

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\sum_i \delta(V_i) = f_0(P) - s_0(P)$$

$$\sum_j \delta(E_j) = f_1(P) - s_1(P),$$

so (3) becomes

$$(f_0(P) - \sum_i \delta(V_i)) - (f_1(P) - \sum_j \delta(E_j)) + f_2(P) = f_3(P)$$

or,

$$\sum_i \delta(V_i) - \sum_j \delta(E_j) = f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - f_3(P) = \chi(P)$$

which is (1), and the theorem is proved.

An exactly analogous argument holds in n dimensions (for all $n \geq 3$). In the proof we use the $(n-1)$ -dimensional form of Gram's Theorem (see [3], [7]) for each $(n-1)$ -face F_k of P :

$$s_0(F_k) - s_1(F_k) + s_2(F_k) - \dots + (-1)^{n-2} s_{n-2}(F_k) = (-1)^n$$

with a notation analogous to that used in (2). This leads to the statement:

DESCARTES' THEOREM IN n DIMENSIONS. *Let P be an elementary polytope in E^n , let $\delta(F_i^m) = 1 - s(F_i^m)$ be the deficiency of P at the m -face F_i^m of P ($m = 0, 1, \dots, n-3$), and let $\delta_m(P) = \sum_i \delta(F_i^m)$, where summation is over all the m -faces F_i^m of P . Then*

$$\sum_{m=0}^{n-3} (-1)^m \delta_m(P) = \chi(P),$$

where $\chi(P)$ is the Euler characteristic of P .

REFERENCES

- [1] BARNETTE, D. W., P. GRITZMANN and R. HÖHNE. On valences of polyhedra. (To appear.)
- [2] FEDERICO, P. J. Descartes on polyhedra, a study of the *De Solidorum Elementis* (Volume 4 in *Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences*), Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1982.
- [3] GRÜNBAUM, B. *Convex Polytopes*. Wiley, 1967.
- [4] GRÜNBAUM, B. and G. C. SHEPHARD. A dual for Descartes' theorem on polyhedra. *Math. Gazette* 71 (1987), 214-216.
- [5] HILTON, P. and J. PEDERSEN. Descartes, Euler, Poincaré, Pólya - and polyhedra. *L'Enseignement Math.* 27 (1981), 327-343.

- [6] HILTON, P. and J. PEDERSEN. Duality and Descartes' deficiency. *Computers Math. Applic.* 17 (1989), 73-88.
- [7] SHEPHARD, G. C. An elementary proof of Gram's theorem for convex polytopes. *Canad. J. Math.* 19 (1967), 1214-1217.
- [8] ——— Angle deficiencies for convex polytopes. *J. London Math. Soc.* 43 (1968), 325-336.

(Reçu le 5 juin 1990)

Branko Grünbaum

University of Washington GN-50
Seattle, WA 98195, USA

G. C. Shephard

University of East Anglia
Norwich NR4 7TJ, England

vide-leer-empty