathscr{L}_i$ à $X \backslash A$;

— d'autre part les implications qui concluent le théorème ne sont plus valables qu'avec de légères restrictions sur les valeurs de k.

Malgré ces défauts, le théorème auquel nous aboutissons permet de retrouver la version homologique du théorème de Lefschetz pour une variété quasi-projective lisse démontré par Goresky-MacPherson et Hamm-Lê (cf. [G-M1] theorem 4.1, [G-M2] II.5.1 et [H-L2] theorem 1.1.3). Nous précisons ci-dessous l'énoncé, plus faible que ceux cités, que nous parvenons à retrouver (théorème 11.2). Nous opérons cette déduction en conclusion du paragraphe.

Voici donc notre généralisation du théorème 1.3:

THÉORÈME 11.1. *Soit* X *un ensemble algébrique fermé dans* $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, *avec* $n \geqslant 2$, *et* A *un sous-ensemble algébrique fermé de* X *tel que* $X \backslash A$ *soit lisse. Soit* $\mathscr{S}^+$ *une stratification de Whitney de* X *telle que* A *soit union de strates et soit* Λ *un pinceau d'hyperplans projectifs de* $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$

d'axe $\mathscr{M}$ *transverse dans* $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ *à toutes les strates de* $\mathfrak{S}^+$. *Soient* $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$ *des éléments de* Λ, *avec,* $s \geqslant 2$, *parmi lesquels tous ceux qui ne sont pas transverses à toutes les strates de* $\mathfrak{S}^+$ *(ils sont en nombre fini) et soit* $\mathscr{L}$ *un autre élément de* Λ. *Pour* $1 \leqslant i \leqslant s$, *soit* K_i *l'ensemble des points de tangence de* $\mathscr{L}_i$ *à* $X \backslash A$ *(c'est un ensemble fini, éventuellement vide, disjoint de* $\mathscr{M}$*). Considérons, pour tout* k, *les homomorphismes suivants induits par inclusion entre groupes d'homologie singulière à coefficients entiers:*

$$m_k : H_k(\mathscr{M} \cap (X \backslash A)) \to H_k(\mathscr{L} \cap (X \backslash A))$$
$$m'^i_k : H_k(\mathscr{M} \cap (X \backslash A)) \to H_k(\mathscr{L}_i \cap (X \backslash A) \backslash K_i) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s$$
$$l_k : H_k(\mathscr{L} \cap (X \backslash A)) \to H_k(X \backslash A) .$$

Si $d_1, \ldots, d_p$ *sont les dimensions complexes des composantes irréductibles de* X *non contenues dans* A, *ces homomorphismes vérifient les implications suivantes:*

— *pour* $k \neq 2d_1, \ldots, 2d_p$*:*

$$l_k \text{ est surjectif} \quad \text{si} \quad \begin{cases} m_{k-1} & \text{est surjectif} \\ m'^i_{k-2} & \text{est surjectif pour tout } i \\ m_{k-2} & \text{est injectif} , \end{cases}$$

— *pour* $k \neq 2d_1 - 1, \ldots, 2d_p - 1$:

$$l_k \text{ est injectif} \quad \text{si} \quad \begin{cases} m_k & \text{est surjectif} \\ m'^i_{k-1} & \text{est surjectif pour tout } i \\ m_{k-1} & \text{est injectif} \\ \operatorname{Ker} m_{k-2} \cap \operatorname{Ker} m'^1_{k-2} \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} m'^s_{k-2} = \{0\} , \end{cases}$$

avec la convention $H_k(\,.\,) = 0$ *pour* $k < 0$.

Démonstration. Nous allons suivre pas à pas la démonstration du théorème 1.3 et faire les adaptations nécessaires. Rappelons que cette démonstration a occupé les §§3 à 8.

Adaptation du §3. Nous procédons de la même manière à l'éclatement de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de $\mathscr{M}$ et nous gardons les notations (3.1) à (3.11) (cf. aussi fig. 3.1). Mais, outre $\tilde{A}$, nous portons aussi notre attention sur la transformée totale $\tilde{X}$ de X.

Cette attention portée à X est d'ailleurs prise en compte par $\mathfrak{S}^+$ qui est une stratification de X tout entier, adaptée à A. A la place de la stratification $\tilde{\mathfrak{S}}$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ définie en (3.12), nous considérerons donc une stratification $\tilde{\mathfrak{S}}^+$ définie à partir de $\mathfrak{S}^+$ de la même manière que $\tilde{\mathfrak{S}}$ à partir de $\mathfrak{S}$, mais où le rôle de $\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}$ est joué par les $\tilde{S}$ provenant des $S \in \mathfrak{S}^+$ tels que $S \subset X \backslash A$, et où l'on doit, cette fois, ajouter les strates exceptionnelles $(\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{X}) \backslash \tilde{\mathscr{M}}$ et $(\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{X}) \cap \tilde{\mathscr{M}}$. Ainsi donc

(11.1.1) $$\tilde{\mathcal{S}}^+ = \{\tilde{S}\setminus\tilde{\mathscr{M}} \mid S\in\mathcal{S}^+\}\cup\{\tilde{S}\cap\tilde{\mathscr{M}} \mid S\in\mathcal{S}^+\} \cup\{(\tilde{\mathbf{P}}^n\setminus\tilde{X})\setminus\tilde{\mathscr{M}},\ (\tilde{\mathbf{P}}^n\setminus\tilde{X})\cap\tilde{\mathscr{M}}\}\ .$$

Le LEMME 3.13 est alors valable, avec la même démonstration, avec $\mathcal{S}^+$ à la place de $\mathcal{S}$ et X à la place de A. Comme A est réunion de strates de $\mathcal{S}^+$, le point (i) de ce lemme a pour conséquence

(11.1.2) $\tilde{X}\setminus\tilde{A}$ est réunion de strates de $\tilde{\mathcal{S}}^+$.

Cela est important car, puisque $X\setminus A$ a remplacé $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\setminus A$ dans l'énoncé du théorème, c'est désormais $\tilde{X}\setminus\tilde{A}$ qui jouera le rôle de $\tilde{\mathbf{P}}^n\setminus\tilde{A}$ dans la démonstration.

De l'assertion (3.14) à la proposition 3.21 incluse, tout repose sur le lemme 3.13 donc reste valable avec $\tilde{\mathcal{S}}^+$ à la place de $\tilde{\mathcal{S}}$. Les notations et relations (3.15) à (3.19) restent inchangées mais, pour (3.20), on doit prendre, à la place de $\tilde{\mathcal{S}}_*$,

(11.1.3) $$\tilde{\mathcal{S}}_*^+ = \tilde{\mathcal{S}}^+ \mid \tilde{\mathbf{P}}_*^n\ .$$

La PROPOSITION 3.21, proposition principale du paragraphe, est alors valable avec $\tilde{\mathcal{S}}_*^+$ à la place de $\tilde{\mathcal{S}}_*$. D'après (11.1.3) et (11.1.1), les conséquences en sont maintenant que la fibration respecte les traces sur $\tilde{\mathbf{P}}_*^n$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n\setminus\tilde{X}$, des $\tilde{S}$ pour $S\in\mathcal{S}^+$ et de $\tilde{\mathscr{M}}$. Mais, d'après (11.1.2), cela entraîne qu'elle respecte aussi la trace de $\tilde{X}\setminus\tilde{A}$.

A partir de là, nous ne nous étions plus intéressés qu'à ce qui se passait dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\setminus A$ donc dans $\tilde{\mathbf{P}}^n\setminus\tilde{A}$. Maintenant, c'est $X\setminus A$ et $\tilde{X}\setminus\tilde{A}$ qui prendront leurs places respectives. Nous garderons donc les notations (3.23) à (3.28) mais avec les nouvelles valeurs suivantes données à P et $\tilde{P}$:

(11.1.4) $$\begin{cases} P = X\setminus A \\ \tilde{P} = \tilde{X}\setminus\tilde{A}\ , \end{cases}$$

le reste étant défini à partir de P *et* $\tilde{P}$ *de manière inchangée.* On peut garder la figure 3.2 comme représentation imagée de ces notations, à condition de remplacer les légendes des deux flèches ondulées de gauche: «on enlève $\tilde{A}$» et «on enlève A», par les légendes respectives: «on prend la trace sur $\tilde{X}\setminus\tilde{A}$» et «on prend la trace sur $X\setminus A$».

Les ISOMORPHISMES (3.29), ainsi que la première remarque qui les suit, sont encore valables avec ces nouvelles définitions mais il est important de noter dès à présent que, cette fois, les L_i et $L_i^{\#}$ ne sont pas forcément lisses. Il faut aussi noter que maintenant M, L ou certains L_i peuvent être vides si X est de dimension 1 ou 0, même en dehors du cas trivial où $A = X$.

Cette éventuelle vacuité contraint à une légère adaptation du COROLLAIRE 3.30 qui demeure toutefois pour l'essentiel vrai. Nous avons en effet remarqué que la nouvelle forme de la proposition 3.21 donnait une fibration respectant la trace sur $\tilde{\mathbf{P}}_*^n$ de $\tilde{X}\setminus\tilde{A}$. Compte tenu donc que cette trace puisse être vide, nous aboutissons à l'énoncé suivant, valable avec les nouvelles définitions (11.1.4):

(11.1.5) $$\begin{cases} \text{Si } L \text{ est vide, alors } \tilde{P}_* \text{ est vide. Sinon, l'application } \tilde{p}_* \text{ est une fibration} \\ \text{localement triviale topologique de } \tilde{P}_* \text{ sur } \mathbf{P}_*^1 \text{ dont la fibre au-dessus de } \lambda \\ \text{est } L^{\#}. \text{ Si } M \text{ est non vide, alors } \tilde{M}_* = M\times\mathbf{P}_*^1 \text{ est un sous-fibré trivial de} \\ \tilde{P}_* \text{ dont la fibre au-dessus de } \lambda \text{ est } M^{\#}. \end{cases}$$

Cette adaptation du corollaire 3.30 à notre nouvelle situation termine l'examen du §3.

Adaptation du §4. Le contenu de ce paragraphe repose entièrement sur le corollaire 3.30 et les isomorphismes (3.29) avec la première remarque qui les suit. Nous avons vu que dans notre nouvelle situation et avec les nouvelles définitions (11.1.4), les isomorphismes (3.29) restaient valables et le corollaire 3.30 pouvait être adapté en l'énoncé (11.1.5). Tout le §4 reste donc valable dans le cas où M donc L sont non vides. Mais $M = \emptyset$ entraîne que $M^{\#}$, $\tilde{M}_{C_j}$, $\tilde{M}_B$ et $\tilde{M}_*$ sont tous vides et $L = \emptyset$ entraîne que $M = \emptyset$ et que $L^{\#}$, $\tilde{P}_{C_j}$, $\tilde{P}_B$ et $\tilde{P}_*$ sont tous vides. Dans le cas où L ou seulement M est vide, le lemme 4.4 et son corollaire 4.5, le lemme 4.6 ainsi que l'isomorphisme (4.8) et ses propriétés (4.9) et (4.10) demeurent trivialement vrais. Le reste du paragraphe ne se servant que de ces résultats et des isomorphismes (3.29), est donc aussi valable dans ces cas particuliers. Au total, tout le contenu du §4 peut donc être gardé inchangé lorsqu'on se place dans la situation du théorème 11.1 et qu'on redéfinit P et $\tilde{P}$ par (11.1.4).

Adaptation du §5. Comme nous l'avons annoncé, c'est là que surgissent des difficultés. Le début du paragraphe, tendant à séparer la contribution de chaque $L_i^{\#}$, est purement topologique et peut être gardé sans changement, même dans les cas exceptionnels où M ou même L ou certains L_i sont vides. Il s'agit de la définition (5.1), des relations (5.2) et du LEMME 5.3.

C'est au moment d'appliquer l'isomorphisme de Leray que les choses changent. Les relations ensemblistes (5.4) sont toujours valables mais les conditions d'application de l'isomorphisme de Leray aux couples $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$ et $(\tilde{M}_i, M_i^{\#})$, telles qu'elles sont récapitulées par le LEMME 5.5 sont maintenant en défaut. En effet, malgré la lissité de $X\backslash A$, les $L_i = \mathscr{L}_i \cap (X\backslash A)$ ne sont plus forcément lisses car $\mathscr{L}_i$ n'étant pas forcément transverse aux strates de $\mathfrak{S}^+$ contenues dans $X\backslash A$, peut avoir des points de tangence à $X\backslash A$ qui forment l'ensemble K_i de l'énoncé. Ainsi donc, compte tenu des isomorphismes (3.29), la seconde composante du couple $(\tilde{P}_i, L_i^{\#})$ peut ne pas être lisse et l'isomorphisme de Leray ne lui est alors pas applicable.

Nous commençons par montrer que ces points de tangence qui font difficulté sont en nombre fini et non situés sur $\mathscr{M}$, c'est-à-dire que:

(11.1.6) Les ensembles K_i, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, sont finis et disjoints de $\mathscr{M}$.

Cette assertion résulte de l'assertion analogue concernant l'ensemble C qui intervient en (9.6.6) dans la preuve du point (iv) du lemme 9.2. En effet, ce qu'un peu abusivement nous avons appelé «points de tangence de $\mathscr{L}_i$ à $X\backslash A$» sont les points où $\mathscr{L}_i$ rencontre $X\backslash A$ non transversalement. Mais puisque $X\backslash A$ contient la strate de $\mathfrak{S}^+$ passant par un tel point, $\mathscr{L}_i$ rencontre *a fortiori* non transversalement cette strate. Les points de tangence de $\mathscr{L}_i$ à $X\backslash A$ font donc partie des points de rencontre non transversale de $\mathscr{L}_i$ avec les strates de $\mathfrak{S}^+$. Or ces derniers forment précisément l'ensemble C de la preuve du point (iv) du lemme 9.2 à ceci près que X a remplacé A et $\mathfrak{S}^+$ a remplacé $\mathfrak{S}$. L'assertion (11.1.6) se trouve ainsi établie.

