Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1989)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA

PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

Autor: Dherte, Hélène

Kapitel: §1. Algèbres de Clifford

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57369

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les résultats contenus dans cet article proviennent d'un travail de fin d'études réalisé en 1987-1988 à l'Université Libre de Bruxelles sous la direction de A. Valette.

§ 1. Algèbres de Clifford

Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de deux, V un K-espace vectoriel de dimension finie m et

$$< ... > : V \times V \rightarrow \mathbf{K}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On note Cliff(V) l'algèbre de Clifford de cette forme. Soit W un hyperplan de V tel que la restriction $< .,. > |_W$ est non dégénérée. L'objet de ce paragraphe est l'étude de la paire d'algèbre $Cliff(W) \subseteq Cliff(V)$ (ces algèbres sont semi-simples [Sch]).

LEMME 1. L'algèbre Cliff(V) est libre de rang 2 comme Cliff(W)module à droite.

Preuve. Soit $e_m \in V$ un vecteur tel que $\langle e_m, e_m \rangle \neq 0$, $e_m \notin W$ et $e_m^{\perp} = W$. Montrons que $\{1, e_m\}$ est une base de Cliff(V) comme Cliff(W)-module à droite. En effet, si $\{e_1, ..., e_{m-1}\}$ est une base orthogonale de W (une telle base existe [Sch]) alors $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m\}$ est une base orthogonale de V et en utilisant les relations entre les générateurs de Cliff(V), on peut écrire de manière unique tout élément de M = Cliff(V) sous la forme

$$\sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J$$

(sommes sur I et $J \subset \{1, ..., m-1\}$) où

$$e_I = e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$$
 si $I = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., m-1\}$.

Posons $N = \operatorname{Cliff}(W) \subset M = \operatorname{Cliff}(V)$ et $L = \operatorname{End}_N(M)$. Il résulte du lemme que $L = \operatorname{Mat}_2(\mathbf{K}) \otimes N$ (nous notons $\operatorname{Mat}_l(\mathbf{K})$ l'algèbre des matrices $l \times l$ à coefficients dans \mathbf{K}). Nous allons identifier L à une algèbre de $\operatorname{Clifford}$. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de V, et $(e_I)_{I \subset \{1, \ldots, m\}}$ la base associée de $\operatorname{Cliff}(V)$, comme dans la preuve du lemme 1. Soit $\operatorname{tr}: M \to \mathbf{K}$ la forme linéaire définie par $\operatorname{tr}(e_{\varnothing}) = 1$ et $\operatorname{tr}(e_I) = 0$ si $I \neq \emptyset$.

On vérifie que tr est une trace $(\operatorname{tr}(xy) = \operatorname{tr}(yx) \text{ pour tous } x, y \in M)$ qui est fidèle (au sens que la forme bilinéaire $(x, y) \to \operatorname{tr}(xy)$ est non

dégénérée); tr ne dépend pas du choix de la base $(e_i)_{1 \le i \le m}$ et sa restriction à N est encore fidèle. On peut donc définir la projection orthogonale

$$E\left\{ \begin{array}{ccc} M & \to & N \\ \sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J & \mapsto & \sum \lambda_I e_I \end{array} \right.$$

(sommes sur $I, J \subset \{1, ..., m-1\}$) relative à la forme $(x, x') \mapsto \operatorname{tr}(xx')$. On montre que E possède les propriétés suivantes:

$$tr(E(x)) = tr(x), \forall x \in M$$

$$E(y) = y, \forall y \in N$$

$$E(xy) = E(x)y, \forall x \in M, y \in N$$

$$E(yx) = yE(x), \forall x \in M, y \in N$$

(voir [GHJ] 2.6.2). En d'autres termes, E est une espérance conditionnelle de M sur N. On vérifie aussi qu'elle est fidèle: si $x \in M$ est tel que E(xx') = 0 pour tout $x' \in M$, alors x = 0. La troisième propriété ci-dessus montre que $E \in L$.

Lemme 2. Avec les notations précédentes, on pose $a=\langle e_m,e_m\rangle$ et F=2E-1. Alors

- (i) $N^{\perp} = \lambda(e_m)(N)$,
- (ii) $\lambda(e_m) F \lambda(e_m) = -aF \quad dans \quad L$.

Preuve. (i) Si $x, y \in N$, on a $\operatorname{tr}(e_m xy) = 0$ et puisque $e_m x \in \lambda(e_m)N$, il vient $\lambda(e_m)N \subseteq N^{\perp}$.

Pour montrer l'inclusion inverse, remarquons que comme dim $N=2^{m-1}$, dim $M=2^m$ et $M=N\oplus N^{\perp}$, on a dim $N^{\perp}=2^{m-1}$. De plus $\lambda(e_m):N\to N^{\perp}$ est bijective puisque $\lambda(e_m)^2=a\cdot 1_M$. On en tire $N^{\perp}=\lambda(e_m)N$.

(ii) Soit $y \in N$. Alors $F\lambda(e_m)y = -\lambda(e_m)y$ puisque F = 2E - 1 et $N^{\perp} = \lambda(e_m)N = -\lambda(e_m)Fy$.

Soit $x \in N^{\perp}$, alors $F\lambda(e_m)x = \lambda(e_m)x = -\lambda(e_m)Fx$.

Donc $F\lambda(e_m)=-\lambda(e_m)F$ et on a le résultat annoncé en multipliant à gauche par $\lambda(e_m)$. \square

Notons $V \oplus -a$ l'espace vectoriel $V \oplus \mathbf{K}$ muni de la forme bilinéaire symétrique $((x, \lambda), (x', \lambda')) \mapsto \langle x, x' \rangle - a\lambda \lambda'$.

