§5. Troisième démonstration du Théorème 0 ([6], [3]).

§5. Troisième démonstration du Théorème 0 ([6], [3]).

Cette démonstration n'utilise pas les Propositions 2 et 4. En revanche nous aurons besoin de la Proposition suivante, qui est une conséquence immédiate des résultats de [7] et du Théorème 1.

PROPOSITION 7. *Soit* D *un discriminant tel que* $N(\varepsilon_D) = -1$, C *une classe ambige primitive dont l'idéal ambige réduit est* I *de norme* D_1 *et dont l'idéal symétrique est* $S = \left[R, \dfrac{Q+\sqrt{D}}{2}\right]$, *et soit* $\alpha \in K^{\times}$ *tel que*

$$S = \alpha I, \quad 1 < \alpha \leqslant \varepsilon_D . \tag{5.1}$$

Alors

$$\varepsilon_D \left(\frac{Q+\sqrt{D}}{2}\right) = \alpha^2 D_1 . \tag{5.2}$$

Démonstration. Soit P la période de C. Nous utilisons les notations du Théorème 1 et de [7], (5.3) à (5.5), et numérotons les idéaux de P de manière que $I = I_0 \equiv \{a_{-1}, b_0, a_0\}$, $S = I_\lambda \equiv \{a_{\lambda-1}, b_\lambda, a_\lambda\}$ avec $a_{\lambda-1} = a_\lambda$. D'après [7], (6.4) et (5.3) nous avons

$$\varepsilon_D = \varphi_1 \dots \varphi_{\lambda-1}\varphi_\lambda\varphi_{\lambda+1} \dots \varphi_l , \quad l = 2\lambda - 1 , \tag{5.3}$$

où

$$\varphi_k = \frac{b_k + \sqrt{D}}{2a_k} \quad (k \in \mathbf{Z}) .$$

Comme I_λ est un idéal symétrique on a $b_{\lambda+k} = b_{\lambda-k}$ et $a_{\lambda-1-k} = a_{\lambda+k}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ si bien que

$$\varphi_{\lambda+k} = \varphi_{\lambda-k} \frac{a_{\lambda-k}}{a_{\lambda-k-1}} . \tag{5.4}$$

Utilisant (5.4) pour $k = 1, \dots, \lambda - 1$ dans (5.3) on trouve, comme $a_\lambda = a_{\lambda-1}$,

$$\varepsilon_D = (\varphi_1 \dots \varphi_{\lambda-1})^2 \varphi_\lambda \frac{a_\lambda}{a_0} . \tag{5.5}$$

D'après [7], (5.5) et Proposition 8, $\alpha = \dfrac{a_\lambda}{a_0} \varphi_1 \ldots \varphi_\lambda$ vérifie (5.1), si bien que (5.5) s'écrit $\varepsilon_D \varphi_\lambda = \alpha^2 \dfrac{a_0}{a_\lambda}$, ce qui, comme $a_\lambda \varphi_\lambda = \dfrac{Q + \sqrt{D}}{2}$ et $a_0 = D_1$ prouve (5.2).

Nous considérons maintenant un discriminant $D \equiv 1 \pmod 4$ tel que $N(\varepsilon_D) = -1$. On sait que, suivant le cas, $\varepsilon_{4D} = \varepsilon_D$ ou ε_D^3. D'autre part il existe un homomorphisme θ du groupe C_{4D} sur le groupe C_D ([7], Theorem 1) qui envoie la classe de l'idéal primitif $[a, b + \sqrt{D}]$, où $ab \equiv 1 \pmod 2$, sur la classe de $\left[a, \dfrac{b + \sqrt{D}}{2}\right]$. Avec ces notations nous avons

THÉORÈME 0 ([6], Theorem, [3], Theorem 5). *Soit* $D \equiv 1 \pmod 4$ *un discriminant tel que* $N(\varepsilon_D) = -1, C$ *une classe ambige primitive de discriminant* $4D$. *Soit* l *la longueur de la période de* C *et* l' *celle de la période de* $\theta(C)$. *Alors*

$$l \equiv l' \pmod 4, \qquad si \quad \varepsilon_{4D} = \varepsilon_D^3,$$
$$l \equiv l' + 2 \pmod 4, \qquad si \quad \varepsilon_{4D} = \varepsilon_D.$$

Démonstration. Nous considérons une classe primitive ambige C de O_{4D} et son image $\theta(C)$ par l'homomorphisme θ de C_{4D} sur C_D.

La période de C contient l'idéal ambige $I_0 = [a, \sqrt{D}]$ où, d'après la Proposition 1, $a \equiv 1 \pmod 2$, $a \mid D$ et $a < \sqrt{D}$. Comme $I_0 = [a, a + \sqrt{D}]$ la classe $\theta(C)$ contient l'idéal $J_0 = \left[a, \dfrac{a + \sqrt{D}}{2}\right]$, qui est ambige et réduit car $a \mid D$ et $a < \sqrt{D}$. L'idéal J_0 est donc l'idéal ambige réduit de $\theta(C)$.