Tirant parti de (11.1.6), nous allons maintenant contourner la difficulté provoquée par les K_i en les intégrant au sous-ensemble algébrique A qu'on ôte de X. Nous posons donc

$$K = \bigcup_{i=1}^{s} K_i \tag{11.1.7}$$

et

$$A' = A \cup K . \tag{11.1.8}$$

C'est un nouveau sous-ensemble algébrique fermé de X. Nous allons continuer avec A' à la place de A; ce n'est qu'au moment des conclusions que nous reviendrons à A. Clairement, $X\backslash A'$ est lisse (éventuellement vide) et maintenant plus aucun élément du pinceau Λ n'a de points de tangence avec $X\backslash A'$. Mais nous sommes sortis des hypothèses du théorème 11.1 car la stratification $\mathcal{S}^+$ de X n'est pas forcément adaptée à A', c'est-à-dire que A' n'est pas forcément réunion de strates. Nous sommes donc amenés à modifier $\mathcal{S}^+$ en

$$\mathcal{S}^{+\prime} = \mathcal{S}^+_{|X\backslash K} \cup \{\{c\} \mid c \in K\} . \tag{11.1.9}$$

Comme K est fini, le même argument que dans la preuve du point (iv) du lemme 9.2 montre que $\mathcal{S}^{+\prime}$ est aussi une stratification de Whitney de X (en fait, la situation est ici beaucoup plus simple). Maintenant A' est bien réunion de strates de $\mathcal{S}^{+\prime}$. D'autre part, comme $\mathcal{M}$ et les hyperplans de Λ autres que $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_s$ sont transverses dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de $\mathcal{S}^+$ et ne rencontrent pas K, ils sont aussi transverses dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de $\mathcal{S}^{+\prime}$. Si nous prenons donc A' et $\mathcal{S}^{+\prime}$ à la place de A et $\mathcal{S}^+$, nous sommes dans les hypothèses du théorème 11.1 avec le même pinceau Λ et les mêmes hyperplans exceptionnels $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_s$.

Tout ce qui a été fait jusqu'ici avec A et $\mathcal{S}^+$ est donc aussi valable avec A' et $\mathcal{S}^{+\prime}$. Mais nous devons introduire de nouvelles notations relatives à ces nouveaux éléments pour les distinguer de celles relatives aux anciens. Nous faisons la convention suivante:

(11.1.10) Toute notation relative à la situation avec A et $\mathcal{S}^+$ sera transformée en une notation homologue relative à la situation avec A' et $\mathcal{S}^{+\prime}$ en lui affectant un prime.

Ainsi, par exemple, $P' = X\backslash A'$, $\tilde{P}' = \tilde{X}\backslash\tilde{A}'$, où, bien entendu, $\tilde{A}'$ désigne la transformée totale de A'. Et

$$\begin{aligned} L'_i &= \mathcal{L}_i \cap P' \\ L_i'^{\#} &= \mathcal{L}_i^{\#} \cap \tilde{P}' \\ \tilde{P}'_* &= \tilde{P}' \backslash (L_1'^{\#} \cup \ldots \cup L_s'^{\#}) \\ \tilde{P}'_i &= \tilde{P}'_* \cup L_i'^{\#} \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

C'est donc aux couples $(\tilde{P}'_i, L_i'^{\#})$ et $(\tilde{M}'_i, M_i'^{\#})$ que nous allons demander de satisfaire au lemme 5.5. Il faudra toutefois tenir compte de la vacuité éventuelle de M' ou même de certains L'_i en ajoutant, pour chaque point de l'énoncé, la possibilité des cas exceptionnels suivants:

(11.1.11)
- (i) Si M' est vide, $M_i'^{\#}$ et $\tilde{M}'_i$ sont vides; si L'_i est de plus vide, $L_i'^{\#}$ est vide; il se peut même que $\tilde{P}'_i$ soit vide.
- (ii) Si M' est vide, $\tilde{M}'_i$ et $M_i'^{\#}$ sont vides.
- (iii) Même chose.

Exemple 1. $X = D \cup \{x_0\}$ où D est une droite projective ne contenant pas x_0; $A = \{a_0\}$ où $a_0 \in D$; $\mathcal{S}^+ = \{D\backslash\{a_0\}, \{a_0\}, \{x_0\}\}$. Alors $\mathcal{M}$ ne rencontre ni D ni x_0; on peut prendre seulement 2 hyperplans «mauvais»: $\mathcal{L}_1$ déterminé par $\mathcal{M}$ et x_0 et $\mathcal{L}_2$ déterminé par $\mathcal{M}$ et a_0; supposons que $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$. On a donc $M = \varnothing$, $L_1 = \{x_0, x_1\}$ avec $x_1 \in D$ et

$L_2 = \varnothing$. On a, d'autre part, $K_1 = \{x_0\}$ et $K_2 = \varnothing$, donc $L_1' = \{x_1\}$ et $L_2' = \varnothing$. Enfin, $L(= L')$ est réduit à un point donc ni $\tilde{P}_1'$ ni $\tilde{P}_2'$ ne sont vides.

Exemple 2. $X = \{x_1, \ldots, x_p\}, A = \varnothing$. Dans ce cas $A' = X$ et $P' = \varnothing$ bien que $P = X\backslash A$ ne soit pas vide. Comme P' va devoir remplacer P, cela explique que nous n'ayons pas écarté de la démonstration le cas trivial où $A = X$.

Nous allons maintenant vérifier que le LEMME 5.5, qui est le verrou de la situation, est, une fois complété par (11.1.11), valable pour les couples $(\tilde{P}_i', L_i'^{\#})$ et $(\tilde{M}_i', M_i'^{\#})$ avec M' remplaçant M au point (iii). Rappelons, pour commencer, que $\mathscr{M}$ et $\mathscr{L}$ sont transverses dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à $P' = X\backslash A'$ (en convenant qu'il y a transversalité quand P' ou l'intersection est vide) puisqu'ils sont transverses à toutes les strates de $\mathfrak{S}^{+\prime}$ et que $X\backslash A'$ en est une réunion. Il en résulte que, lorsqu'ils ne sont pas vides, M' et L' sont des sous-variétés (lisses!) de P' de codimensions complexes pures respectives 2 et 1. Mais, par construction de A', les hyperplans exceptionnels $\mathscr{L}_i$ aussi sont transverses à $X\backslash A'$ donc, quand ils ne sont pas vides, les L_i' aussi sont des sous-variétés de P' de codimension pure 1. Nous servant de ces faits, nous allons maintenant passer en revue les démonstrations des différents points du lemme 5.5.

Dans la preuve du *point (iii),* M' n'est plus un ouvert de $\mathscr{M}$. Quand il n'est pas vide, c'en est toutefois une sous-variété, d'après ce qui précède, et le reste de l'argument utilise seulement ce fait-là.

Dans la preuve du *point (i),* pour le couple $(\tilde{M}_i', M_i'^{\#})$, il faut rajouter la précaution que M' peut être vide. En ce qui concerne le couple $(\tilde{P}_i', L_i'^{\#})$, il se trouve que $\tilde{P}_i'$ continue à être un ouvert de $\tilde{P}'$, car les relations (5.2) sont toujours valables, mais que $\tilde{P}'$ n'est plus un ouvert de $\tilde{\mathbf{P}}^n$. A la vacuité éventuelle de $\tilde{P}_i'$ ou $L_i'^{\#}$ près, la démonstration resterait toutefois valable si nous montrions que $\tilde{P}'$ est vide ou est une sous-variété de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ transverse à $\mathscr{L}_i^{\#}$. Mais, quand P' est non vide, cela résulte des assertions (5.5.1) et (5.5.2) appliquées avec $S = P'$ et $\mathscr{K} = \mathscr{L}_i$.

Dans la preuve du *point (ii),* on se trouve devant la même modification que pour le point (i). Mais, si M' n'est pas vide, on peut voir que $\tilde{M}'$ est une sous-variété de $\tilde{P}'$ en appliquant (5.5.1) à $S = P'$. L'assertion (5.5.2) appliquée avec $\mathscr{K} = \mathscr{L}_i$ donne de plus que $\tilde{M}'$ est transverse à $\mathscr{L}_i^{\#}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Comme $\tilde{P}' \supset \tilde{M}'$, le même raisonnement que dans la preuve du point (iii) du lemme 9.2 montre alors que $\tilde{M}'$ est transverse dans $\tilde{P}'$ à $\tilde{P}' \cap \mathscr{L}_i^{\#} = L_i'^{\#}$.

Cela achève de montrer que le LEMME 5.5, complété par les éventualités (11.1.11), est valable pour les couples $(\tilde{P}_i', L_i'^{\#})$ et $(\tilde{M}_i', M_i'^{\#})$.

La validité de l'isomorphisme de Leray (5.6) et de ses propriétés (5.7) et (5.8) est conditionnée par les trois points du lemme 5.5. Mais dans les cas supplémentaires exceptionnels que peuvent présenter les couples $(\tilde{P}_i', L_i'^{\#})$ et $(\tilde{M}_i', M_i^{\#})$, et qui sont donnés par les points correspondants de (11.1.11), on a encore trivialement (5.6), (5.7) et (5.8). Les couples $(\tilde{P}_i', L_i'^{\#})$ et $(\tilde{M}_i', M_i'^{\#})$ y satisfont donc.

Le reste du §5 repose uniquement sur les isomorphismes (5.6) avec leurs propriétés (5.7) et (5.8), sur le lemme 5.3 et sur les isomorphismes (3.29) avec la première remarque qui les suit. Ce qui précède montre donc que son contenu est valable dans la situation du théorème 11.1 et avec les nouvelles définitions (11.1.4) mais à condition de remplacer A par l'ensemble A' défini en (11.1.8) sans toutefois avoir à changer le pinceau $\wedge$ ni ses hyperplans exceptionnels.

Adaptation du §6. Nous allons voir que le contenu de ce paragraphe est valable dans la situation du théorème 11.1 et avec les nouvelles définitions (11.1.4), sans avoir à remplacer

A par A'. Tout d'abord, en effet, nous laissons la définition de f en (6.1) inchangée mais elle s'entend avec les nouvelles définitions (11.1.4) pour P et $\tilde{P}$. Cette application continue à induire les isomorphismes (6.2) car ce ne sont autres que les isomorphismes (3.29).

D'autre part, le fait que le morphisme d'éclatement f coïncide avec la première projection sur $\tilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ implique toujours, comme en (6.3), que l'application f' que f induit entre $\tilde{M}$ et M coïncide avec la première projection de $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Alors, la SUITE EXACTE (6.4) demeure valable car elle résulte de manière purement topologique de cette structure de produit et de la valeur de f'.

Nous en venons maintenant à la PROPOSITION 6.8. Sa démonstration figure dans [Ch2] proposition 4. Elle débute par le lemme 1 qui affirme que l'homomorphisme f_k admet une section, puis renvoie pour le reste à la démonstration de [A – F2] §4, theorem 2.

La démonstration de [A – F2] se place dans le cas où P est un sous-ensemble algébrique fermé lisse de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ mais, une fois admis le résultat sur f_k, elle consiste en un raisonnement topologique valable pour une variété quasi-projective qu'il n'est même pas nécessaire de supposer lisse. Ce raisonnement utilise en effet seulement les faits suivants:

— que f induise un isomorphisme de $\tilde{P}\backslash\tilde{M}$ sur $P\backslash M$; mais cela demeure vrai comme simple corollaire de la propriété analogue pour le morphisme d'éclatement f;

— que le cylindre de l'application f' soit rétracte par déformation d'un voisinage ouvert dans le cylindre de l'application f; pour cela, il suffit que le couple formé par ces deux cylindres d'application soit triangulable (cf. [Sp] 3.3.11); mais c'est bien le cas puisque le couple (P, M) est triangulable (cf. [Lo] et [Hi]);

— l'isomorphisme de Thom pour le fibré en sphères $\tilde{M}$ sur M; mais puisqu'il s'agit, comme nous l'avons vu, d'un fibré trivial, on peut se ramener à la formule de Künneth qui est valable sans hypothèse de lissité de la base (mais notons bien que dans notre situation M est lisse!). Remarquons que tout cela inclut l'éventualité que M soit vide; dans ce cas f est tout simplement un isomorphisme.

La démonstration du lemme 1 de [Ch2] se place dans le cas où $P = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$, mais, outre le cas trivial $P = \varnothing$, elle est en fait valable dès lors que $\tilde{P}$ et P sont des sous-variétés de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ et $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, que f est propre et que toute composante connexe de P rencontre $P\backslash M$ (pour montrer que le degré de f au-dessus de tout compact de P est 1). Ici, nous sommes dans la situation où $P = X\backslash A$ avec l'hypothèse que $X\backslash A$ est lisse. D'autre part, la transversalité de $\mathscr{M}$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de $\mathscr{S}^+$ implique que $\mathscr{M}$ est transverse à $X\backslash A$ qui en est une réunion. Il en résulte, d'après l'assertion (5.5.1), que, si P est non vide, $\tilde{P}$ est une sous-variété de $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Il en résulte aussi qu'aucune composante connexe de P ne peut être contenue dans M. Enfin, la propreté de f ne pose pas problème car $\tilde{P} = \mathrm{f}^{-1}(P)$ et f est propre.

Cette analyse de sa démonstration, montre que la PROPOSITION 6.8 est encore valable dans notre situation.

Enfin, le COROLLAIRE 6.9 qui conclut le paragraphe demeure aussi valable car il ne fait que rassembler la suite exacte (6.4) et la proposition 6.8. Cela achève la vérification de la validité du contenu du §6.

Adaptation du §7. Conformément à ce que nous avons annoncé au début de ce paragraphe, nous y avons seulement utilisé le diagramme commutatif (7.1), la proposition 4.23, le corollaire 5.20, le corollaire 6.9 et des lemmes élémentaires sur la topologie de

$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. La possibilité d'écrire le diagramme (7.1) est donnée par les isomorphismes (3.29) et sa commutativité provient alors de la définition même des applications qui y figurent. Dès lors donc qu'on se place dans une situation où les isomorphismes (3.29) et les énoncés des §§4, 5 et 6 que nous avons cités sont valables, les conclusions du §7 sont aussi valables.

Adaptation du §8. C'est la même chose que pour le §7, excepté que, dans la démonstration du lemme 8.7, on utilise aussi le corollaire 3.30 et les isomorphismes (3.29) pour prouver la relation (8.7.3). Le corollaire 3.30 est maintenant remplacé par l'énoncé (11.1.5) qui inclut les éventualités nouvelles où M ou même L sont vides. Mais dans ces cas (8.7.3) est trivialement vraie. Les conclusions du §8 sont donc valables dans les situations où l'énoncé (11.1.5), les isomorphismes (3.29) et les énoncés terminaux des §§4, 5 et 6 sont valables.

Bilan. Nous avons vu que les conclusions principales des §§3, 4 et 6, en particulier celles dont on se sert aux §§7 et 8, sont valables dans la situation de l'énoncé du théorème 11.1 si l'on redéfinit P et $\tilde{P}$ comme en (11.1.4) (et les éléments qui leur sont liés en conséquence) et si l'on modifie légèrement le corollaire 3.30 en l'énoncé (11.1.5). En revanche, pour assurer la validité des conclusions du §5, nous avons dû remplacer A par l'ensemble algébrique A' défini en (11.1.8). Mais, grâce à la stratification introduite en (11.1.9), nous avons pu nous retrouver dans les hypothèses du théorème 11.1 sans avoir à changer le pinceau Λ ni ses hyperplans exceptionnels. Les énoncés des §§3, 4 et 6 dont nous avons parlé sont donc aussi valables avec A' à la place de A. Ce que nous avons dit sur les §§7 et 8 montre alors que leurs conclusions sont valables dans la situation du théorème 11.1, avec P et $\tilde{P}$ définis comme en (11.1.4) mais avec A' à la place de A.