Théorème. Soit $L=\operatorname{End}_N(M)$ le résultat de la construction fondamentale appliquée à $N=\operatorname{Cliff}(W)\subseteq M=\operatorname{Cliff}(V)$. Alors L est isomorphe à $\operatorname{Cliff}(V\oplus -a)$.

Preuve. Notons e_{m+1} un vecteur de base de $V \oplus -a$ correspondant au second facteur.

Puisque $\dim L = \dim_{\mathbf{K}}(N \otimes \operatorname{Mat}_2(\mathbf{K})) = 2^{m+1} = \dim(\operatorname{Cliff}(V \oplus -a))$ il suffit de montrer que $\operatorname{Cliff}(V \oplus -a)$ se surjecte sur L. Montrons que l'application

$$\alpha: \begin{cases} w \mapsto \lambda(w) \\ e_m \mapsto \lambda(e_m) \\ e_{m+1} \mapsto \lambda(e_m)F \end{cases} \quad (w \in W)$$

s'étend en un homomorphisme de Cliff $(V \oplus -a)$ sur L. Puisque $F^2 = 1$, en utilisant le lemme 2, on a $\alpha(e_{m+1})^2 = -a$. De plus, $\alpha(e_{m+1})$ anticommute avec les générateurs de Cliff(V) à nouveau par le lemme 2:

$$\alpha(e_{m+1})\alpha(e_m) = -\alpha(e_m)\alpha(e_{m+1}),$$

et si $w \in W$

$$\alpha(e_{m+1})\lambda(w) = \lambda(e_m)F\lambda(w)$$

$$= \lambda(e_m)\lambda(w)F \quad \text{par } N\text{-lin\'earit\'e de } F$$

$$= -\lambda(w)\lambda(e_m)F \quad \text{puisque} \quad \langle w, e_m \rangle = 0$$

$$= -\alpha(w)\alpha(e_{m+1}).$$

Les relations qui définissent $\operatorname{Cliff}(V \oplus -a)$ montrent alors que α s'étend bien en un homomorphisme d'algèbres.

Il reste à montrer que cet homomorphisme est surjectif. Comme l'espérance conditionnelle E est fidèle et que M est libre comme N-module à droite, on peut appliquer la proposition 2.6.3 de [GHJ], qui assure que L est engendrée comme algèbre par $\lambda(M)$ et E; mais $\lambda(M)$ est clairement dans l'image de notre homomorphisme, et E y est aussi car

$$E = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{a} \alpha(e_m) \alpha(e_{m+1}) \right). \quad \Box$$

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant, démontré différemment dans [Ka] Chap. III, 3.14 et 3.16:

COROLLAIRE 1. $Cliff(W \oplus a \oplus -a) \cong Cliff(W) \otimes Mat_2(K)$.

Si K est algébriquement clos, deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur deux espaces de même dimension sont isomorphes. Notons

Cliff_m l'algèbre de Clifford d'une telle forme sur K^m . Le corollaire 1 montre l'égalité Cliff_{m+2} \cong Cliff_m \otimes Mat₂(K), connue sous le nom de *périodicité des algèbres de Clifford* sur K. Le corollaire suivant en est une conséquence immédiate.

COROLLAIRE 2. Pour \mathbf{K} algébriquement clos, on a $\mathrm{Cliff}_m\cong\mathrm{Mat}_{2^{m/2}}(\mathbf{K})$ lorsque m est pair, et $\mathrm{Cliff}_m\cong\mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K})\oplus\mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K})$ lorsque m est impair.

§ 2. Valeurs de l'indice

La preuve du lemme suivant résulte immédiatement de la définition de l'indice donnée dans l'introduction.

Lemme 3. Soit $1 \in N \subseteq M$ une paire d'anneaux et soit l un entier tels que chaque étage M_k de la tour associée par construction fondamentale soit un M_k -module libre de rang l. Alors l l l l .

COROLLAIRE. Avec les notations du § 1 [Cliff(V): Cliff(W)] = 2.

Il peut être intéressant d'avoir un critère qui assure que les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées. Pour cela, on aura besoin de la notion de trace markovienne. Si $1 \in N \subseteq M$ est une paire d'algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps commutatif \mathbf{K} , et si $\beta \in \mathbf{K}^x$, une trace tr sur M est markovienne de module β si tr et sa restriction tr_N sont fidèles, et s'il existe une trace $\operatorname{Tr}: L = \operatorname{End}_N(M) \to \mathbf{K}$ telle que $\operatorname{Tr}(\lambda(x)) = \operatorname{tr}(x)$ et $\beta \operatorname{Tr}(\lambda(x)E) = \operatorname{tr}(x)$ pour tout $x \in M$, où E est l'espérance conditionnelle définie avant le lemme 2. On peut alors montrer que Tr est elle-même markovienne de module β pour la paire $M \subset L$ ([GHJ] 2.7.4), ce qui permet de définir une trace sur $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ et une suite d'espérances conditionnelles fidèles $E_k: M_k \to M_{k-1}$.

On vérifie aisément que la trace tr définie sur Cliff(V) au § 1 est markovienne de module 2.

Lemme 4. Soient $1 \in N \subseteq M$ une paire d'algèbres de dimension finie sur K, et $E: M \to N$ une espérance conditionnelle fidèle. Si M est libre de rang l comme N-module à droite, alors $L = \operatorname{End}_N(M)$ est libre de rang l comme M-module à droite.