D'autre part la période de C contient l'idéal symétrique $I_\lambda = [M, N + \sqrt{D}]$ où $D = M^2 + N^2$ avec $M \equiv 1 \pmod 2$ et $(M, N) = 1$. On voit que $I_\lambda = [M, (M+N) + \sqrt{D}]$ et, comme $M + N \equiv 1 \pmod 2$, l'idéal $J = \left[M, \dfrac{M + N + \sqrt{D}}{2}\right]$ est un idéal de $\theta(C)$. Or on a

$$\frac{D - (M+N)^2}{4M} = \frac{M^2 + N^2 - (M+N)^2}{4M} = -\frac{N}{2}.$$

Donc, d'après [7], Corollary 2,

$$J \sim \left[-\frac{N}{2}, \frac{-M-N+\sqrt{D}}{2}\right] = \left[\frac{N}{2}, \frac{-M+\sqrt{D}}{2}\right].$$

Mais, comme $\theta(C)$ est une classe ambige, $J \sim \left[\frac{N}{2}, \frac{M+\sqrt{D}}{2}\right]$, donc l'idéal $\left[\frac{N}{2}, \frac{M+\sqrt{D}}{2}\right]$ est l'idéal symétrique J_μ de $\theta(C)$.

Posant $I_\lambda = \alpha I_0$ avec $1 < \alpha \leqslant \varepsilon_{4D}$ et $J_\mu = \beta J_0$ avec $1 < \beta \leqslant \varepsilon_D$ nous trouvons d'après (5.2)

$$\varepsilon_D \varepsilon_{4D} \left(\frac{M+\sqrt{D}}{2}\right)(N+\sqrt{D}) = a^2\alpha^2\beta^2 .$$

Notant que $\varepsilon_{4D} = \varepsilon_D$ ou ε_D^3 et que

$$\left(\frac{M+\sqrt{D}}{2}\right)(N+\sqrt{D}) = \left(\frac{M+N+\sqrt{D}}{2}\right)^2 \tag{5.6}$$

nous obtenons, en prenant la racine carrée de nombres réels positifs,

$$a\alpha\beta = \begin{cases} \varepsilon_D^2 \left(\dfrac{M+N+\sqrt{D}}{2}\right), & \text{si} \quad \varepsilon_{4D} = \varepsilon_D^3 , \\ \varepsilon_D \left(\dfrac{M+N+\sqrt{D}}{2}\right), & \text{si} \quad \varepsilon_{4D} = \varepsilon_D . \end{cases}$$

Comme la norme $N\left(\frac{M+N+\sqrt{D}}{2}\right) = \frac{MN}{2} > 0$ et $N(\varepsilon_D) = -1$ on voit que $N(\alpha\beta) > 0$, c'est-à-dire $\lambda \equiv \mu \pmod 2$, si, et seulement si, $\varepsilon_{4D} = \varepsilon_D^3$, ce qui démontre le Théorème 0.

Remarque. Ce qui, dans cette démonstration, joue le rôle de la Proposition 4 est l'égalité (5.6).

On peut démontrer de manière analogue (4.1) à partir de (3.7) et (5.2), sans utiliser (3.5), *après* avoir montré que S' est principal de la manière suivante:

Nous supposons $D \equiv 0 \pmod 4$, le cas $D \equiv 1 \pmod 4$ est analogue. Avec les notations de la Proposition 4 et du Théorème 2 on écrit (5.2) pour la classe C et pour la classe principale respectivement.

$$\varepsilon_D(N+\sqrt{\bar{D}}) = \alpha^2 D_1$$

et
$$\varepsilon_D(n + \sqrt{D}) = \alpha_0^2 .$$

Multipliant et tenant compte de (3.7) on obtient

$$\varepsilon_D^2 \frac{\gamma^2}{D_1} = \alpha^2 \alpha_0^2 D_1 . \tag{5.7}$$

Comme tous les nombres intervenant dans (5.7) sont positifs, on a

$$\varepsilon_D \gamma = \alpha \alpha_0 D_1$$

ce qui, au vu de (3.6), donne (4.1) en comparant les signes des normes des deux membres.

Remerciements. Les auteurs remercient le Professeur Hideo Wada (Université Sophia, Tokyo, Japon) pour ses remarques qui leur ont permis de parfaire leur texte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GAUSS, C.F. *Disquisitiones Arithmeticae.* Traduction française, Librairie Blanchard (1979). Traduction allemande dans *Untersuchungen über höhere Arithmetik,* Chelsea Publishing Co., New York (1965).
[2] HILBERT, D. *Die Theorie der Algebraischen Zahlkörper.* Werke I, Springer (1932).
[3] ISHII, N., P. KAPLAN and K.S. WILLIAMS. On Eisenstein's problem. *Acta Arithmetica 54* (1990), 323-345.
[4] KAPLAN, P. *Cours d'Arithmétique.* U.E.R. de Mathématiques, Université de Nancy 1, tome 3 (1973).
[5] —— Comparaison des 2-groupes des classes d'idéaux au sens large et au sens étroit d'un corps quadratique réel. *Proc. Japan Acad. 50* (1974), 688-693.
[6] KAPLAN, P. and K.S. WILLIAMS. Pell's equation $X^2 - mY^2 = -1, -4$ and continued fractions. *Journal of Number Theory 23* (1986), 169-182.