

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1989)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD  
**Autor:** Dherte, Hélène  
**Kapitel:** §2. Valeurs de l'indice  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-57369>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$\text{Cliff}_m$  l'algèbre de Clifford d'une telle forme sur  $\mathbf{K}^m$ . Le corollaire 1 montre l'égalité  $\text{Cliff}_{m+2} \cong \text{Cliff}_m \otimes \text{Mat}_2(\mathbf{K})$ , connue sous le nom de *périodicité des algèbres de Clifford* sur  $\mathbf{K}$ . Le corollaire suivant en est une conséquence immédiate.

**COROLLAIRE 2.** *Pour  $\mathbf{K}$  algébriquement clos, on a  $\text{Cliff}_m \cong \text{Mat}_{2^{m/2}}(\mathbf{K})$  lorsque  $m$  est pair, et  $\text{Cliff}_m \cong \text{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K}) \oplus \text{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K})$  lorsque  $m$  est impair.*

## § 2. VALEURS DE L'INDICE

La preuve du lemme suivant résulte immédiatement de la définition de l'indice donnée dans l'introduction.

**LEMME 3.** *Soit  $1 \in N \subseteq M$  une paire d'anneaux et soit  $l$  un entier tels que chaque étage  $M_k$  de la tour associée par construction fondamentale soit un  $M_k$ -module libre de rang 1. Alors  $[M:N] = l$ .*

**COROLLAIRE.** *Avec les notations du § 1  $[\text{Cliff}(V):\text{Cliff}(W)] = 2$ .*

Il peut être intéressant d'avoir un critère qui assure que les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées. Pour cela, on aura besoin de la notion de trace markovienne. Si  $1 \in N \subseteq M$  est une paire d'algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps commutatif  $\mathbf{K}$ , et si  $\beta \in \mathbf{K}^\times$ , une trace  $\text{tr}$  sur  $M$  est *markovienne de module*  $\beta$  si  $\text{tr}$  et sa restriction  $\text{tr}|_N$  sont fidèles, et s'il existe une trace  $\text{Tr}: L = \text{End}_N(M) \rightarrow \mathbf{K}$  telle que  $\text{Tr}(\lambda(x)) = \text{tr}(x)$  et  $\beta \text{Tr}(\lambda(x)E) = \text{tr}(x)$  pour tout  $x \in M$ , où  $E$  est l'espérance conditionnelle définie avant le lemme 2. On peut alors montrer que  $\text{Tr}$  est elle-même markovienne de module  $\beta$  pour la paire  $M \subset L$  ([GHJ] 2.7.4), ce qui permet de définir une trace sur  $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$  et une suite d'espérances conditionnelles fidèles  $E_k: M_k \rightarrow M_{k-1}$ .

On vérifie aisément que la trace  $\text{tr}$  définie sur  $\text{Cliff}(V)$  au § 1 est markovienne de module 2.

**LEMME 4.** *Soient  $1 \in N \subseteq M$  une paire d'algèbres de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ , et  $E: M \rightarrow N$  une espérance conditionnelle fidèle. Si  $M$  est libre de rang  $l$  comme  $N$ -module à droite, alors  $L = \text{End}_N(M)$  est libre de rang  $l$  comme  $M$ -module à droite.*

*Preuve.* Par la proposition 2.6.3 de [GHJ], l'application

$$\phi: M \otimes_N M \rightarrow L: x \otimes y \mapsto \lambda(x)E\lambda(y)$$

est un isomorphisme de  $M$ -modules à droite. Mais  $M \otimes_N M \cong N^l \otimes_N M \cong M^l$  où le dernier isomorphisme est donné par l'application  $M$ -linéaire à droite:

$$(y_1, \dots, y_l) \otimes x \mapsto (y_1 x, \dots, y_l x), \quad y_i \in N, x \in M.$$

□

Des lemmes 3 et 4, on déduit immédiatement que  $[M : M] = 1$  et  $[M : \mathbf{K}] = \dim(M)$  pour une  $\mathbf{K}$ -algèbre unitale  $M$  de dimension finie.

