

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1989)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** AN ELEMENTARY PROOF OF A THEOREM ON QUADRATIC FORMS OVER THE RATIONAL NUMBERS  
**Autor:** Leep, David B.  
**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-57371>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

**Download PDF:** 22.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

3.2. PROPOSITION. Let  $a, b, c \in \mathbf{Q}^\times$ ,  $a, b, c > 0$ . Then

$$\langle\langle a, b, c \rangle\rangle \cong \langle\langle 1, 1, 1 \rangle\rangle = 8\langle 1 \rangle.$$

*Proof.* Calculating in the Witt ring  $WF$  we have

$$\begin{aligned} \langle\langle a, b, 1 \rangle\rangle \perp (-1) \langle\langle a, b, c \rangle\rangle &= \langle\langle a, b \rangle\rangle (\langle 1, 1 \rangle \perp (-1) \langle 1, c \rangle) \\ &= \langle\langle a, b \rangle\rangle \langle 1, -c \rangle = \langle\langle a, b, -c \rangle\rangle = 0 \text{ by Proposition 3.1.} \end{aligned}$$

Therefore  $\langle\langle a, b, 1 \rangle\rangle \cong \langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ . Repeating the same calculation with  $a, b$  in place of  $c$  yields the result.

3.3. COROLLARY. Let  $a, b, c \in \mathbf{Q}^\times$  and let  $\mathbf{H} = \langle 1, -1 \rangle$ . Then

$$\langle\langle a, b, c \rangle\rangle \cong \begin{cases} \langle\langle 1, 1, 1 \rangle\rangle & \text{if } a, b, c > 0 \\ 4\mathbf{H} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3.4. THEOREM.  $I^3\mathbf{Q}$  is torsion-free.

*Proof.* Corollary 3.3 shows that the only nonzero 3-fold Pfister form in  $I^3\mathbf{Q}$  is  $\langle\langle 1, 1, 1 \rangle\rangle$ . Therefore  $I^3\mathbf{Q} \cong \mathbf{Z}$  and  $I^3\mathbf{Q}$  is torsion-free.

## REFERENCES

- [An] ANDREWS, G. *Number Theory*. W.S. Saunders, Philadelphia, 1971.
- [BS] BOREVICH, Z. I. and I. R. SHAFAREVICH. *Number Theory*. Academic Press, New York, 1966.
- [Ca] CASSELS, J. W. S. *Rational Quadratic Forms*. Academic Press, New York, 1978.
- [Ha] HASSE, H. *Vorlesungen Über Zahlentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1964.
- [HW] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 4th ed., 1960.
- [La] LAM, T. Y. *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*. Benjamin, 1973.
- [Mo] MORDELL, L. J. *Diophantine Equations*. Academic Press, New York, 1969.
- [Om] O'MEARA, O. T. *Introduction to Quadratic Forms*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [Se] SERRE, J.-P. *A Course in Arithmetic*. Springer-Verlag, 1973.
- [Sk] SKOLEM, Th. On the Diophantine Equation  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 = 0$ . *Norske Videnskabers Selsk. Forh.* 21 (1948), 76-79.

*(Reçu le 10 avril 1989)*

David B. Leep

Department of Mathematics  
University of Kentucky  
Lexington, KY 40506  
(USA)