Nous aboutissons ainsi aux conclusions du théorème 1.3 mais en devant y remplacer les homomorphismes m_k, m_k^i et l_k respectivement par les homomorphismes m'_k, m'^i_k et l'_k, également induits par inclusion, et spécifiés ci-dessous avec la convention d'écriture (11.1.10):

$$\text{(11.1.12)} \qquad \begin{cases} m'_k : H_k(M') \to H_k(L') \\ m'^i_k : H_k(M') \to H_k(L'_i) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s \\ l'_k \ : H_k(L') \ \to H_k(P') \ . \end{cases}$$

Il est maintenant temps de revenir de A' à A. Utilisant toujours la convention (11.1.10), nous avons les relations suivantes entre éléments liés à A et éléments liés à A'

$$\text{(11.1.13)} \qquad \begin{cases} M' = M \\ L' = L \\ L'_i = L_i \backslash K_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s \\ P' = P \backslash K \ , \end{cases}$$

où K est défini en (11.1.7) comme réunion des K_i. En effet, $\mathscr{M}$ et $\mathscr{L}$ ne rencontrent pas K et chaque $\mathscr{L}_i$ rencontre K en exactement K_i. Compte tenu des définitions (11.1.4), les homomorphismes m'^i_k qui figurent dans nos conclusions sont donc bien ceux de l'énoncé et l'on a d'autre part

$$\text{(11.1.14)} \qquad m'_k = m_k \ .$$

Au stade où nous en sommes, nous aboutissons donc à des conclusions de surjectivité ou d'injectivité pour l'homomorphisme naturel l'_k spécifié en (11.1.12) sous précisément les

hypothèses respectives que l'énoncé du théorème 11.1 donne en vue de la surjectivité ou de l'injectivité de l'homomorphisme l_k. Il nous reste donc à étudier la relation entre l_k et l'_k. Notons

$$q_k : H_k(P') \to H_k(P) \tag{11.1.15}$$

l'homomorphisme induit en homologie de rang k par l'inclusion $P' = P \backslash K \hookrightarrow P$. Nous avons

$$l_k = q_k \circ l'_k \tag{11.1.16}$$

et sommes donc conduits à étudier quand q_k est surjectif ou injectif. Nous avons évidemment recours à la suite exacte d'homologie relative du couple (P, P'). La finitude de K, établie en (11.1.6), rend la chose particulièrement simple car, comme P est lisse, nous pouvons isoler les éléments c de K au sein de disques ouverts D_c de P mutuellement disjoints et centrés en ces éléments. En excisant le complémentaire dans P de la réunion de ces disques, complémentaire qui est un fermé de P contenu dans l'ouvert $P \backslash K$, nous obtenons

$$H_k(P, P') = \bigoplus_{c \in K} H_k(D_c, D_c \backslash \{c\}) .$$

Or D_c est un disque de dimension réelle $2 \dim_c P$ où $\dim_c P$ désigne la dimension complexe de P en c. Mais $P = X \backslash A$ étant ouvert dans X, le point c est un point lisse de X et $\dim_c P$ est égale à la dimension de l'unique composante irréductible de X passant par c. Comme $c \notin A$, il ne peut évidemment pas s'agir d'une composante irréductible contenue dans A. Ainsi donc, la dimension du disque D_c est-elle l'un des nombres $2d_1, \ldots, 2d_p$ où $d_1, \ldots, d_p$ sont les dimensions complexes des composantes irréductibles de X non contenues dans A. Par conséquent

$$H_k(P, P') = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq 2d_1, \ldots, 2d_p .$$

La suite exacte d'homologie relative du couple (P, P') donne donc que q_k est surjectif pour $k \neq 2d_1, \ldots, 2d_p$ et injectif pour $k \neq 2d_1 - 1, \ldots, 2d_p - 1$. La relation (11.1.16) montre alors qu'on a les implications:

$$\begin{cases} l'_k \text{ surjectif} \Rightarrow l_k \text{ surjectif} & \text{pour} \quad k \neq 2d_1, \ldots, 2d_p , \\ l'_k \text{ injectif} \Rightarrow l_k \text{ injectif} & \text{pour} \quad k \neq 2d_1 - 1, \ldots, 2d_p - 1 . \end{cases} \tag{11.1.17}$$

Comme il ne nous manquait plus que d'avoir à remplacer l'_k par l_k pour obtenir les implications finales du théorème 11.1, nous y aboutissons donc avec les restrictions respectives sur k que comportent les relations (11.1.17). □

Nous allons conclure ce paragraphe en montrant que le théorème 11.1 permet de retrouver le théorème de Lefschetz pour une variété quasi-projective lisse. Voici l'énoncé précis auquel il permet d'aboutir:

THÉORÈME 11.2. *Soit X un ensemble algébrique fermé de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geqslant 1$, et soit A un sous-ensemble algébrique fermé de X tel que $X \backslash A$ soit lisse. Soit $\mathfrak{S}^+$ une stratification de Whitney de X telle que A soit réunion de strates. Alors, pour tout hyperplan projectif $\mathscr{L}$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ transverse aux strates de $\mathfrak{S}^+$, l'inclusion $\mathscr{L} \cap (X \backslash A) \hookrightarrow X \backslash A$ induit:*

des isomorphismes des groupes d'homologie singulière à coefficients entiers

$$H_k(\mathscr{L} \cap (X \backslash A)) \xrightarrow{\sim} H_k(X \backslash A) \quad \textit{pour} \quad k \leqslant d - 2 ,$$

et un homomorphisme surjectif

$$H_k(\mathscr{L} \cap (X \backslash A)) \twoheadrightarrow H_k(X \backslash A) \quad \textit{pour} \quad k = d - 1 ,$$

où d est la plus petite dimension des composantes irréductibles de X non contenues dans A.

Cet énoncé est un corollaire de théorèmes plus forts conjecturés par Deligne et démontrés indépendamment par Goresky-MacPherson et Hamm-Lê (cf. [De] conjecture 1.3, [G − M1] theorem 4.1, démonstration détaillée dans [G − M2] II.5.1 et [H − L2] theorem 1.1.3). Nous avons dit dans l'introduction que Goresky-MacPherson et Hamm-Lê ont aussi donné des généralisations aux cas singulier et local. Goresky et MacPherson utilisent la théorie de Morse stratifiée et Hamm et Lê une variante astucieuse de la théorie de Morse à coins. Nous allons voir qu'on peut aussi obtenir le théorème 11.2 à la manière de Lefschetz en le déduisant du théorème 11.1:

Démonstration du théorème 11.2 à partir du théorème 11.1. Elle sera très semblable à la démonstration du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3 donnée au §9. Mais comme cette fois il n'y a pas de codimension à prendre en compte, il sera plus commode de faire une récurrence sur la dimension n de l'espace projectif ambiant.

Pour $n = 1$, $\mathscr{L}$ est réduit à un point et il n'y a que quatre possibilités concernant $X \backslash A$: ou bien vide, ou bien composé d'un nombre fini de points non contenus dans $\mathscr{L}$, ou bien égal à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, ou bien enfin égal à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ moins un nombre fini de points non contenus dans $\mathscr{L}$. Dans le premier cas, il est naturel de convenir que $d = -1$. Dans ce cas et dans le deuxième, où $d = 0$, les conclusions du théorème sont vides. Nous préférerons dire qu'elles sont trivialement vraies en faisant la convention $H_k(\,.\,) = 0$ pour $k < 0$ comme dans le théorème 11.1 que nous utiliserons. Dans les deux derniers cas, on a $d = 1$ et seule la conclusion de surjectivité est non triviale. Mais comme $X \backslash A$ est connexe par arcs et $\mathscr{L} \cap (X \backslash A)$ non vide, elle est bien satisfaite.

Pour l'étape de récurrence, nous supposons que les conclusions du théorème 11.2 soient satisfaites pour $n = n_0 \geqslant 1$ et nous voulons montrer qu'elles sont alors satisfaites pour $n = n_0 + 1$. Nous nous plaçons donc dans cette situation. Comme alors $n \geqslant 2$, le lemme 9.1 est valable avec X et $\mathscr{S}^+$ à la place de A et $\mathscr{S}$ et le $(n-2)$-plan projectif $\mathscr{M}$ qu'il donne est l'axe d'un pinceau Λ satisfaisant aux hypothèses du théorème 11.1 dont $\mathscr{L}$ est un «bon» hyperplan. Nous adoptons alors aussi les autres notations du théorème 11.1. Nous voulons, comme au §9, tirer parti de ses implications finales. Nous allons ici aussi voir que les antécédents de ces implications sont satisfaits pour des valeurs convenables de k grâce à l'hypothèse de récurrence. Ce sera, cette fois, le lemme suivant qui permettra de l'appliquer:

LEMME 11.3. *Avec les hypothèses et notations du théorème 11.1, le pinceau* $\wedge$ *possède les propriétés suivantes:*

(i) *Si* $\mathscr{L} \cap X \setminus \mathscr{L} \cap A$ *est non vide, soit* d' *la plus petite dimension des composantes irréductibles de* $\mathscr{L} \cap X$ *non contenues dans* $\mathscr{L} \cap A$; *on a alors* $d' \geqslant d - 1$.

(ii) *Pour* $1 \leqslant i \leqslant s$, *si* $\mathscr{L}_i \cap X \setminus \mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ *est non vide, soit* d'_i *la plus petite dimension des composantes irréductibles de* $\mathscr{L}_i \cap X$ *non contenues dans* $\mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$; *on a alors* $d'_i \geqslant d - 1$.

(iii) $\mathscr{L} \cap X \setminus \mathscr{L} \cap A$ *est lisse; la restriction* $\mathfrak{S}^+_{|\mathscr{L}}$ *de* $\mathfrak{S}^+$ *à* $\mathscr{L}$ *est une stratification de Whitney de* $\mathscr{L} \cap X$ *telle que* $\mathscr{L} \cap A$ *soit union de strates et* $\mathscr{M}$ *est transverse dans* $\mathscr{L}$ *à toutes les strates de* $\mathfrak{S}^+_{|\mathscr{L}}$.

(iv) *Pour* $1 \leqslant i \leqslant s$, $\mathscr{L}_i \cap X \setminus \mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ *est lisse; la restriction de* $\mathfrak{S}^+$ *à* $\mathscr{L}_i$ *peut être raffinée en une stratification de Whitney* $\mathfrak{S}^+_i$ *de* $\mathscr{L}_i \cap X$ *telle que* $\mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ *soit union de strates et que* $\mathscr{M}$ *soit transverse dans* $\mathscr{L}_i$ *à toutes les strates de* $\mathfrak{S}^+_i$.

On n'a pas forcément l'égalité aux points (i) et (ii) comme le montre l'exemple 1 donné après (11.1.11). C'est manifestement un cas exceptionnel, mais nous ne prendrons pas ici la peine de préciser les conditions de l'égalité.

Nous terminons la récurrence à l'aide du lemme 11.3 avant de le démontrer.

D'après le point (iii) du lemme, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathscr{L} \cap X$ et $\mathscr{L} \cap A$ dans $\mathscr{L}$ avec $\mathscr{M}$ comme hyperplan. Comme $\mathscr{L} \cap X \setminus \mathscr{L} \cap A = \mathscr{L} \cap (X \setminus A)$, nous obtenons

$$m_k \text{ est surjectif} \quad \text{pour} \quad k \leqslant d' - 1 ,$$
$$m_k \text{ est injectif} \quad \text{pour} \quad k \leqslant d' - 2 ,$$

où d' est défini comme dans le point (i) du lemme. D'après ce point donc, si $\mathscr{L} \cap X \setminus \mathscr{L} \cap A$ est non vide, cela nous donne *a fortiori* que

$$m_k \text{ est surjectif} \quad \text{pour} \quad k \leqslant d - 2 ,$$
$$m_k \text{ est injectif} \quad \text{pour} \quad k \leqslant d - 3 .$$

Ces assertions sont aussi trivialement vraies si $\mathscr{L} \cap X \setminus \mathscr{L} \cap A$ est vide.

D'après le point (iv) du lemme, nous pouvons aussi appliquer l'hypothèse de récurrence pour $1 \leqslant i \leqslant s$ à $\mathscr{L}_i \cap X$ et $\mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ dans $\mathscr{L}_i$ avec $\mathscr{M}$ comme hyperplan. Comme $\mathscr{L}_i \cap X \setminus \mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ est égal à $\mathscr{L}_i \cap (X \setminus A) \setminus K_i$, nous obtenons de même, compte tenu du point (ii) du lemme, que si $\mathscr{L}_i \cap X \setminus \mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ est non vide, alors

$$\begin{matrix} m'^i_k \text{ est surjectif} & \text{pour} & k \leqslant d - 2 , \\ m'^i_k \text{ est injectif} & \text{pour} & k \leqslant d - 3 , \end{matrix} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s .$$

Et, si $\mathscr{L}_i \cap X \setminus \mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ est vide, ces assertions sont aussi trivialement vraies.

Le théorème 11.1 nous permet alors de conclure à la surjectivité de l_k pour $k \leqslant d - 1$ et à son injectivité pour $k \leqslant d - 2$, *sous réserve* qu'aucune de ces valeurs respectives de k

ne soit exclue par les clauses restrictives respectives de la conclusion du théorème 11.1. Il suffirait en fait, pour cela, qu'on ait $d - 1 < 2d$ puisque d est la plus petite des dimensions des composantes irréductibles de X non contenues dans A. Mais cette inégalité étant équivalente à $d > -1$, est toujours vérifiée. Les conclusions obtenues sur l_k sont donc bien valables et ce sont précisément les conclusions du théorème 11.2. Cela achève la récurrence, sauf dans le cas trivial où $X \backslash A = \varnothing$.

Il nous reste à démontrer le lemme 11.3 pour que la preuve du théorème 11.2 soit complète.

Démonstration du lemme 11.3.

(i) Supposons $\mathscr{L} \cap X \backslash \mathscr{L} \cap A$ non vide. Soit Y une composante irréductible de $\mathscr{L} \cap X$ non contenue dans $\mathscr{L} \cap A$ et de dimension d'. Soit Z l'union des autres composantes irréductibles de $\mathscr{L} \cap X$. Alors $A \cap Y$ et $Z \cap Y$ sont deux sous-ensembles algébriques fermés de Y distincts de Y et, comme Y est irréductible, il en est de même de leur réunion. Soit donc $y \in Y \backslash (A \cup Z)$. En un tel point, on a

$$\dim_y Y = \dim_y \mathscr{L} \cap X \geqslant \dim_y \mathscr{L} + \dim_y X - \dim_y \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) = \dim_y X - 1$$

(cf. [Wh3] 2.12C). Mais comme $y \notin A$, toutes les composantes irréductibles de X passant par y sont de dimension $\geqslant d$ et l'on a donc aussi $\dim_y X \geqslant d$. L'inégalité annoncée pour d' en résulte.

