Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1989)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSPORT PARALLÈLE ET TRAÎNÉE
Autor: Rummler, Hansklaus
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57372

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 203-208

TRANSPORT PARALLÈLE ET TRAÎNÉE

par Hansklaus RUMMLER

0. INTRODUCTION

La connexion de Levi-Civita et le transport parallèle correspondant sur une variété riemannienne M sont d'habitude définis de façon axiomatique: D est l'unique connexion linéaire sur TM sans torsion et compatible avec la métrique riemannienne, et un champ de vecteurs X le long d'une courbe γ dans M est dit parallèle si $D_{\dot\gamma}X = 0$.

Bien que cette définition se justifie par les résultats de la géométrie riemannienne, on aimerait en avoir une interprétation naturelle. Pour une sous-variété riemannienne d'un espace euclidien une telle interprétation est bien connue: X est parallèle le long de γ dans le sens de Levi-Civita s'il est « aussi parallèle que possible » pour un champ de vecteurs tangents à M: La dérivée $\dot{X}$ par rapport au paramètre de la courbe est normale à M, ce qui signifie que le champ de vecteurs X ne varie le long de γ que pour rester tangent à M.

Cette interprétation du parallélisme le long d'une courbe ne s'applique plus au cas d'une variété riemannienne « abstraite », à moins de la plonger localement isométriquement dans un espace euclidien. C'est possible, mais c'est dans un certain sens une « trahison » des principes de la géométrie riemannienne intrinsèque. C'est pourquoi nous essayons d'interpréter le parallélisme le long d'une courbe d'une autre façon, sans utiliser un tel plongement.

1. UNE INTERPRÉTATION HYDRODYNAMIQUE DU PARALLÉLISME DE LEVI-CIVITA

Imaginons la variété riemannienne M remplie d'un fluide idéal incompressible, de densité constante. La *traînée*, c'est-à-dire la résistance hydrodynamique, d'un corps mobile dans M est alors proportionnelle au carré de sa vitesse. Considérons maintenant une courbe différentiable $\gamma : [a, b] \to M$, où nous interprétons le paramètre t comme temps, et un champ de vecteurs X

différentiable le long de cette courbe. Remplaçons, pour un $\delta > 0$ assez petit, le vecteur tangent $X(t)$ par le segment géodésique

$$\hat{X}_\delta(t) := \{\exp_{\gamma(t)} sX(t);\ -\delta \leqslant s \leqslant +\delta\}$$

(autrement dit, « l'objet infinitésimal » $X(t)$ est remplacé par « l'objet réel » $\hat{X}_\delta(t)$ dans M), et fixons aux extrémités de $\hat{X}_\delta(t)$ deux petites boules du même rayon. Nous allons calculer la traînée de cet « haltère » déplacé le long de γ, et nous allons montrer que cette traînée est minimale — modulo un terme d'ordre $o(\delta^2)$ — si et seulement si X est parallèle le long de γ.

Pour étudier la vitesse de chaque point du segment géodésique $\hat{X}_\delta(t)$, nous considérons l'application

$$\Phi :]-\varepsilon, +\varepsilon[\times [a, b] \to M\,, \qquad \Phi(s, t) := \exp_{\gamma(t)} sX(t)\,,$$

qui est bien définie et différentiable pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Le point correspondant au paramètre s parcourt alors une courbe γ_{sX} voisine de γ et définie par $\gamma_{sX}(t) = \Phi(s, t)$, et nous devons calculer le carré de sa vitesse, $\| \dot{\gamma}_{sX} \|^2$, et de quelle façon cette grandeur dépend du paramètre s.

Nous allons travailler avec des champs de vecteurs le long de l'application Φ, c'est-à-dire des sections dans le fibré vectoriel induit Φ^*TM au-dessus de $G :=]-\varepsilon, +\varepsilon[\times [a, b]$ dont la fibre en $x \in G$ est l'espace tangent $T_{\Phi(x)}M$. Un champ de vecteurs Y sur M induit de façon naturelle un champ Φ^*Y le long de Φ, défini par $\Phi^*Y(x) := Y(\Phi(x))$ pour $x \in G$. Mais un champ de vecteurs U sur G induit également un tel champ le long de Φ, à savoir Φ_*U, défini par $\Phi_*U(x) := d\Phi(x; U(x))$ pour $x \in G$.

La connexion de Levi-Civita sur M induit une connexion linéaire D^Φ sur Φ^*TM dont nous rappelons brièvement la construction (voir aussi [2, page 15]): Un champ de vecteurs X le long de Φ s'écrit localement sous la forme $X = \sum_i f_i \cdot \Phi^*X_i$ avec des fonctions f_i sur G et des champs de vecteurs X_i sur M. Pour $x \in G$ et $\xi \in T_xG$ on pose

$$D^\Phi_\xi X := \sum_i \left(\xi(f_i) \cdot X_i(\Phi(x)) + f_i(x) \cdot D_{d\Phi(x;\,\xi)} X_i\right).$$

On voit facilement que cette expression ne dépend pas de la représentation choisie pour X, et que D^Φ est une connexion linéaire sur Φ^*TM.

