

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DESCARTES' THEOREM IN n DIMENSIONS
Autor: Grünbaum, Branko / Shephard, G. C.

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58726>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\sum_i \delta(V_i) = f_0(P) - s_0(P)$$

$$\sum_j \delta(E_j) = f_1(P) - s_1(P),$$

so (3) becomes

$$(f_0(P) - \sum_i \delta(V_i)) - (f_1(P) - \sum_j \delta(E_j)) + f_2(P) = f_3(P)$$

or,

$$\sum_i \delta(V_i) - \sum_j \delta(E_j) = f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - f_3(P) = \chi(P)$$

which is (1), and the theorem is proved.

An exactly analogous argument holds in n dimensions (for all $n \geq 3$). In the proof we use the $(n-1)$ -dimensional form of Gram's Theorem (see [3], [7]) for each $(n-1)$ -face F_k of P :

$$s_0(F_k) - s_1(F_k) + s_2(F_k) - \dots + (-1)^{n-2} s_{n-2}(F_k) = (-1)^n$$

with a notation analogous to that used in (2). This leads to the statement:

DESCARTES' THEOREM IN n DIMENSIONS. *Let P be an elementary polytope in E^n , let $\delta(F_i^m) = 1 - s(F_i^m)$ be the deficiency of P at the m -face F_i^m of P ($m = 0, 1, \dots, n-3$), and let $\delta_m(P) = \sum_i \delta(F_i^m)$, where summation is over all the m -faces F_i^m of P . Then*

$$\sum_{m=0}^{n-3} (-1)^m \delta_m(P) = \chi(P),$$

where $\chi(P)$ is the Euler characteristic of P .

REFERENCES

- [1] BARNETTE, D. W., P. GRITZMANN and R. HÖHNE. On valences of polyhedra. (To appear.)
- [2] FEDERICO, P. J. Descartes on polyhedra, a study of the *De Solidorum Elementis* (Volume 4 in *Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences*), Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1982.
- [3] GRÜNBAUM, B. *Convex Polytopes*. Wiley, 1967.
- [4] GRÜNBAUM, B. and G. C. SHEPHARD. A dual for Descartes' theorem on polyhedra. *Math. Gazette* 71 (1987), 214-216.
- [5] HILTON, P. and J. PEDERSEN. Descartes, Euler, Poincaré, Pólya - and polyhedra. *L'Enseignement Math.* 27 (1981), 327-343.

- [6] HILTON, P. and J. PEDERSEN. Duality and Descartes' deficiency. *Computers Math. Applic.* 17 (1989), 73-88.
- [7] SHEPHARD, G. C. An elementary proof of Gram's theorem for convex polytopes. *Canad. J. Math.* 19 (1967), 1214-1217.
- [8] ——— Angle deficiencies for convex polytopes. *J. London Math. Soc.* 43 (1968), 325-336.

(Reçu le 5 juin 1990)

Branko Grünbaum

University of Washington GN-50
Seattle, WA 98195, USA

G. C. Shephard

University of East Anglia
Norwich NR4 7TJ, England

vide-leer-empty