(ii) Le raisonnement du point (i) n'utilise pas d'hypothèse de transversalité. Il est donc aussi valable avec $\mathscr{L}_i$ à la place de $\mathscr{L}$. Si l'on remarque alors qu'une composante irréductible Y_i de $\mathscr{L}_i \cap X$ qui n'est pas contenue dans $\mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ n'est *a fortiori* pas contenue dans $\mathscr{L}_i \cap A$, cela donne le point (ii).

Assertions de lissité de (iii) *et* (iv). Puisque $\mathscr{L} \cap X \backslash \mathscr{L} \cap A$ est égal à $\mathscr{L} \cap (X \backslash A)$ et $\mathscr{L}_i \cap X \backslash \mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ à $\mathscr{L}_i \cap (X \backslash A) \backslash K_i$, ces ensembles sont ceux que nous avons notés L' et L'_i dans la démonstration du théorème 11.1 (cf. (11.1.4) et (11.1.13)). Mais nous y avons montré qu'ils étaient lisses au moment de vérifier que les couples $(\tilde{P}'_i, L'^{\#}_i)$ et $(\tilde{M}'_i, M'^{\#}_i)$ satisfaisaient au lemme 5.5 complété par (11.1.11).

(iii) Il reste à voir l'assertion de stratification. Mais, outre le fait évident que $\mathscr{L} \cap A$ soit union de strates, ce n'est autre que le point (iii) du lemme 9.2 où A et $\mathfrak{S}$ jouent le même rôle que X et $\mathfrak{S}^+$ ici.

(iv) En appliquant le point (iv) du lemme 9.2 avec X et $\mathfrak{S}^+$ à la place de A et $\mathfrak{S}$, on obtient une stratification $\mathfrak{S}_i^+$ qui a les propriétés voulues excepté qu'on ne sait pas si K_i est union de strates. Mais si l'on revient à la démonstration du lemme 9.2, on voit qu'en construisant la stratification demandée, on prend comme strate chaque point de X en lequel $\mathscr{L}_i$ rencontre non transversalement la strate de $\mathfrak{S}^+$ passant par ce point (cf. (9.6.6) et (9.6.7)). Et comme $X \backslash A$ est réunion de strates de $\mathfrak{S}^+$, les points de K_i font partie des points en question. Cela montre que $\mathfrak{S}_i^+$ satisfait aussi à l'exigence que $\mathscr{L}_i \cap (A \cup K_i)$ soit union de strates. □

Avec la démonstration de ce lemme, la déduction du théorème 11.2 à partir du théorème 11.1 est complète. □□

Remarque 11.4. On ne peut pas, de la même manière que nous avons déduit le théorème 1.1 du théorème 1.3, démontrer, à l'aide du théorème 11.1,

un théorème du type de Lefschetz valable pour une variété quasi-projective lisse générale et qui prenne en compte la codimension de A dans X. En effet, une fois qu'on est descendu en dimension jusqu'à ce que la trace de A soit vide ou réduite à un nombre fini de points, on se retrouve devant les particularités topologiques de X lui-même alors que, pour $X = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, on se retrouvait dans la situation simple d'un espace projectif. Voir la remarque 9.5 pour plus de détails et voir aussi (12.2).

12. Directions de recherche

Le cadre géométrique développé dans cet article permet vraisemblablement d'aborder quelques autres problèmes que voici. En particulier, je peux déjà annoncer une généralisation du second théorème de Lefschetz (cf. (12.3)).

(12.1) *Sections par des hypersurfaces au lieu de sections hyperplanes.*

Au lieu de considérer, comme dans les théorèmes 1.3 et 11.1, un pinceau d'hyperplans dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, on peut considérer un système linéaire à un paramètre d'hypersurfaces de degré $d > 1$. Le morphisme de Véronèse v de degré d (cf. [La] 1.3) permet de plonger $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ de telle sorte qu'un tel système d'hypersurfaces soit transformé en les sections de $v(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ par un pinceau d'hyperplans de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$. On doit pouvoir obtenir une extension des théorèmes 1.3 et 11.1 à ces systèmes à un paramètre d'hypersurfaces en appliquant le théorème 11.1 au pinceau d'hyperplans correspondant dans $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$. Mais interviendront alors, en plus, les points de tangence d'éléments de ce pinceau avec $v(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$; ces éléments exceptionnels correspondront à des hypersurfaces du système linéaire présentant des singularités. On devrait toutefois pouvoir en déduire, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 11.2 que nous avons donnée, que le théorème 1.1 est aussi valable pour la section de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ par une hypersurface lisse transverse aux strates d'une stratification de Whitney de A.

(12.2) *Extension du théorème 1.1 à certaines variétés quasi-projectives particulières.*

Nous avons vu pourquoi le théorème 1.1 ne pouvait être généralisé au cas où l'espace ambiant $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est remplacé par un ensemble algébrique fermé X de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, même en supposant $X\backslash A$ lisse (cf. remarques 11.4 et 9.5). On peut toutefois se demander s'il y a des classes significatives de X pour lesquelles il est valable. D'après (12.1), il y aurait en tout cas les variétés de Véronèse.

(12.3) *Cycles évanescents et cycles invariants.*

Dans la situation des théorèmes 1.3 et 11.1, c'est-à-dire celle d'un pinceau générique de sections hyperplanes d'une variété quasi-projective $X\backslash A$, on peut considérer les *cycles évanescents* et les *cycles invariants* de la section de $X\backslash A$ par un hyperplan générique $\mathscr{L}$ du pinceau. Les cycles *évanescents* au voisinage d'un hyperplan exceptionnel $\mathscr{L}_i$ sont ceux qui deviennent homologues à 0 quand $\mathscr{L}$ tend vers $\mathscr{L}_i$. Les cycles *invariants* au voisinage de $\mathscr{L}_i$ sont ceux qui sont à homologie près invariants lors d'une monodromie autour de $\mathscr{L}_i$. On appelle cycles évanescents ceux qui sont engendrés par les cycles évanescents au voisinage de chacun des $\mathscr{L}_i$ et cycles invariants ceux qui sont invariants au voisinage de tous. Lefschetz les étudie longuement aux chapitres II, III et V de [Lf] dans le cas où $A = \varnothing$ et où X est projection générique d'une variété projective lisse (voir [La] pour une traduction en langage moderne; Lefschetz dit «évanouissant» au lieu d'«évanescent»). C'est sur ces cycles que portent le «second» théorème de Lefschetz et le théorème de Lefschetz «vache».

Dans la description géométrique que nous avons donnée aux §§3 à 8, ces cycles apparaissent comme suit: Reprenons les notations de ces paragraphes telles qu'elles sont résumées dans la figure 3.2, avec éventuellement l'adaptation (11.1.4) à la situation du théorème 11.1. Il nous faut admettre parmi les hyperplans exceptionnels un «bon» hyperplan $\mathscr{L}_\infty$ comme nous l'avons fait dans la démonstration du lemme 8.7. On peut alors, en (4.1), choisir comme bouquet de cercles B sur lequel $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \lambda_\infty\}$ se rétracte par déformation, un bouquet composé de s cercles C_i entourant chacun de près un seul des λ_i correspondant aux hyperplans vraiment «mauvais». Dans ces conditions, si l'on décompose $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ en somme directe des $H_1(C_i)$, les classes d'homologie des k-cycles invariants au voisinage de chaque $\mathscr{L}_i$ sont données par le noyau de la restriction correspondante de l'homomorphisme ξ_{k+1} qui apparaît dans le corollaire 4.23: cela résulte des formules (4.25.1). D'autre part, si D_i est le disque délimité par C_i dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_\infty\}$, les classes des k-cycles évanescents au voisinage de $\mathscr{L}_i$ forment, à l'isomorphisme de $L^\#$ avec L près, le noyau de l'homomorphisme naturel $H_k(L^\#) \to H_k(\tilde{p}^{-1}(D_i))$. Celles des cycles évanescents tout court forment le noyau de $H_k(L^\#) \to H_k(\tilde{P}\backslash L^\#_\infty)$.

Je crois pouvoir démontrer, en utilisant ce cadre géométrique, que le «second théorème de Lefschetz» peut être généralisé aux situations des théorèmes 1.1 et 11.2. Ce second théorème complète le théorème classique sur les sections hyperplanes en identifiant le noyau du premier homomorphisme dont on n'affirme pas la bijectivité comme étant formé des cycles évanescents.

Une démonstration complète en a été donnée dans le cas des sections d'une variété projective lisse par Wallace au moyen de méthodes proches de Lefschetz (cf. [Wa]) et par Andreotti et Frankel au moyen de la théorie de Morse (cf. [A-F2]). Je pense donc pouvoir l'étendre au cas d'une variété quasi-projective lisse et, d'autre part, à celui du complémentaire d'un ensemble algébrique fermé avec prise en compte de sa codimension, c'est-à-dire pour l'homomorphisme de rang $n + q - 2$. Cela fera l'objet d'une prochaine publication.

(12.4) *Relation entre sections génériques et sections exceptionnelles.*

Avec les hypothèses et notations du théorème 1.3, on a la relation

(12.4.1) si m_{k-1} est surjectif, alors $\operatorname{Ker} m_{k-2} \supset \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m_{k-2}^{i}$.

Pour voir cela, on constate que, si m_{k-1} est surjectif, on a, avec les notations des §§3 à 8, $\operatorname{Im}(i_k \circ j_k) = \operatorname{Im} i_k$. Cette égalité signifie, en effet, que $i_k \circ j_k$ considérée comme prenant ses valeurs dans $\operatorname{Im} i_k$ est surjective, donc est équivalente, d'après le lemme 7.4, à la relation (7.6.1) qui a été prouvée dans la démonstration du lemme 7.6 sous l'hypothèse de surjectivité de m_{k-1}. Si l'on ajoute alors, comme dans la démonstration du lemme 8.7, un «bon» hyperplan $\mathscr{L}_\infty$ distinct de $\mathscr{L}$ aux hyperplans «mauvais», on a, avec les notations de cette démonstration, $\operatorname{Im} i_k^* = \operatorname{Im} i_k$ car $\operatorname{Im}(i_k \circ j_k) \subset \operatorname{Im} i_k^* \subset \operatorname{Im} i_k$ puisque j se factorise à travers $\tilde{P}_{**}$. Mais, d'après la démonstration du lemme 8.6, on a, d'autre part,

$$\operatorname{Im} \sigma_k \cap \operatorname{Im} i_k = \sigma_k \Big(\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m_{k-2}^{i} \Big)$$

et aussi, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 8.7

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sigma_k \cap \operatorname{Im} i_k^* &= \sigma_k \Big(\operatorname{Ker} m_{k-2}^{\infty} \cap \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m_{k-2}^{i} \Big) \\ &= \sigma_k \Big(\operatorname{Ker} m_{k-2} \cap \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m_{k-2}^{i} \Big) . \end{aligned}$$

On obtient donc, compte tenu de l'injectivité de σ_k donnée par la proposition 6.8,

$$\operatorname{Ker} m_{k-2} \cap \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m_{k-2}^{i} = \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m_{k-2}^{i} ,$$

ce qui prouve l'assertion (12.4.1). □

On a une assertion analogue dans la situation du théorème 11.1 avec les $m_{k-2}'^{i}$ à la place des m_{k-2}^{i}. Ces assertions n'ont sans doute pas grand intérêt si ce n'est de montrer que, quand on prend les sections par les hyperplans d'un pinceau générique, il y a un lien entre la topologie de la section générique et celle des sections exceptionnelles. Il faudrait rechercher d'autres relations, plus significatives que (12.4.1).

(12.5) *Homotopie au lieu d'homologie.*

Il serait bon d'avoir un analogue homotopique des théorèmes 1.3 et 11.1. On en déduirait en particulier la version homotopique du théorème 1.1, c'est-à-dire qu'on aurait une démonstration directe du corollaire 1.2 valable sans restriction sur la codimension q.

Un premier pas dans cette direction est fait dans [Ch1]. On y met en effet en place le même cadre géométrique qu'au §3 ci-dessus pour démontrer le théorème de Zariski dont nous avons parlé dans l'introduction et qui porte, lui, sur le groupe fondamental. Au moment crucial de la réintroduction des hyperplans mauvais, le rôle joué ici par l'isomorphisme de Leray est rempli par la possibilité de faire glisser jusque dans la transformée totale de l'axe de petits lacets entourant les hyperplans mauvais (cf. [Ch1] lemme (4.2.3)). Il s'agirait donc, pour atteindre notre objectif, de généraliser cette façon de faire à des cellules de dimension supérieure.

(12.6) *Variétés quasi-projectives avec singularités.*

On peut se poser la question de ce qu'il en est du théorème 11.1 lorsqu'on ne suppose plus $X\backslash A$ lisse. C'est sans doute dans le cadre homotopique évoqué en (12.5) que cette généralisation peut se faire. Elle serait assortie de restrictions concernant les singularités de l'espace ambiant X exprimées en termes d'obstacles au glissement de cellules le long des hyperplans mauvais. La mesure, de ce point de vue, de l'importance des singularités de X serait peut-être reliée à la profondeur homotopique rectifiée grâce au théorème 4.1.1 de [H-L4].

(12.7) *Théorèmes locaux.*

On doit pouvoir obtenir, avec les méthodes utilisées dans cet article, des analogues des théorèmes 1.3 et 11.1 pour le complémentaire d'un ensemble analytique fermé ou pour la différence de deux ensembles analytiques fermés passant par l'origine dans un voisinage suffisamment petit de l'origine dans $\mathbf{C}^n$. Il conviendra, dans ce cas, de prendre pour axe du pinceau un $(n-2)$-plan affine ne passant pas par l'origine mais légèrement à côté, à la manière des «théorèmes locaux forts» de Hamm et Lê (cf. [H-L1], [H-L3] et [H-L4]). La difficulté, pour avoir une proposition de fibration, consistera à pouvoir disposer d'une projection propre en se plaçant dans un voisinage fermé de l'origine dont le bord soit convenablement adapté aux ensembles analytiques considérés. Pour pouvoir ensuite en déduire des analogues des théorèmes 1.1 et 11.2, il faudra aussi prendre garde de conserver des conditions d'incidence que nous avons ici déduites de propriétés globales de l'espace projectif

(notamment dans le point (ii) du lemme 9.2). Enfin, l'utilisation d'un pinceau d'axe ne passant pas par l'origine donnera une situation qui n'est pas purement locale mais seulement semi-locale qu'il faudra donc traiter soigneusement.

ANNEXE

Isomorphisme de Wang et isomorphisme de Leray

Dans cette annexe, nous donnons une justification sommaire de l'existence et des propriétés des isomorphismes de Wang et de Leray que nous avons utilisés aux §§4 et 5.

