Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1989)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: AN ELEMENTARY PROOF OF A THEOREM ON QUADRATIC FORMS OVER THE RATIONAL NUMBERS

Autor: Leep, David B.

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57371

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3.2. PROPOSITION. *Let* $a, b, c \in \mathbf{Q}^\times$, $a, b, c > 0$. *Then*

$$\langle\langle a, b, c\rangle\rangle \cong \langle\langle 1, 1, 1\rangle\rangle = 8\langle 1\rangle .$$

Proof. Calculating in the Witt ring WF we have

$$\begin{aligned}\langle\langle a, b, 1\rangle\rangle \perp (-1)\langle\langle a, b, c\rangle\rangle &= \langle\langle a, b\rangle\rangle\big(\langle 1, 1\rangle \perp (-1)\langle 1, c\rangle\big)\\ &= \langle\langle a, b\rangle\rangle\langle 1, -c\rangle = \langle\langle a, b, -c\rangle\rangle = 0 \text{ by Proposition 3.1.}\end{aligned}$$

Therefore $\langle\langle a, b, 1\rangle\rangle \cong \langle\langle a, b, c\rangle\rangle$. Repeating the same calculation with a, b in place of c yields the result.

3.3. COROLLARY. *Let* $a, b, c \in \mathbf{Q}^\times$ *and let* $\mathbf{H} = \langle 1, -1\rangle$. *Then*

$$\langle\langle a, b, c\rangle\rangle \cong \begin{cases}\langle\langle 1, 1, 1\rangle\rangle & \text{if } a, b, c > 0\\ 4\mathbf{H} & \text{otherwise}.\end{cases}$$

3.4. THEOREM. $I^3\mathbf{Q}$ *is torsion-free.*

Proof. Corollary 3.3 shows that the only nonzero 3-fold Pfister form in $I^3\mathbf{Q}$ is $\langle\langle 1, 1, 1\rangle\rangle$. Therefore $I^3\mathbf{Q} \cong \mathbf{Z}$ and $I^3\mathbf{Q}$ is torsion-free.

REFERENCES

[An] ANDREWS, G. *Number Theory*. W.S. Saunders, Philadelphia, 1971.

[BS] BOREVICH, Z. I. and I. R. SHAFAREVICH. *Number Theory*. Academic Press, New York, 1966.

[Ca] CASSELS, J. W. S. *Rational Quadratic Forms*. Academic Press, New York, 1978.

[Ha] HASSE, H. *Vorlesungen Über Zahlentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[HW] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 4th ed., 1960.

[La] LAM, T. Y. *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*. Benjamin, 1973.

[Mo] MORDELL, L. J. *Diophantine Equations*. Academic Press, New York, 1969.

[Om] O'MEARA, O. T. *Introduction to Quadratic Forms*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[Se] SERRE, J.-P. *A Course in Arithmetic*. Springer-Verlag, 1973.

[Sk] SKOLEM, Th. On the Diophantine Equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 = 0$. *Norske Videnskabers Selsk. Forh. 21* (1948), 76-79.

(Reçu le 10 avril 1989)

David B. Leep

Department of Mathematics
University of Kentucky
Lexington, KY 40506
(USA)