Le fait que la connexion de Levi-Civita est sans torsion se traduit pour D^Φ par la propriété suivante:

Pour deux champs de vecteurs U, V sur G, on a toujours

$$D^\Phi_U \Phi_* V - D^\Phi_V \Phi_* U = \Phi_*([U, V])\,. \tag{1}$$

De même, si R est le tenseur de courbure sur M et R^{Φ} celui de la connexion D^{Φ}, alors

$$R^{\Phi}(x;\xi,\eta)\zeta = R(\Phi(x); d\Phi(x;\xi), d\Phi(x;\eta))\zeta$$

pour $x \in G$, $\xi, \eta \in T_xG$ et $\zeta \in T_{\Phi(x)}M$. Nous avons donc pour deux champs de vecteurs U, V sur G et un champ de vecteurs W le long de Φ en chaque point $x \in G$

$$(2)\quad (D^{\Phi}_U D^{\Phi}_V W - D^{\Phi}_V D^{\Phi}_U W - D^{\Phi}_{[U,V]} W)(x) = (R^{\Phi}(U,V)W)(x)$$
$$= R(\Phi(x); \Phi_* U(x), \Phi_* V(x))W(x).$$

Considérons sur G les champs de vecteurs définis par les coordonnées s et t, c'est-à-dire

$$U := \frac{\partial}{\partial s} \quad \text{et} \quad V := \frac{\partial}{\partial t},$$

ainsi que les champs correspondants le long de Φ:

$$\tilde{X} := \Phi_* U \quad \text{et} \quad Y := \Phi_* V.$$

Par construction, $\tilde{X}$ est un prolongement du champ de vecteurs donné X, c'est pourquoi nous allons écrire simplement X dans la suite, et Y est le champ tangent aux courbes γ_{sX}.

Nous avons donc $\| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 = \langle Y, Y \rangle$, et par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial s} \| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 = 2\langle D^{\Phi}_U Y, Y \rangle \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} \| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 = 2\langle D^{\Phi}_U D^{\Phi}_U Y, Y \rangle + 2 \| D^{\Phi}_U Y \|^2.$$

Or, d'après (1),

$$D^{\Phi}_U Y = D^{\Phi}_U \Phi_* V = D^{\Phi}_V \Phi_* U = D^{\Phi}_V X, \quad \text{car} \quad [U, V] = 0,$$

et, d'après (2),

$$D^{\Phi}_U D^{\Phi}_U Y(x) = D^{\Phi}_U D^{\Phi}_V X(x) = D^{\Phi}_V D^{\Phi}_U X(x) + R(\Phi(x); X(x), Y(x))X(x)$$
$$= R(\Phi(x); X(x), Y(x))X(x),$$

car $D^{\Phi}_U X = 0$ parce que les courbes $\{t = const.\}$ sont des géodésiques.

Le long de la courbe γ, c'est-à-dire pour $s = 0$, nous avons donc, en écrivant de nouveau simplement $D_{\dot{\gamma}} X$ au lieu de $D^{\Phi}_V X$:

$$\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} \| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 = 2\langle D_{\dot{\gamma}} X, \dot{\gamma} \rangle$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}_{|s=0} \| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 = 2\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma}\rangle + 2 \| D_{\dot{\gamma}}X \|^2 ,$$

ce qui nous donne pour $\| \dot{\gamma}_{sX} \|^2$ le développement

$$\| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 = \| \dot{\gamma} \|^2 + 2s\langle D_{\dot{\gamma}}X, \dot{\gamma}\rangle + s^2(\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma}\rangle + \| D_{\dot{\gamma}}X \|^2) + o(s^2) . \tag{3}$$

La traînée de notre haltère est donc proportionnelle à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\| \dot{\gamma}_{\delta X} \|^2 + \| \dot{\gamma}_{-\delta X} \|^2) \\ &= \| \dot{\gamma} \|^2 + \delta^2(\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma}\rangle + \| D_{\dot{\gamma}}X \|^2) + o(\delta^2) , \end{aligned} \tag{4}$$

et cette expression devient minimale — modulo $o(\delta^2)$ — pour $D_{\dot{\gamma}}X = 0$, c'est-à-dire lorsque X est parallèle le long de la courbe γ.