1°. Isomorphisme de Wang

Hsien-Chung Wang a donné pour tout fibré localement trivial sur une q-sphère des isomorphismes reliant l'homologie relative de l'espace total modulo une fibre à l'homologie de cette fibre (cf. [Wg]). Nous nous contenterons ici du cas particulier $q = 1$. Soit donc

$$\pi : E \to C$$

un fibré localement trivial topologique sur un cercle. Soit $c \in C$ et posons

$$E_c = \pi^{-1}(c) .$$

Fixons une orientation de C. On a alors, pour tout k, l'*isomorphisme de Wang*

$$\nu_{E,k} : H_{k-1}(E_c) \xrightarrow{\sim} H_k(E, E_c) \tag{A.1}$$

associé à cette orientation de C et portant sur les groupes d'homologie singulière à coefficients entiers, avec la convention $H_{k-1}(E_c) = 0$ pour $k < 1$. Nous allons indiquer comment on peut définir $\nu_{E,k}$ mais en même temps nous montrerons que l'isomorphisme de Wang se comporte naturellement par rapport aux *sous-fibrés* (au sens que nous avons précisé à la fin du §3), c'est-à-dire que, si E' est un sous-fibré de E avec E'_c comme fibre au-dessus de c, l'isomorphisme $\nu_{E',K}$ le concernant (pour la même orientation de C) fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{k-1}(E_c) & \overset{\nu_{E,k}}{\xrightarrow{\sim}} & H_k(E\ , E_c) \\ \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\ H_{k-1}(E'_c) & \overset{\nu_{E',k}}{\xrightarrow{\sim}} & H_k(E', E'_c) \end{array} \tag{A.2}$$

où les flèches verticales sont induites par inclusion.

Ce que nous allons faire ressemble à [La] 6.4 et correspond d'autre part à la description informelle que nous avons donnée au §4 (cf. fig. 4.1). Soit $\omega : [0, 1] \to C$ un lacet basé en c et dont la classe d'homotopie engendre $\pi_1(C, c)$. L'espace topologique E peut être obtenu à partir de $E_c \times [0, 1]$ en recollant $E_c \times \{1\}$ à $E_c \times \{0\}$ au moyen d'un homéomorphisme caractéristique. Plus précisément, si ω^* est un lacet simple de C homotope à ω, on peut, en

recollant de proche en proche des trivialisations locales simultanées de E et E' le long de ω^*, montrer l'existence d'un morphisme de fibrés

$$G: E_c \times [0, 1] \to E$$

au-dessus de $\omega^*: [0, 1] \to C$ tel que:

(i) $G(x, 0) = x$ pour tout $x \in E_c$,

(ii) $G(E'_c \times \{t\}) = E' \cap \pi^{-1}(\omega^*(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$,

(iii) G induise des homéomorphismes $E_c \times [0, 1/2] \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\omega^*([0, 1/2]))$
et $E_c \times [1/2, 1] \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\omega^*([1/2, 1]))$.

L'homéomorphisme caractéristique dont nous avons parlé est alors l'application

$$(x, 1) \mapsto (G(x, 1), 0)$$

et l'espace quotient de $E_c \times [0, 1]$ obtenu par ce recollement s'envoie homéomorphiquement sur E en passant au quotient dans G. Il est classique dans la théorie des espaces obtenus par adjonction (cf. [Gb] chap. 19), de voir que dans ces conditions G induit, pour tout k, un isomorphisme

$$\bar{G}_k: H_k(E_c \times [0, 1], E_c \times \{0, 1\}) \xrightarrow{\sim} H_k(E, E_c) \tag{A.3}$$

pourvu que $E_c \times \{0, 1\}$ soit rétracte fort par déformation d'un voisinage dans $E_c \times [0, 1]$, ce qui est bien le cas. Les isomorphismes (A.3) restent en fait inchangés si l'on prend à la place de ω^* un autre lacet ω^{**} de C homotope à ω mais pas forcément simple et à la place de G un morphisme K de fibrés au-dessus de ω^{**} satisfaisant seulement à la condition (i); en effet, le fibré localement trivial E ayant une base compacte, possède la propriété de relèvement des homotopies et on peut donc trouver, au-dessus d'une homotopie h de ω^* vers ω^{**}, une homotopie H de G vers K qui vérifie la condition $H(E_c \times \{0, 1\} \times [0, 1]) \subset E_c$ (cf. [Sp] 2.7.14 et 2.8.10). Les isomorphismes (A.3) sont donc entièrement déterminés par le choix de l'orientation sur C.

Maintenant, la formule de Künneth appliquée au produit $E_c \times ([0, 1], \{0, 1\})$ donne, pour tout k, un isomorphisme

$$H_{k-1}(E_c) \otimes H_1([0, 1], \{0, 1\}) \xrightarrow{\sim} H_k(E_c \times [0, 1], E_c \times \{0, 1\})$$

qui à tout élément décomposable $z \otimes \bar{u}$ fait correspondre $z \times \bar{u}$, produit-croix homologique de z par $\bar{u}$. Le groupe $H_1([0, 1], \{0, 1\})$ étant libre sur le générateur privilégié

$$\bar{a}_0 \in H_1([0, 1], \{0, 1\}) \quad \text{classe du cycle relatif singulier } \mathrm{Id}_{[0, 1]},$$

on obtient alors l'isomorphisme

$$H_{k-1}(E_c) \xrightarrow{\sim} H_k(E_c \times [0, 1], E_c \times \{0, 1\})$$
$$z \mapsto z \times \bar{a}_0 .$$

En composant cet isomorphisme avec l'isomorphisme (A.3) on aboutit à une expression explicite de l'isomorphisme de Wang $\nu_{E,k}$ que nous voulons définir:

(A.4) $$\nu_{E,k}: H_{k-1}(E_c) \xrightarrow{\sim} H_k(E, E_c)$$
$$z \mapsto \bar{G}_k(z \times \bar{a}_0) ,$$

expression qui, nous l'avons vu, ne dépend que de l'orientation choisie sur C.

D'autre part, si nous prenons G satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus, sa restriction à $E'_c \times [0, 1]$ induit une application

$$G': E'_c \times [0, 1] \to E'$$

qui a les mêmes propriétés vis-à-vis de E' que G vis-à-vis de E. L'isomorphisme de Wang $\nu_{E',k}$ pour E' associé à la même orientation de C s'exprime donc par la formule (A.4) avec G' à la place de G et la commutativité du diagramme (A.2) résulte alors de la naturalité du produit-croix homologique (cf. [Sp] 5.3.11).

Nous examinons maintenant le cas d'un *fibré trivial* où $E = F \times C$ et où π est la projection sur le second facteur. Nous allons montrer que l'isomorphisme de Wang $\nu_{E,k}$ se réduit alors à un produit-croix

(A.5) $$\nu_{E,k}(z^{\#}) = z \times [\omega]_{(C,\{c\})} \quad \text{pour} \quad z \in H_{k-1}(F) ,$$

où $[\omega]_{(C,\{c\})}$ désigne la classe d'homologie dans $H_1(C, \{c\})$ de ω considéré comme 1-simplexe (cycle) singulier relatif de C modulo $\{c\}$ et $z^{\#}$ désigne l'élément correspondant à z dans l'isomorphisme $H_{k-1}(F) \xrightarrow{\sim} H_{k-1}(E_c)$ induit par l'identification canonique de F à $E_c = F \times \{c\}$.

On peut, en effet, user de la latitude que nous avons signalée dans la construction de Wang pour le choix du morphisme de fibrés et appliquer la formule (A.4) à $\nu_{E,k}$ avec, à la place de G, le morphisme trivial de fibrés au-dessus de ω

$$E_c \times [0, 1] \to F \times C$$
$$((x, c), t) \mapsto (x, \omega(t)) .$$

Ce morphisme satisfait à la condition (i) ci-dessus, ce qui, nous l'avons vu, est suffisant. On obtient alors la formule (A.5).

Enfin, il résulte de la formule (A.4) et de la formule donnant le bord d'un produit-croix (cf. [Sp] 5.3.15) que, si $\partial: H_k(E, E_c) \to H_{k-1}(E_c)$ est l'homomorphisme bord, on a

(A.6) $$\partial \circ \nu_{E,k} = (-1)^{k-1}(\theta_{k-1} - \mathrm{Id}_{H_{k-1}(E_c)}) ,$$

où θ_{k-1} est la monodromie en homologie de rang $k-1$ au-dessus de ω.

On retrouve donc bien les isomorphismes (4.8) utilisés au §4 et leurs propriétés (4.9), (4.10) et (4.11).

2°. Isomorphisme de Leray

Nous avons utilisé au §5 la version en homologie singulière à coefficients entiers d'un isomorphisme envisagé par Jean Leray dans la définition de son opération «cobord» (cf. [Lr] chap. II, n° 19). Nous l'avons fait sous les conditions données par le lemme 5.5 qui permettent d'avoir les isomorphismes (5.6) et leurs propriétés de naturalité (5.7) et de réduction à un produit-croix dans le cas trivial (5.8). Nous allons les justifier sommairement sous des hypothèses en fait plus générales.

On a, pour tout k, un *isomorphisme de Leray*

$$\tau_{X,Y,k}: H_{k-N}(Y) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X\setminus Y) \tag{A.7}$$

(avec la convention $H_{k-N}(Y) = 0$ pour $k < N$), toutes les fois qu'on est en présence d'un couple (X, Y) où X est une variété réelle de classe C^∞ séparée paracompacte orientée et où Y est une sous-variété orientée fermée de X de codimension pure N. Le point (i) du lemme 5.5 donne bien des conditions suffisantes de validité avec $N = 2$ puisque les variétés analytiques complexes ont une structure sous-jacente de variété réelle de classe C^∞ canoniquement orientée et que la codimension réelle d'une sous-variété est égale au double de sa codimension complexe.

Nous allons voir que l'isomorphisme de Leray peut être déduit de *l'isomorphisme de Thom* pour un voisinage tubulaire orienté de Y dans X (cf. [Th1]). Avec les hypothèses que nous avons faites sur X, il existe effectivement un voisinage tubulaire T de classe C^∞ de Y dans X (cf. [Ma] proposition 6.2). Un tel *voisinage tubulaire* consiste en un triplet

$$T = (\pi: E \to Y, \varepsilon, \psi)$$

formé de:

— un fibré euclidien $\pi: E \to Y$ de classe C^∞ sur Y;

— une fonction numérique $\varepsilon: Y \to]0, \infty[$ de classe C^∞;

— un difféomorphisme $\psi: B_\varepsilon(E) \to |T|$ où

  — $B_\varepsilon(E)$ est le voisinage ouvert de rayon ε de la section nulle de E,

  — $|T|$ est un voisinage ouvert de Y dans X,

difféomorphisme qui, sur cette section nulle identifiée à Y, coïncide avec l'identité de Y.

On définit aussi la *projection tubulaire* de T:

$$\pi_T: |T| \to Y$$
$$x \mapsto \pi(\psi^{-1}(x)) .$$

Cette projection tubulaire est à la fois une rétraction sur Y et une fibration localement triviale de classe C^∞ en boules ouvertes; la dimension de ces boules est $N = \dim_y X - \dim_y Y$ pour tout $y \in Y$. On peut, de plus, grâce aux orientations de Y et X, avoir une orientation en tant que fibré de ce fibré localement trivial; on a, en effet, la relation entre espaces tangents

$$T_y X = T_y Y \oplus T_y(\pi_T^{-1}(y)) \quad \text{pour} \quad y \in Y$$

qui permet d'orienter de manière non ambigüe et localement cohérente les fibres; nous dirons aussi que c'est l'*orientation du voisinage tubulaire T déduite des orientations de Y et X*. Comme la base du fibré $\pi_T: |T| \to Y$ est séparée paracompacte, il existe alors une unique classe d'orientation cohomologique associée à l'orientation de ce fibré, à savoir un élément

$$\bar{Z}_T \in H^N(|T|, |T|\setminus Y)$$

dont la restriction à chaque fibre $\pi_T^{-1}(y)$ donne le générateur de

$$H^N(\pi_T^{-1}(y), \pi_T^{-1}(y)\setminus\{y\})$$

compatible avec l'orientation qui a été définie sur $\pi_T^{-1}(y)$ (on peut se ramener à E par ψ^{-1} suivi d'une excision et appliquer [Di3] (24.39.6) et (24.39.10)). Nous dirons que c'est la *classe d'orientation cohomologique de T déduite des orientations de Y et X.* Pour ce voisinage tubulaire orienté, on a alors, pour tout k, *l'isomorphisme de Thom*:

$$\text{(A.8)} \qquad \begin{aligned} \varphi_{T,k}: H_k(|T|, |T|\setminus Y) &\xrightarrow{\sim} H_{k-N}(Y) \\ \bar{z} &\mapsto (\pi_T)_{k-N}(\bar{Z}_T \frown \bar{z}) , \end{aligned}$$

où $\bar{Z}_T \frown \bar{z}$ désigne le produit-chapeau de $\bar{Z}_T$ par $\bar{z}$ et $(\pi_T)_{k-N}$: $H_{k-N}(|T|) \to H_{k-N}(Y)$ est induit par π_T, étant entendu que $H_{k-N}(Y) = 0$ pour $k < N$ (cf. [Sp] theorem 5.7.10 à la situation duquel on peut se ramener en transitant par le sous-fibré en sphères de rayon ε de E).

Maintenant, comme nous avons supposé Y fermée, on a aussi l'isomorphisme

$$H_k(|T|, |T|\setminus Y) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X\setminus Y)$$

induit par inclusion, obtenu en excisant le fermé $X\setminus|T|$ de X dans l'ouvert $X\setminus Y$. En composant cet isomorphisme avec $(\varphi_{T,k})^{-1}$, on obtient alors un isomorphisme

$$\tau_{T,k}: H_{k-N}(Y) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X\setminus Y)$$

qui, compte tenu de l'interprétation géométrique de l'isomorphisme de Thom, correspond à la description informelle que nous avons donnée au §5 pour l'isomorphisme de Leray (cf. fig. 5.1). Mais il faut s'assurer qu'il est intrinsèque au couple (X, Y), c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du voisinage tubulaire T choisi comme intermédiaire.

Nous allons voir que cette indépendance peut être déduite du théorème d'unicité à isotopie près pour les voisinages tubulaires (cf. [Ma] proposition 6.1). Soit, en effet, T' un autre voisinage tubulaire de classe C^∞ de Y dans X. D'après ce théorème, il existe une isotopie

$$H: X \times [0, 1] \to X$$

de classe C^∞ laissant fixes les points de Y, qui part de l'identité de X et qui aboutit à un difféomorphisme g de X possédant les propriétés suivantes:

(i) il existe, comme pour tout autre difféomorphisme de X laissant fixes les points de Y, un voisinage tubulaire $g_*(T)$ de classe C^∞ de Y dans X, dit *image directe de T par g,* vérifiant

$$\begin{aligned} &|g_*(T)| = g(|T|) \quad \text{et} \\ &\pi_{g_*(T)}(g(x)) = \pi_T(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in |T| ; \end{aligned}$$

mais aussi

(ii) $g_*(T)$ est «équivalent» à T', notion qui implique qu'il existe un autre voisinage tubulaire U de classe C^∞ de Y dans X tel que

$$\begin{aligned} &|U| \subset |g_*(T)| \cap |T'| \quad \text{et} \\ &\pi_{g_*(T)}||U| = \pi_{T'}||U| = \pi_U . \end{aligned}$$

On peut alors voir en deux étapes que les isomorphismes de Leray $\tau_{T,k}$ et $\tau_{T',k}$ correspondant à T et T' sont les mêmes:

Pour commencer, on vérifie que les classes d'orientation cohomologiques $\bar{Z}_{g_*(T)}$ et $\bar{Z}_{T'}$ pour $g_*(T)$ et T' déduites des orientations de Y et X ont une restriction à $(|U|, |U|\setminus Y)$ égale à la classe d'orientation $\bar{Z}_U$ pour U. La naturalité du produit-chapeau (cf. [Sp] 5.6.16) implique alors que les isomorphismes de Leray correspondant à ces trois voisinages tubulaires sont les mêmes, c'est-à-dire que $\tau_{U,k} = \tau_{g_*(T),k} = \tau_{T',k}$.

