

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1989)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TRANSPORT PARALLÈLE ET TRAÎNÉE  
**Autor:** Rummler, Hansklaus  
**Kapitel:** 2. Energie cinétique et courbure  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-57372>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \Big|_{s=0} \|\dot{\gamma}_{sX}\|^2 = 2\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle + 2\|D_{\dot{\gamma}}X\|^2,$$

ce qui nous donne pour  $\|\dot{\gamma}_{sX}\|^2$  le développement

$$(3) \quad \|\dot{\gamma}_{sX}\|^2 = \|\dot{\gamma}\|^2 + 2s\langle D_{\dot{\gamma}}X, \dot{\gamma} \rangle + s^2(\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle + \|D_{\dot{\gamma}}X\|^2) + o(s^2).$$

La traînée de notre haltère est donc proportionnelle à

$$(4) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2}(\|\dot{\gamma}_{\delta X}\|^2 + \|\dot{\gamma}_{-\delta X}\|^2) \\ &= \|\dot{\gamma}\|^2 + \delta^2(\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle + \|D_{\dot{\gamma}}X\|^2) + o(\delta^2), \end{aligned}$$

et cette expression devient minimale — modulo  $o(\delta^2)$  — pour  $D_{\dot{\gamma}}X = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $X$  est parallèle le long de la courbe  $\gamma$ .

Il est essentiel de considérer un segment géodésique symétrique par rapport au point  $\gamma(t)$ , pour éliminer le terme de premier ordre en  $\delta$ . C'est aussi raisonnable du point de vue de l'interprétation physique: Nous éliminons ainsi le moment provoqué par une asymétrie de l'haltère. Le terme  $\delta^2\|D_{\dot{\gamma}}X\|^2$  peut être interprété comme traînée due à une rotation de l'haltère relative à un haltère déplacé parallèlement, et le transport parallèle est le déplacement naturel d'un haltère symétrique dans le sens suivant: On déplace le centre de l'haltère, et la traînée provoquée par les deux bouts est équilibrée de sorte que la traînée totale soit minimale.

Dans la dernière formule, on a toujours le terme  $\delta^2\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle$ . Il dépend du tenseur de courbure de la variété et du vecteur  $X$ , mais non de sa dérivée covariante  $D_{\dot{\gamma}}X$ . Cela implique que pour  $R \neq 0$  on peut parfois diminuer la traînée au futur en l'augmentant momentanément, c'est-à-dire en admettant  $D_{\dot{\gamma}}X \neq 0$  pour un certain temps: Prenons par exemple pour  $\gamma$  l'équateur de la sphère  $S^2$ , et pour  $X$  un vecteur qui au début n'est pas dans la direction nord-sud. En le tournant lentement vers une position nord-sud, nous augmentons la traînée pendant cette phase, mais après elle sera inférieure à sa valeur au départ.

## 2. ENERGIE CINÉTIQUE ET COURBURE

Pour étudier le rôle du terme  $\delta^2\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle$ , nous observons d'abord qu'à la place de la traînée on pourrait aussi bien parler de l'énergie cinétique de notre haltère si les deux extrémités représentent deux points

de masse ayant la même masse. Cette interprétation s'applique aussi dans le cas où nous déplaçons toute une boule géodésique et non seulement deux points de masse. Admettons encore un déplacement parallèle, c'est-à-dire sans composante de rotation, et supposons que la boule soit homogène, de densité  $\rho$ . Chaque point de la boule parcourt alors une courbe  $\gamma_{sX}$  avec  $0 \leq s \leq \delta$  et où  $X$  est un champ de vecteurs parallèle le long de  $\gamma$  tel que  $X(t) \in S^{n-1}$ , la sphère-unité dans  $T_{\gamma(t)}M$ . Si  $B_\delta$  est la boule géodésique de rayon  $\delta$ , son énergie cinétique est

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{B_\delta} \|\dot{\gamma}_{sX}\|^2 dV^n = \frac{\rho}{2} \int_0^\delta \int_{S^{n-1}} \|\dot{\gamma}_{sX}\|^2 (1 + h(s, X)) dV^{n-1} s^{n-1} ds.$$

Ici,  $dV^n$  est l'élément de volume de la variété  $M$  et  $dV^{n-1}$  celui de la sphère  $S^{n-1}$  dans l'espace euclidien  $T_{\gamma(t)}M$ , et la fonction  $h(s, X)$  est une fonction d'ordre  $O(s^2)$  en  $s$ , car l'élément de volume de la sphère géodésique de rayon  $s$  est de la forme

$$s^{n-1} (1 + h(s, X)) dV^{n-1}.$$

En exprimant l'intégrand  $\|\dot{\gamma}_{sX}\|^2$  par (3), et avec l'hypothèse  $D_{\dot{\gamma}}X = 0$  nous obtenons

$$E = \frac{\rho}{2} \|\dot{\gamma}\|^2 \text{vol}(B_\delta) + \frac{\rho}{2} \int_0^\delta \int_{S^{n-1}} \langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle dV^{n-1} s^{n+1} ds + o(\delta^{n+2}).$$

Or, avec  $\dot{\gamma} = \|\dot{\gamma}\| \tau$  nous avons

$$(5) \quad \int_{S^{n-1}} \langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle dV^{n-1} = - \|\dot{\gamma}\|^2 \int_{S^{n-1}} \langle R(X, \tau) \tau, X \rangle dV^{n-1}$$

$$= - \|\dot{\gamma}\|^2 \frac{\text{vol}(S^{n-1})}{n} \text{Ric}(\tau, \tau),$$

où  $\text{Ric}$  est le tenseur de Ricci. Finalement nous obtenons

$$(6) \quad E = \frac{m}{2} \|\dot{\gamma}\|^2 \left( 1 - \frac{\delta^2}{n+2} \text{Ric}(\tau, \tau) + o(\delta^2) \right),$$

où  $m$  est la masse de la boule.

Le tenseur de Ricci mesure donc la différence de l'énergie cinétique si nous remplaçons une boule homogène par un point de masse en concentrant toute la masse de la boule en son centre. Notamment, les deux énergies sont les mêmes à une erreur relative d'ordre  $o(\delta^2)$  près si la variété riemannienne  $M$  est Ricci-plate. (Voir aussi [1] sur le tenseur de Ricci.)