Il est essentiel de considérer un segment géodésique symétrique par rapport au point $\gamma(t)$, pour éliminer le terme de premier ordre en δ. C'est aussi raisonnable du point de vue de l'interprétation physique: Nous éliminons ainsi le moment provoqué par une asymétrie de l'haltère. Le terme $\delta^2 \| D_{\dot{\gamma}}X \|^2$ peut être interprété comme traînée due à une rotation de l'haltère relative à un haltère déplacé parallèlement, et le transport parallèle est le déplacement naturel d'un haltère symétrique dans le sens suivant: On déplace le centre de l'haltère, et la traînée provoquée par les deux bouts est équilibrée de sorte que la traînée totale soit minimale.

Dans la dernière formule, on a toujours le terme $\delta^2\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma}\rangle$. Il dépend du tenseur de courbure de la variété et du vecteur X, mais non de sa dérivée covariante $D_{\dot{\gamma}}X$. Cela implique que pour $R \neq 0$ on peut parfois diminuer la traînée au futur en l'augmentant momentanément, c'est-à-dire en admettant $D_{\dot{\gamma}}X \neq 0$ pour un certain temps: Prenons par exemple pour γ l'équateur de la sphère S^2, et pour X un vecteur qui au début n'est pas dans la direction nord-sud. En le tournant lentement vers une position nord-sud, nous augmentons la traînée pendant cette phase, mais après elle sera inférieure à sa valeur au départ.

2. Energie cinétique et courbure

Pour étudier le rôle du terme $\delta^2\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma}\rangle$, nous observons d'abord qu'à la place de la traînée on pourrait aussi bien parler de l'énergie cinétique de notre haltère si les deux extrémités représentent deux points

de masse ayant la même masse. Cette interprétation s'applique aussi dans le cas où nous déplaçons toute une boule géodésique et non seulement deux points de masse. Admettons encore un déplacement parallèle, c'est-à-dire sans composante de rotation, et supposons que la boule soit homogène, de densité ρ. Chaque point de la boule parcourt alors une courbe γ_{sX} avec $0 \leqslant s \leqslant \delta$ et où X est un champ de vecteurs parallèle le long de γ tel que $X(t) \in S^{n-1}$, la sphère-unité dans $T_{\gamma(t)}M$. Si B_δ est la boule géodésique de rayon δ, son énergie cinétique est

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{B_\delta} \| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 dV^n = \frac{\rho}{2} \int_0^\delta \int_{S^{n-1}} \| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 (1 + h(s, X)) dV^{n-1} s^{n-1} ds .$$

Ici, dV^n est l'élément de volume de la variété M et dV^{n-1} celui de la sphère S^{n-1} dans l'espace euclidien $T_{\gamma(t)}M$, et la fonction $h(s, X)$ est une fonction d'ordre $O(s^2)$ en s, car l'élément de volume de la sphère géodésique de rayon s est de la forme

$$s^{n-1}(1 + h(s, X)) dV^{n-1} .$$

En exprimant l'intégrand $\| \dot{\gamma}_{sX} \|^2$ par (3), et avec l'hypothèse $D_{\dot{\gamma}} X = 0$ nous obtenons

$$E = \frac{\rho}{2} \| \dot{\gamma} \|^2 vol(B_\delta) + \frac{\rho}{2} \int_0^\delta \int_{S^{n-1}} \langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle dV^{n-1} s^{n+1} ds + o(\delta^{n+2}) .$$

Or, avec $\dot{\gamma} = \| \dot{\gamma} \| \tau$ nous avons

$$\text{(5)} \qquad \int_{S^{n-1}} \langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle dV^{n-1} = - \| \dot{\gamma} \|^2 \int_{S^{n-1}} \langle R(X, \tau)\tau, X \rangle dV^{n-1}$$
$$= - \| \dot{\gamma} \|^2 \frac{vol(S^{n-1})}{n} Ric(\tau, \tau) ,$$

où Ric est le tenseur de Ricci. Finalement nous obtenons

$$\text{(6)} \qquad E = \frac{m}{2} \| \dot{\gamma} \|^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{n+2} Ric(\tau, \tau) + o(\delta^2) \right),$$

où m est la masse de la boule.

Le tenseur de Ricci mesure donc la différence de l'énergie cinétique si nous remplaçons une boule homogène par un point de masse en concentrant toute la masse de la boule en son centre. Notamment, les deux énergies sont les mêmes à une erreur relative d'ordre $o(\delta^2)$ près si la variété riemannienne M est Ricci-plate. (Voir aussi [1] sur le tenseur de Ricci.)

RÉFÉRENCES

[1] BESSE, Arthur L. *Einstein Manifolds.* Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 10, Berlin, Heidelberg, 1987.

[2] GROMOLL, D., W. KLINGENBERG und W. MEYER. *Riemannsche Geometrie im Grossen.* Springer, Lecture Notes in Mathematics, vol. 55, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.

(Reçu le 14 mars 1989)

Hansklaus Rummler

Institut de Mathématiques
Université de Fribourg
CH-1700 Fribourg