Ensuite, on voit que g induit un isomorphisme au-dessus de l'identité entre les fibrés $\pi_T: |T| \to Y$ et $\pi_{g_*(T)}: |g_*(T)| \to Y$ qui préserve leur orientation comme fibré déduite des orientations de Y et X, car g laisse fixe Y et, étant isotope à l'identité de X, préserve l'orientation de X. Il en résulte que g induit un isomorphisme

$$H^N(|g_*(T)|, |g_*(T)|\setminus Y) \xrightarrow{\sim} H^N(|T|, |T|\setminus Y)$$

qui transforme $\bar{Z}_{g_*(T)}$ en $\bar{Z}_T$. La naturalité du produit-chapeau donne alors que $\tau_{g_*(T),k}$ est égal à $\tau_{T,k}$ suivi de l'isomorphisme $H_k(X, X\setminus Y) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X\setminus Y)$ induit en homologie par g. Mais comme g est isotope à l'identité par une isotopie préservant $X\setminus Y$, ce dernier isomorphisme est égal à l'identité. On trouve donc que $\tau_{g_*(T),k} = \tau_{T,k}$.

Avec l'étape précédente, cela montre que $\tau_{T,k} = \tau_{T',k}$ et leur valeur commune est donc un isomorphisme

$$\tau_{X,Y,k}: H_{k-N}(Y) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X\setminus Y)$$

intrinsèque au couple (X, Y) qui est l'isomorphisme de Leray (A.7).

Remarquons que ce qui précède montre aussi que les classes d'orientation cohomologiques déduites des orientations de Y et X pour les différents voisinages tubulaires de classe C^∞ de Y dans X sont les restrictions d'un même générateur $\bar{Z} \in H^N(X, X\setminus Y)$ auquel elles correspondent par excision. Remarquons, d'autre part, que l'orientation d'un voisinage tubulaire T de Y dans X, déduite des orientations de Y et X, donne une orientation du fibré normal de Y relativement à X grâce à l'isomorphisme canonique de $T_y(\pi_T^{-1}(y))$ avec T_yX/T_yY pour $y \in Y$: la cohérence locale des orientations des T_yX/T_yY est assurée par celle des $T_y(\pi_T^{-1}(y))$. Mais n'importe quel autre supplémentaire de T_yY dans T_yX, orienté de manière compatible avec T_yY et T_yX, donne la même orientation sur T_yX/T_yY. Cette orientation du fibré normal ne dépend donc pas du voisinage tubulaire T choisi comme intermédiaire et nous dirons que c'est *l'orientation du fibré normal de Y relativement à X déduite des orientations de Y et X*. Le générateur $\bar{Z}$ est donc en fait déterminé par cette orientation du fibré normal.

Nous en venons maintenant à la question de la naturalité de l'isomorphisme de Leray, qui n'a évidemment de sens que grâce à son caractère intrinsèque. Soit donc (X, Y) un couple satisfaisant comme ci-dessus aux conditions de validité de l'isomorphisme de Leray (A.7). Supposons que X' soit une sous-variété orientée *fermée* de X *transverse à Y dans X* et posons $Y' = X' \cap Y$. Constatons alors, qu'en raison de l'hypothèse de transversalité, Y' est une sous-variété fermée de codimension pure N dans X'. Constatons aussi que X' est séparée paracompacte puisque, nous l'avons vu, cette propriété se transmet de X à ses sous-variétés. Il ne manque donc qu'une orientation sur Y' pour que le couple (X', Y') satisfasse aux conditions de validité de l'isomorphisme de Leray. Nous allons voir que Y' peut effectivement être orientée et que, si on le fait de manière convenable, l'isomorphisme de Leray pour le couple (X', Y') se comporte naturellement par rapport à l'isomorphisme de Leray pour le couple (X, Y). Pour cela, le choix de l'orientation sur Y' doit être tel que les orientations de Y' et X' satisfassent vis-à-vis des orientations de Y et X à une condition de cohérence naturelle:

Cette condition porte sur les orientations des fibrés normaux $\mathcal{N}'$ de Y' relativement à X' et $\mathcal{N}$ de Y relativement à X. Une orientation de Y' déterminerait, nous l'avons vu, une orientation de $\mathcal{N}'$ en tant que fibré, déduite des orientations de Y' et X'. Nous avons, par ailleurs, une orientation de $\mathcal{N}$ déduite de celles de Y et X. Or $\mathcal{N}'$ peut aussi être retrouvé comme fibré induit par $\mathcal{N}$ au-dessus de Y'. Cela est possible grâce à la transversalité de X' à Y dans X qui permet une identification canonique de $\mathcal{N}'$ à ce fibré induit. Cette transversalité implique, en effet, les égalités

$$T_{y'}X' + T_{y'}Y = T_{y'}X\,; \qquad T_{y'}Y' = T_{y'}X' \cap T_{y'}Y \quad \text{pour} \quad y' \in Y'$$

et les fibres au-dessus de y' de $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}$ sont alors respectivement $T_{y'}X'/T_{y'}X' \cap T_{y'}Y$ et $T_{y'}X/T_{y'}Y$ qui s'identifient canoniquement en passant au quotient dans l'injection canonique de $T_{y'}X'$ dans $T_{y'}X$. Cette identification canonique de $\mathcal{N}'$ au fibré induit par $\mathcal{N}$ au-dessus de Y' donne une seconde orientation de $\mathcal{N}'$ obtenue en y transportant celle de $\mathcal{N}$. La condition de cohérence qu'on peut alors naturellement exiger est que les deux orientations en question sur $\mathcal{N}'$ coïncident. Mais il est toujours possible d'orienter Y' de façon à satisfaire à cette condition de cohérence. En effet, on commence par orienter $\mathcal{N}'$ de la seconde manière, grâce à l'orientation de $\mathcal{N}$. On peut ensuite obtenir, à partir des orientations de $\mathcal{N}'$ comme fibré et de X' comme variété, une orientation du fibré tangent de Y' par la procédure inverse de celle qui nous a permis, ci-dessus, d'orienter un fibré normal à partir des orientations des variétés constitutives. On aboutit ainsi à une orientation de Y' qui satisfait à la condition de cohérence voulue et qui est la seule à pouvoir la satisfaire. Nous munissons donc Y' de cette orientation bien déterminée dont nous dirons que c'est *l'orientation de* Y' qui est *cohérente avec celle de* X' *par rapport à celles de* Y *et* X.

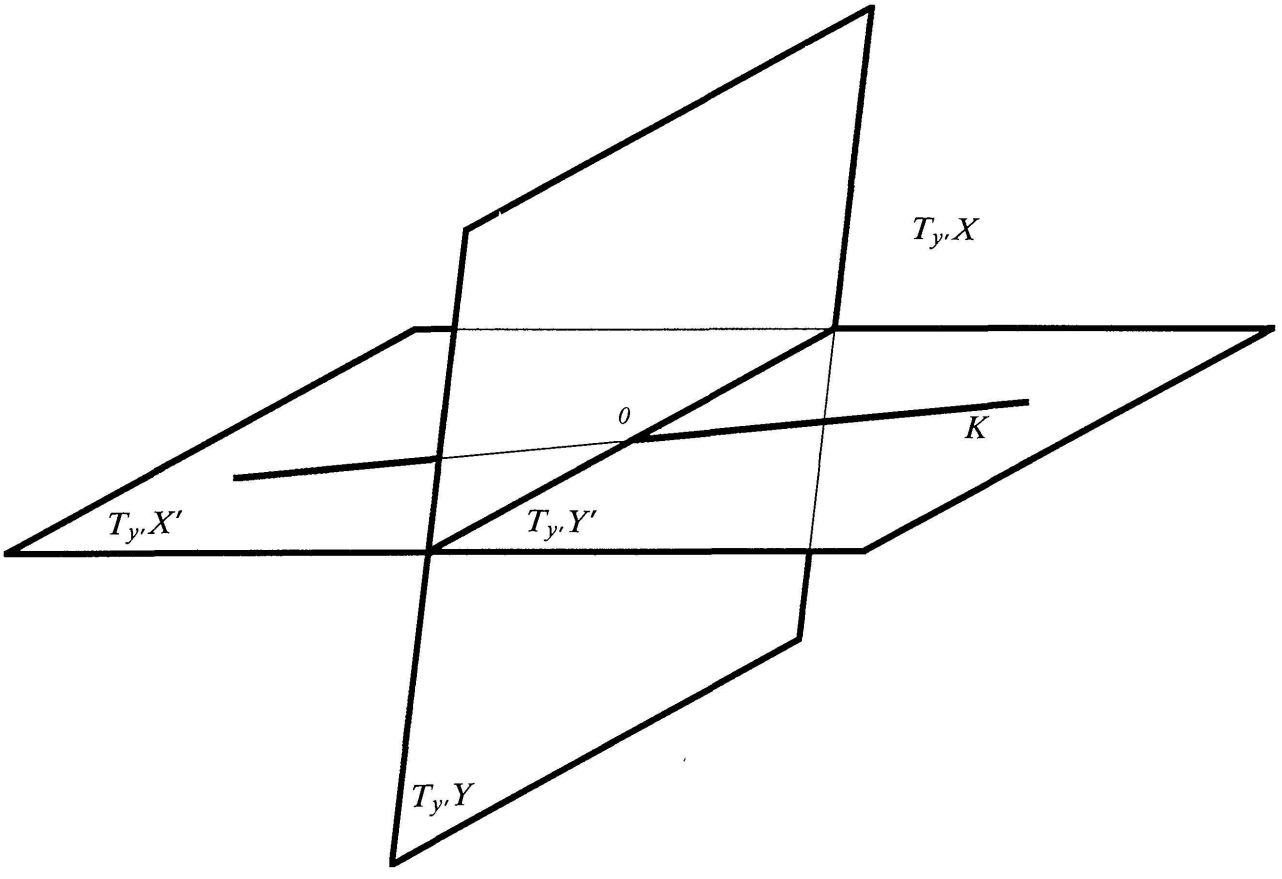


FIGURE A.1

On peut donner une description géométrique assez simple de l'orientation qui en résulte pour les espaces tangents $T_{y'}Y'$: Soit K un supplémentaire de $T_{y'}Y'$ dans $T_{y'}X'$ (cf. fig. A.1). C'est aussi un supplémentaire de $T_{y'}Y$ dans $T_{y'}X$. Les orientations de $T_{y'}Y$ et $T_{y'}X$ déterminent, par compatibilité, une orientation de K et alors, les orientations de K et $T_{y'}X'$ déterminent l'orientation voulue sur $T_{y'}Y'$.

Sous les hypothèses faites concernant X' et avec l'orientation sur $Y' = X' \cap Y$ définie ci-dessus, l'isomorphisme de Leray $\tau_{X',Y',k}$ pour le couple (X', Y') se comporte naturellement par rapport à l'isomorphisme de Leray $\tau_{X,Y,k}$ pour le couple (X, Y), ce qui veut dire que le diagramme suivant, où les flèches verticales sont induites par inclusion, est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\tau_{X,Y,k}}{\tilde{\rightarrow}} & \\ H_{k-N}(Y) & & H_k(X, X\setminus Y) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ & \overset{\tau_{X',Y,k}}{\tilde{\rightarrow}} & \\ H_{k-N}(Y') & & H_k(X', X'\setminus Y') \end{array} \tag{A.9}$$

Avant d'esquisser une justification de cette propriété, notons que le point (ii) du lemme 5.5 en donne bien des conditions suffisantes de validité. Autrement dit, si (X, Y) est un couple composé d'une variété analytique complexe séparée paracompacte et d'une sous-variété fermée de codimension pure (pas forcément égale à 1) et si (X', Y') est un autre couple formé d'une sous-variété fermée de X transverse à Y dans X et de son intersection avec Y, alors les variétés réelles canoniquement orientées sous-jacentes vérifient les hypothèses formulées ci-dessus pour la validité de (A.9). Pour voir cela, commençons par remarquer que les espaces tangents aux variétés réelles sous-jacentes sont les espaces vectoriels réels sous-jacents aux espaces tangents complexes. La transversalité de X' à Y au sens complexe est donc équivalente à sa transversalité au sens réel. Il reste maintenant à s'assurer que les orientations canoniques de Y' et X' satisfont bien à la condition de cohérence voulue vis-à-vis des orientations canoniques de Y et X. Or ce que nous avons dit sur les espaces tangents implique aussi que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ (avec les notations ci-dessus) sont les fibrés réels sous-jacents aux fibrés normaux complexes. Ils ont donc une orientation canonique en tant que fibrés qui induit sur chaque fibre son orientation canonique. Mais ces orientations de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont précisément celles que nous avons dit être déduites des orientations canoniques de Y et X d'une part et de Y' et X' d'autre part. En effet, nous avons vu que pour orienter de cette manière une fibre T_yX/T_yY de $\mathcal{N}$, par exemple, on pouvait se servir de n'importe quel supplémentaire F_y de T_yY dans T_yX qu'on orientait de manière compatible avec T_yY et T_yX. Mais si l'on choisit pour F_y un supplémentaire de T_yY pour les structures d'espaces vectoriels *complexes,* c'est son orientation canonique qui est compatible avec celles de T_yY et T_yX. L'isomorphisme par lequel on la transporte à T_yX/T_yY étant aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes, on aboutit bien à l'orientation canonique de T_yX/T_yY. Il nous reste maintenant à voir que l'orientation canonique de $\mathcal{N}'$ est la même que celle qu'on obtient en y transportant l'orientation canonique de $\mathcal{N}$ au moyen de l'identification de $\mathcal{N}'$ au fibré induit par $\mathcal{N}$ au-dessus de Y'. Mais cela est bien le cas car cette identification, que nous avons explicitée, se fait au moyen d'un isomorphisme canonique des fibres valable aussi pour les structures complexes.