**PROPOSITION 1.** *Soient  $1 \in N \subseteq M$  une paire d'algèbres de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ . S'il existe une trace markovienne sur  $M$ , et si  $M$  est libre de rang  $l$  comme  $N$ -module à droite, alors les hypothèses de lemme 3 sont satisfaites. En particulier,  $[M : N] = l$ .*

*Preuve.* Grâce à l'existence d'une trace markovienne sur  $M$ , chaque  $M_k$  est munie d'une trace markovienne  $\text{tr}_k$  et d'une espérance conditionnelle  $E_k: M_k \rightarrow M_{k-1}$ , fidèle puisque  $M$  est de dimension finie.

En procédant par induction à partir du lemme 4, on voit que  $M_k$  est libre de rang  $l$  sur  $M_{k-1}$  et donc  $M_{k+1} = \text{End}_{M_{k-1}}(M_k)$  est libre de rang  $l$  sur  $M_k$ . □

Un cas où la proposition 1 s'applique est celui des algèbres de groupes. Soient  $G$  un groupe fini (d'ordre noté  $|G|$ ),  $H$  un sous-groupe et  $\mathbf{K}$  un corps commutatif de caractéristique nulle. On rappelle que l'algèbre de groupe  $\mathbf{K}[G]$  est l'ensemble des combinaisons linéaires  $\sum_{g \in G} a_g \cdot g$  ( $a_g \in \mathbf{K}$ ) où le produit est donné par  $g_1 \cdot g_2 = g_1 g_2$  ( $g_1, g_2 \in G$ ). Comme  $\mathbf{K}$  est de caractéristique nulle,  $\mathbf{K}[G]$  est semi-simple (voir [Se]).

L'inclusion  $1 \in \mathbf{K}[H] \subseteq \mathbf{K}[G]$  fournit un exemple de paire d'algèbres semi-simples de dimension finie. La fonctionnelle linéaire sur  $\mathbf{K}[G]$  définie par

$$\text{tr} \left( \sum_{g \in G} a_g \cdot g \right) = a_1$$

est une trace fidèle dont la restriction à  $\mathbf{K}[H]$  est fidèle. L'espérance conditionnelle  $E: \mathbf{K}[G] \rightarrow \mathbf{K}[H]$  associée s'écrit

$$E \left( \sum_{g \in G} a_g \cdot g \right) = \sum_{g \in H} a_g \cdot g.$$

PROPOSITION 2. Si  $\mathbf{K}$  est de caractéristique nulle,

$$[\mathbf{K}[G] : \mathbf{K}[H]] = [G : H].$$

Cette proposition est en fait bien connue ([J01], [J02]); c'est elle qui justifie l'appellation d'indice. La preuve ci-dessous semble neuve:

*Preuve de la proposition 2.* Remarquons que  $\mathbf{K}[G]$  est libre de rang  $[G : H]$  comme  $\mathbf{K}[H]$ -module à droite: en effet, le choix d'un système de représentants pour les classes latérales gauches de  $H$  dans  $G$  fournit une base de  $\mathbf{K}[G]$  comme  $\mathbf{K}[H]$ -module à droite. Montrons d'autre part que  $\text{tr}$  est markovienne de module  $[G : H]$  sur  $\mathbf{K}[G]$ .

Pour cela, considérons  $\text{End}_{\mathbf{K}[H]}(\mathbf{K}[G])$  comme une sous-algèbre de l'algèbre  $\text{End}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[G]) = \text{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$ . Cette dernière algèbre est munie de la trace

$$S \mapsto \frac{1}{|G|} \text{Tr}(S)$$

où  $\text{Tr}$  est la trace usuelle sur  $\text{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$ .

Il est alors banal de vérifier que

$$\frac{1}{|G|} \text{Tr} \lambda(1) = \text{tr}(1) = 1$$

$$\frac{1}{|G|} \text{Tr} \lambda(g) = \text{tr}(g) = 0 \quad \text{pour } g \in G \setminus \{1\}$$

$$\frac{1}{|G|} \text{Tr} E = \frac{|H|}{|G|} = \frac{\text{tr}(1)}{[G : H]}$$

$$\frac{1}{|G|} \text{Tr} \lambda(g)E = \text{tr}(g) = 0 \quad \text{pour } g \in G \setminus \{1\}.$$

Par linéarité, on en déduit la propriété annoncée. La proposition 1 s'applique donc et permet de conclure.  $\square$

Le résultat ci-dessus est encore valable si  $\mathbf{K}$  est de caractéristique  $p$ , pour autant que  $p$  ne divise pas  $|G|$ .