La propriété de naturalité que nous avons énoncée en (A.9) résulte de deux faits essentiels. En premier lieu, l'isomorphisme de Thom (A.8) pour le fibré orienté $\pi_T : |T| \to Y$ se comporte naturellement par rapport aux fibrés orientés induits au-dessus de sous-ensembles de la base: cela est une conséquence immédiate de la naturalité du produit-chapeau. En second lieu, nous verrons qu'on peut choisir un voisinage tubulaire T de classe C^∞ de Y dans X qui soit en bonne position par rapport à X'. «En bonne position» signifie que $\pi_T^{-1}(Y') \subset X'$, ce qui permet d'avoir un voisinage tubulaire T' de classe C^∞ de Y' dans X' tel que $\pi_T^{-1}(Y') = |T'|$ et tel que π_T coïncide avec $\pi_{T'}$ sur $|T'|$. Avec cette configuration, en effet, $\pi_{T'} : |T'| \to Y'$ est le fibré induit au-dessus Y' par $\pi_T : |T| \to Y$. De plus, l'orientation de $\pi_{T'} : |T'| \to Y'$ (déduite des orientations de Y' et X') est bien induite par l'orientation de $\pi_T : |T| \to Y$ (déduite de celles de Y et X). Cela résulte de la condition de cohérence entre les orientations des fibrés normaux de Y' relativement à X' et de Y relativement à X que nous avons formulée plus haut et en vue de laquelle nous avons précisément choisi l'orientation de Y'. On peut, dans ces conditions, utiliser la naturalité de l'isomorphisme de Thom et en déduire la naturalité de l'isomorphisme de Leray. Il nous reste à justifier la possibilité de choisir T en «bonne position».

Pour que T soit en bonne position par rapport à X', il suffit qu'il soit «compatible» avec une rétraction r d'un voisinage ouvert Ω de Y dans X telle que $r^{-1}(Y') \subset X'$, cette compatibilité voulant dire que $|T| \subset \Omega$ et que r est constante sur les fibres de π_T (en fait π_T est alors égale à $r|_{|T|}$). Or, étant donnée une application de classe C^∞ définie sur Ω et dont la restriction à Y est submersive, l'existence d'un voisinage tubulaire de classe C^∞ de Y dans Ω compatible avec cette application est assurée par le théorème fort d'existence de voisinages tubulaires de Mather (cf. [Ma] proposition 6.2; l'assertion de compatibilité a été oubliée dans l'énoncé mais peut être restituée d'après la démonstration). On est donc ramené à l'existence d'une rétraction de classe C^∞ qui soit comme la rétraction r ci-dessus.

Il est assez délicat d'établir cette existence: cela est clair localement grâce à la transversalité de X' à Y dans X mais il y a des difficultés de recollement; la chose n'est d'ailleurs pas possible si on ne suppose pas X' *fermée*. Disons seulement qu'en se limitant à une composante connexe de X, on peut recouvrir Y par une famille dénombrable d'ouverts de cartes de X sur lesquels des rétractions convenables ont été définies (rappelons que X a été supposée paracompacte). Numérotant alors ces ouverts, on part du premier d'entre eux avec la rétraction qu'il porte et on prolonge celle-ci de proche en proche: les ajustements successifs se font au moyen d'une partition de l'unité dans un espace $\mathbf{R}^p$ contenant l'image des cartes. Plusieurs zones de sauvegarde emboîtées sont nécessaires pour éviter les conflits et empêcher d'avoir dans $r^{-1}(Y')$ des éléments étrangers à X'; on n'obtient la rétraction voulue que dans une région entourant Y plus étroite que celle constituée par les ouverts de départ; il faut d'ailleurs avoir prévu un tel recouvrement ouvert plus étroit de Y dès le début. Nous ne pouvons en dire davantage ici. L'existence de la rétraction r était le dernier élément de la justification de la naturalité de l'isomorphisme de Leray sous les hypothèses faites.

Nous passons enfin à la propriété qu'a l'isomorphisme de Leray de se réduire à un produit-croix dans le cas trivial. Supposons donc que $X = V \times W$ où V et W sont des variétés réelles de classe C^∞ séparées paracompactes orientées et que $Y = V \times \{w_0\}$ avec $w_0 \in W$. Alors, comme nous l'avons vu dans la démonstration du point (i) du lemme 5.5, $V \times W$ est aussi séparée paracompacte et on peut orienter X par l'*orientation produit* de celles de V et W. D'autre part, Y est bien une sous-variété fermée de X de codimension pure $N = \dim W$ et on peut l'orienter par son identification canonique avec V. Le couple (X, Y) satisfait donc

aux hypothèses de validité de l'isomorphisme de Leray (A.7). Mais dans ce cas trivial, il se réduit à la formule

$$\tau_{V\times W,\,V\times\{w_0\},\,k}(z^{\#}) = z\times\bar{u} \quad \text{pour} \quad z\in H_{k-N}(V)\,, \tag{A.10}$$

où $z^{\#}$ correspond à z dans l'isomorphisme induit en homologie par l'identification canonique de V à $V\times\{w_0\}$ et où $\bar{u}$ est le générateur de $H_N(W, W\backslash\{w_0\})$ compatible avec l'orientation de W.

Avant de justifier cette formule, constatons que la condition (iii) du lemme 5.5 en donne bien des conditions suffisantes de validité. En effet, si V et W sont des variétés analytiques complexes séparées paracompactes, on peut considérer leurs variétés réelles de classe C^∞ canoniquement orientées sous-jacentes ainsi que celles de $V\times W$ et $V\times\{w_0\}$. Alors l'orientation canonique de $V\times W$ est bien le produit des orientations canoniques de V et W et l'orientation canonique de $V\times\{w_0\}$ est bien celle qui est obtenue par identification à V.

La formule (A.10) a pour origine le fait que, dans ce cas trivial, on peut tirer parti de l'indépendance de l'isomorphisme de Leray par rapport au voisinage tubulaire T choisi comme intermédiaire pour en prendre un de forme triviale. «De forme triviale» veut dire que $|T| = V\times D$ où D est une N-boule ouverte de W centrée en w_0 et que $\pi_T(v, w) = (v, w_0)$ pour $(v, w)\in V\times D$. Les fibres de π_T sont alors de la forme $\{v\}\times D$ et l'orientation de T, déduite de celles de Y et X, est donnée par l'orientation induite sur D par W. La classe d'orientation cohomologique de T déduite des orientations de Y et X est alors $\bar{Z}_T = \hat{1}\times\bar{U}_D$ où $\hat{1}\in H^0(V)$ est la classe du cocycle singulier de V prenant la valeur 1 sur tous les 0-simplexes de V et $\bar{U}_D$ est le générateur de $H^N(D, D\backslash\{w_0\})$ compatible avec l'orientation de D. Nous allons voir qu'on peut en déduire la formule suivante concernant l'isomorphisme de Thom pour ce voisinage tubulaire trivial:

$$(\varphi_{T,k})^{-1}(z^{\#}) = z\times\bar{u}_D \quad \text{pour} \quad z\in H_{k-N}(V)\,,$$

où $z^{\#}\in H_{k-N}(V\times\{w_0\})$ correspond à z dans l'isomorphisme induit par l'identification canonique de V à $V\times\{w_0\}$ et où $\bar{u}_D$ est le générateur de $H_N(D, D\backslash\{w_0\})$ compatible avec l'orientation de D. En effet, on a, d'une part,

$$z^{\#} = z\times\hat{w}_0\,,$$

où $\hat{w}_0$ est la classe d'homologie de l'unique 0-simplexe singulier de $\{w_0\}$ (cf. [Sp] 5.3.12) et, d'autre part, d'après la formule (A.8),

$$\varphi_{T,k}(z\times\bar{u}_D) = (\pi_T)_{k-N}((\hat{1}\times\bar{U}_D)\frown(z\times\bar{u}_D))$$

avec

$$(\hat{1}\times\bar{U}_D)\frown(z\times\bar{u}_D) = (-1)^{0(N-N)}(\hat{1}\frown z)\times(\bar{U}_D\frown\bar{u}_D) = z\times\tilde{w}_0\,,$$

où $\tilde{w}_0$ est la classe d'homologie du 0-simplexe singulier de D d'image w_0 (cf. [Sp] 5.6.21, 5.6.17 et 5.6.19; nous adoptons les conventions de signe de [Sp] pour le produit-chapeau). Et, vu la forme triviale de π_T, on a bien

$$(\pi_T)_{k-N}(z\times\tilde{w}_0) = z\times\hat{w}_0$$

par naturalité du produit-croix. Cela montre la formule annoncée concernant $(\varphi_{T,k})^{-1}$ pour un tel voisinage tubulaire T. Il n'y a plus alors qu'à utiliser la naturalité du produit-croix pour obtenir la formule (A.10).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[A-F1] ANDREOTTI, Aldo and Theodore FRANKEL. The Lefschetz theorem on hyperplane sections. *Ann. Math. (2) 69* (1959), 713-717.

[A-F2] ANDREOTTI, Aldo and Theodore FRANKEL. The second Lefschetz theorem on hyperplane sections. *Global analysis,* Papers in honor of K. Kodaira, ed. by D. C. Spencer and S. Iyanaga, University of Tokyo Press, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N. J. (1969), 1-20.

[Bt] BOTT, Raoul. On a theorem of Lefschetz. *Mich. Math. J. 6* (1959), 211-216.

[Bk] BOURBAKI, Nicolas. *Eléments de mathématiques,* fascicule II (livre III: Topologie générale, chapitre 1: Structures topologiques et chapitre 2: Structures uniformes), 3e édition, Hermann, Paris (1961).

[Ch1] CHÉNIOT, Denis. Une démonstration du théorème de Zariski sur les sections hyperplanes d'une hypersurface projective et du théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe projective plane. *Compositio math. 27* (1973), 141-158.

[Ch2] —— Un théorème du type de Lefschetz. *Annales Inst. Fourier Univ. Grenoble 25* (1975), 195-213.

[Ch3] —— *Topologie du complémentaire d'un ensemble algébrique projectif.* Thèse présentée à l'université de Paris VII, U.F.R. de mathématiques, le 22 septembre 1987.

[De] DELIGNE, Pierre. Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien [d'après W. Fulton]. *Séminaire Bourbaki, volume 1979/80,* exposé n° 543, Lect. Notes Math. n° 842, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1981), 1-10.

[Di1] DIEUDONNÉ, Jean. *Cours de géométrie algébrique,* tome 2. Presses Universitaires de France, Paris (1974).

[Di2] —— *Eléments d'analyse,* tome 3, 2e édition. Gauthier-Villars, Paris (1974).

[Di3] —— *Eléments d'analyse,* tome 9. Gauthier-Villars, Paris (1982).

[Go] GODBILLON, Claude. *Eléments de topologie algébrique.* Hermann, Paris (1971).

[G-M1] GORESKY, Mark and Robert MACPHERSON. Stratified Morse theory. *Singularities, Arcata 1981,* Proc. Symposia pure Math., vol. 40, part 1, American Mathematical Society, Providence, R. I. (1983), 517-533.

[G-M2] GORESKY, Mark and Robert MACPHERSON. *Stratified Morse theory.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo (1988).

[Gb] GREENBERG, Marvin J. *Lectures on algebraic topology.* W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass. (1970).

[Gr] GROTHENDIECK, Alexandre. *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA2).* Masson & Cie, éditeurs, Paris; North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1968).

[H-L1] HAMM, Helmut A. et Dũng Tráng LÊ. Un théorème de Zariski du type de Lefschetz. *Annales scient. Éc. norm. sup., Paris (4) 6* (1973), 317-355.

[H-L2] HAMM, Helmut A. and Dũng Tráng LÊ. Lefschetz theorems on quasi-projective varieties. *Bull. Soc. math. France 113* (1985), 123-142.

[H-L3] HAMM, Helmut A. and Dũng Tráng LÊ. Local generalizations of Lefschetz-Zariski theorems. *J. reine angew. Math. 389* (1988), 157-189.

[H-L4] HAMM, Helmut A. and Dũng Tráng LÊ. Rectified homotopical depth and Grothendieck conjectures. *The Grothendieck Festschrift,* Volume II, Birkhäuser Verlag, Boston (1990), 311-351.

[Hi] HIRONAKA, Heisuke. Triangulations of algebraic sets. *Algebraic geometry, Arcata 1974,* Proc. Symposia pure Math., vol. 29, American Mathematical Society, Providence, R. I. (1975), 165-185.

[H-P] HODGE, W. V. D. and D. PEDOE. *Methods of algebraic geometry,* vol. II. University Press, Cambridge (1952).

[La] LAMOTKE, Klaus. The topology of complex algebraic varieties after S. Lefschetz. *Topology 20* (1981), 15-51.

[L-T1] LÊ, Dũng Tráng et Bernard TEISSIER. Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières. *Ann. Math. (2) 114* (1981), 457-491.

[L-T2] LÊ, Dũng Tráng et Bernard TEISSIER. Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney II. *Singularities, Arcata 1981,* Proc. Symposia pure Math., vol. 40, part 2, American Mathematical Society, Providence, R. I. (1983), 65-103.

[Lf] LEFSCHETZ, Solomon. *L'analysis situs et la géométrie algébrique,* nouveau tirage. Gauthier-Villars, Paris (1950).

[Lr] LERAY, Jean. Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (problème de Cauchy, III). *Bull. Soc. math. France 87* (1959), 81-180.

[Lo] ŁOJASIEWICZ, Stanislaw. Triangulation of semi-analytic sets. *Annali Scu. norm. sup., Pisa 18* (1964), 449-474.

[Ma] MATHER, John. Notes on topological stability. Preprint, Harvard University, July 1970.

[Ms] MATSUSHIMA, Yozo. *Differentiable manifolds.* Marcel Dekker, Inc., New York-Basel (1972).

[Sp] SPANIER, Edwin H. *Algebraic topology.* McGraw-Hill Book Company, New York-San Francisco-St. Louis-Toronto-London-Sydney (1966).

[Sw] SWITZER, Robert M. *Algebraic topology, homotopy and homology.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1975).

[Te] TEISSIER, Bernard. Variétés polaires II: Multiplicités polaires, sections planes et conditions de Whitney. *Proceedings, La Rábida 1981,* Lect. Notes Math. n° 961, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1982), 314-491.

[Th1] THOM, René. Classes caractéristiques et *i*-carrés. *C.r. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris 230* (1950), 427-429.

[Th2] —— Ensembles et morphismes stratifiés. *Bull. Am. Math. Soc. 75* (1969), pp. 240-284.

[tD-K-P] TOM DIECK, Tammo, Klaus Heiner KAMPS und Dieter PUPPE. *Homotopietheorie.* Lect. Notes Math. n° 157, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[VK] VAN KAMPEN, Egbert R. On the fundamental group of an algebraic curve. *Am. J. Math. 55* (1933), 255-260.

[Va] VARČENKO, A. N. Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic varieties and families of polynomial mappings. *Math. USSR.-Izv. 6* (1972), 949-1008.

[Wa] WALLACE, Andrew H. *Homology theory on algebraic varieties.* Pergamon Press, London-New York-Paris-Los Angeles (1958).

[Wg] WANG, Hsien-Chung. The homology groups of the fibre bundles over a sphere. *Duke Math. J. 16* (1949), 33-38.

[Wh1] WHITNEY, Hassler. Local properties of analytic varieties. *Differentiable and Combinatorial Topology*. A Symposium in Honor of Marston Morse, ed. by Stewart S. Cairns, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1965), 205-244.

[Wh2] —— Tangents to an analytic variety. *Ann. Math. (2) 81* (1965), 496-549.

[Wh3] —— *Complex analytic varieties*. Addison-Wesley publishing company, Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London-Don Mills, Ont. (1972).

[Za] ZARISKI, Oscar. A theorem on the Poincaré group of an algebraic hypersurface. *Ann. Math. (2) 38* (1937), 131-141.

(Reçu le 15 juin 1990)

Denis Chéniot

Laboratoire de Mathématiques
Université de Nice
Boîte postale 71
F-06108 Nice Cedex 2 (France)

Monographies de l'Enseignement Mathématique

2. H. HADWIGER et H. DEBRUNNER, *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*; 35 Fr. suisses.
3. J.-E. HOFMANN, *Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-Mathematik*; 20 Fr. suisses.
4. H. LEBESGUE, *Notices d'histoire des mathématiques*; 15 Fr. suisses.
5. J. BRACONNIER, *L'analyse harmonique dans les groupes abéliens*; 15 Fr. suisses.
15. K. KURATOWSKI, *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*; 70 Fr. suisses, relié.

*19. W. M. SCHMIDT, *Approximation to algebraic numbers*; 70 pages, 1972; 25 Fr. suisses.

*20. J. L. LIONS, *Sur le contrôle optimal de systèmes distribués*; 45 pages, 1973; 20 Fr. suisses.

*21. F. HIRZEBRUCH, *Hilbert modular surfaces*; 103 pages, 1973; 35 Fr. suisses.

22. A. WEIL, *Essais historiques sur la théorie des nombres*; 56 pages, 1975; 24 Fr. suisses.
23. J. GUENOT et R. NARASIMHAN, *Introduction à la théorie des surfaces de Riemann*; 214 pages, 1976; 60 Fr. suisses.

*24. DAVID MUMFORD, *Stability of projective varieties*; 74 pages, 1977; 30 Fr. suisses.

*25. A. G. VITUSHKIN, *On representation of functions by means of superpositions and related topics*; 68 pages, 1978; 25 Fr. suisses.

26. TOPOLOGY AND ALGEBRA, *Proceedings of a Colloquium in Honour of B. Eckmann,* Edited by M.-A. Knus, G. Mislin and U. Stammbach; 280 pages, 1978; 55 Fr. suisses.
27. CONTRIBUTIONS TO ANALYSIS, *Papers communicated to a Symposium in Honour of A. Pfluger,* 106 pages, 1979; 30 Fr. suisses.
28. P. ERDÖS and R. L. GRAHAM, *Old and new problems and results in combinatorial number theory.* 128 pages, 1980; 43 Fr. suisses.
29. THÉORIE ERGODIQUE, *Séminaire des Plans-sur-Bex, Mars 1980*; 112 pages, 1981; 30 Fr. suisses.
30. LOGIC AND ALGORITHMIC, *An International Symposium in Honour of E. Specker*; 392 pages, 1982; 75 Fr. suisses.
31. NŒUDS, TRESSES ET SINGULARITÉS, *Séminaire des Plans-sur-Bex, Mars 1982*; 260 pages, 1983; 45 Fr. suisses.

*32. M. KASHIWARA, *Introduction to microlocal analysis*: 38 pages, 1986; 20 Fr. suisses.

*33. S. T. YAU, *Nonlinear analysis in geometry*; 56 pages, 1986; 25 Fr. suisses.

*34. V. I. ARNOLD, *Contact geometry and wave propagation*; 56 pages, 1989; 27 Fr. suisses.

*Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale.

Un escompte de 20% est accordé aux commandes payées d'avance et adressées à

L'Enseignement Mathématique, Case postale 240

CH-1211 GENÈVE 24 (Suisse)

(Compte de chèques postaux 12-12042 – 5)

Publications de l'Enseignement Mathématique

Œuvres scientifiques de Henri LEBESGUE

Vol. 1. *Introduction. Intégration et dérivation.* 340 pages, 1972.
Vol. 2. *Intégration et dérivation (suite).* 444 pages, 1972.
Vol. 3. *Représentation des fonctions.* 406 pages, 1972.
Vol. 4. *Structure et aire des surfaces. Fonctions harmoniques. Analysis situs. Géométrie différentielle et analytique.* 392 pages, 1973.
Vol. 5. *Géométrie algébrique et élémentaire. Pédagogie. Analyses et notices.* 432 pages, 1973.

Prix: 60 Fr. suisses le volume relié, 240 Fr. suisses pour les cinq volumes.

Œuvres mathématiques de Georges de RHAM

Un volume relié de 752 pages avec un portrait, 1981. Prix: 70 Fr. suisses

Cet ouvrage réunit tous les travaux mathématiques de G. de Rham publiés dans diverses revues ou dans des comptes rendus de congrès et séminaires. Il contient aussi le cours «Harmonic Integrals» donné à l'Institute for Advanced Study de Princeton en 1950, et qui a servi de base au livre «Variétés différentiables».

Masaki KASHIWARA, *Introduction to microlocal analysis*

Monographie de l'Enseignement Mathématique N° 32 (série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale), 38 pages, 1986; 20 Fr. suisses.

These survey lectures explain the microlocal point of view (consideration of the cotangent bundle) for the study of linear differential equations.

Shing Tung YAU, *Nonlinear analysis in geometry*

Monographie de l'Enseignement Mathématique N° 33 (série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale), 56 pages, 1986; 25 Fr. suisses.

These survey lectures deal with the following topics: spectrum of Laplacian and harmonic functions, Yamabe problem related to conformal deformation, minimal surface equations and harmonic maps, Kähler geometry.

V.I. ARNOLD, *Contact geometry and wave propagation*

Monographie de l'Enseignement Mathématique N° 34 (série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale), 56 pages, 1989; 27 Fr. suisses.

Survey lectures held at the University of Oxford. *Contents:* Basic definitions. Characteristics. Submanifolds. Legendre fibrations and singularities. Legendre varieties and the obstacle problem.

Un escompte de 20% est accordé aux commandes payées d'avance et adressées à

L'Enseignement Mathématique, Case postale 240

CH-1211 Genève 24 (Suisse)

(Compte de chèques postaux 12-12042 – 5)

V&R

Fred Böker

Statistik lernen am PC

Programmbeschreibungen, Übungen und Lernziele zum Statistikprogrammpaket GSTAT.
1989. X, 213 Seiten, kartoniert DM 32,–. ISBN 3-525-13186-0
Disketten mit Einzellizenz DM 98,– (wahlweise: 4 Disketten 5.25", 360 KB –
1 Diskette 5.25", 1.2 MB – 2 Disketten 3.50", 720 KB)*

GSTAT ist ein Statistikprogramm zur didaktischen Unterstützung des Anfängerunterrichts in Statistik. Es setzt keinerlei Kenntnisse in Statistik und EDV voraus. Buch und Programmpaket sollen den Lernenden, ob Schüler oder Student, einen intuitiven Zugang zur Statistik verschaffen, ein Gefühl dafür geben, was in der Statistik geschieht, was »Zufall« bedeutet, daß statistische Schlüsse nicht notwendig richtig sein müssen. Durch Graphiken und Simulationen werden komplizierte Zusammenhänge (wie zentraler Grenzwertsatz und Gesetz der großen Zahlen), die im Unterricht nicht bewiesen werden können oder die nur schwer zu verstehen sind, veranschaulicht. Die Verbindung zwischen Empirie (Umgang mit Daten) und der mathematischen Theorie (Wahrscheinlichkeitstheorie) wird herausgearbeitet.

Mehr Statistik lernen am PC

Programmbeschreibungen, Übungen und Lernziele zum Statistikprogrammpaket GSTAT 2.
1991. VIII, 297 Seiten mit 337 Abb. u. zahlr. Tab., kart. DM 56,–. ISBN 3-525-13217-4
Disketten mit Einzellizenz DM 128,– (wahlweise: 8 Disketten 5.25",
360 KB – 2 Disketten 5.25", 1.2 MB – 4 Disketten 3.50", 720 KB)*

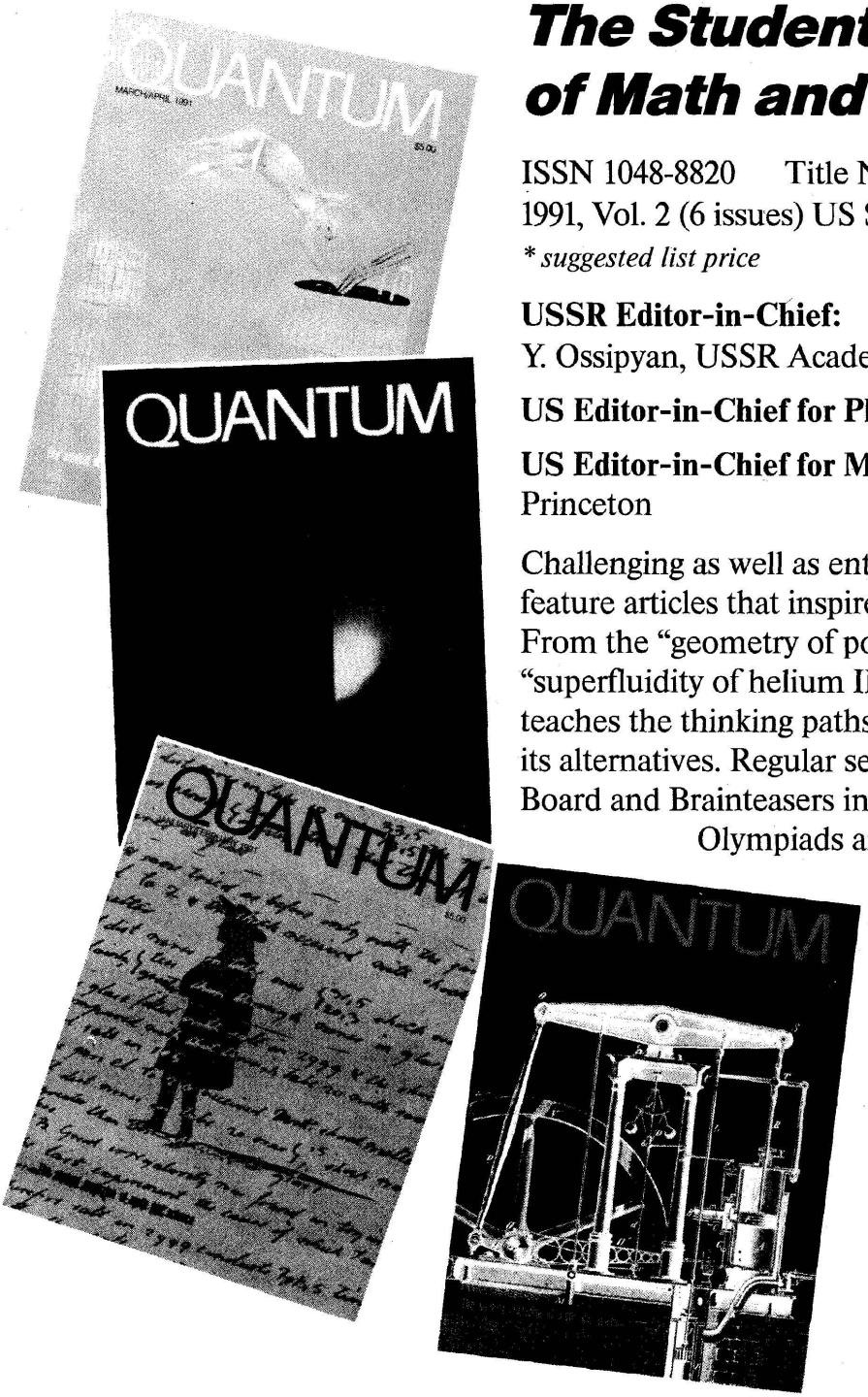
GSTAT 2, die Fortsetzung von GSTAT, enthält weitere 13 Statistikprogramme zur didaktischen Unterstützung der Anfängervorlesungen. In diesem Teil sind jetzt auch kleine Analysen von Daten möglich, jedoch immer unter erklärenden, veranschaulichenden Gesichtspunkten. Der Benutzer soll sehen, wie die Ergebnisse entstehen und wie sie zu verstehen sind. Inhalte: Einführung in die Testtheorie, Graphische Darstellungen von Daten, Modellanpassung, 2-dimensionale Normalverteilung, lineare und polynomiale Regression, Varianzanalyse, Kontingenztafeln, Klassische Zeitreihenanalyse, exponentielles Glätten.

Für die Programme sind ein IBM-kompatibler PC, mindestens 640 KB RAM, DOS-Version 3.0 und eine VGA-, EGA-, CGA- oder Herkules-Graphikkarte erforderlich.

* (zusätzliche Sammellizenzen für Institutionen/Universitätsinstitute: DM 500,–; und Schulen: DM 400,– erteilt der Autor. Anträge und Bestellungen dazu über den Verlag)

Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen / Zürich

Test the energy of a QUANTUM!
The Student Magazine of Math and Science



ISSN 1048-8820 Title No. 583
1991, Vol. 2 (6 issues) US $ 22.00* plus carriage charges
** suggested list price*

USSR Editor-in-Chief:
Y. Ossipyan, USSR Academy of Sciences

US Editor-in-Chief for Physics: S. L. Glashow, Harvard

US Editor-in-Chief for Mathematics: W. P. Thurston, Princeton

Challenging as well as entertaining, **Quantum** publishes feature articles that inspire thinking in math and physics. From the "geometry of population genetics" to the "superfluidity of helium II", **Quantum** demonstrates and teaches the thinking paths to a problem, its solutions, and its alternatives. Regular sections such as At The Black Board and Brainteasers intended for those who like Olympiads and other problem-solving competitions, make for ideal classroom material.

Order your inspection copy now!

Published in association with the National Science Teachers Association in the United States, **Quantum** is the authorized English version of KVANT, the physics and mathematics magazine published in Russian by the Academic of Pedagogical Sciences of the USSR, enlarged by contributions from the United States and imaginatively illustrated by original art in color.

Springer-Verlag
Berlin
Heidelberg
New York
London
Paris
Tokyo
Hong Kong
Barcelona
Budapest

☐ Heidelberger Platz 3, W-1000 Berlin 33, F. R. Germany ☐ 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA
☐ 8 Alexandra Rd., London SW19 7JZ, England ☐ 26, rue des Carmes, F-75005 Paris, France
☐ 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan
☐ Room 701, Mirror Tower, 61 Mody Road, Tsimshatsui, Kowloon, Hong Kong
☐ Avinguda Diagonal, 468-4°C, E-08006 Barcelona, Spain ☐ Wesselényi u. 28, H-1075 Budapest, Hungary

tm.10.459/E/1