# §0. Introduction

*L'Enseignement Mathématique*, t. 35 (1989), p. 117-124

# LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

par Hélène Dherte

## § 0. Introduction

Soit $1 \in N \subseteq M$ une paire d'anneaux à unité. On note $\mathrm{End}_N(M)$ l'anneau des endomorphismes de $M$ vu comme $N$-module à droite. Pour tout $x \in M$, la multiplication à gauche $\lambda(x)$ par $x$ dans $M$ appartient à $\mathrm{End}_N(M)$; on identifie ci-dessous $M$ à son image par $\lambda : M \to \mathrm{End}_N(M)$.

Cette *construction fondamentale* fournit ainsi une paire $1 \in M \subseteq \mathrm{End}_N(M)$ à partir de $1 \in N \subseteq M$. En itérant, on obtient une *tour*:

$$1 \in M_0 = N \subseteq M_1 = M \subseteq \ldots \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \ldots$$

dont l'intérêt a été mis en évidence par V. Jones, d'abord lorsque $M$ et $N$ sont des algèbres de von Neumann qui sont des facteurs de type $\mathrm{II}_1$, ensuite dans d'autres cas et en particulier lorsque $M$ et $N$ sont des algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps parfait (voir [J01], [J02], [GHJ]).

Un invariant numérique fort intéressant introduit par Jones et lié à la construction fondamentale est l'*indice* de $N$ dans $M$, qui est par définition

$$[M : N] = \limsup_{k \to \infty} \mathrm{rk}\,(M_k/M_0)^{1/k}$$

où $\mathrm{rk}\,(M_k/M_0)$ est le *rang* de $M_k$ sur $M_0$, c'est-à-dire le plus petit nombre de générateurs de $M_k$ comme $M_0$-module à droite.

Ce travail est consacré à l'étude d'exemples où $M$ est libre comme $N$-module à droite. Plus précisément, au § 1, nous montrons comment la construction fondamentale permet de retrouver certains résultats bien connus sur les algèbres de Clifford. Au § 2, nous calculons des valeurs d'indices, et nous donnons en particulier une preuve courte de l'égalité

$$[\mathbf{K}[G] : \mathbf{K}[H]] = [G : H]$$

où $G$ est un groupe fini, $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle, $\mathbf{K}[G]$ l'algèbre de $G$ sur $\mathbf{K}$ et $H$ un sous-groupe de $G$ (voir [J02]).

Les résultats contenus dans cet article proviennent d'un travail de fin d'études réalisé en 1987-1988 à l'Université Libre de Bruxelles sous la direction de A. Valette.

## § 1. Algèbres de Clifford

Soient $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de deux, $V$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $m$ et

$$< .,. > : V \times V \to \mathbf{K}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On note $\mathrm{Cliff}(V)$ l'algèbre de Clifford de cette forme. Soit $W$ un hyperplan de $V$ tel que la restriction $< .,. > |_W$ est non dégénérée. L'objet de ce paragraphe est l'étude de la paire d'algèbre $\mathrm{Cliff}(W) \subseteq \mathrm{Cliff}(V)$ (ces algèbres sont semi-simples [Sch]).

Lemme 1. *L'algèbre* $\mathrm{Cliff}(V)$ *est libre de rang 2 comme* $\mathrm{Cliff}(W)$-*module à droite.*

*Preuve.* Soit $e_m \in V$ un vecteur tel que $<e_m, e_m> \neq 0, e_m \notin W$ et $e_m^{\perp} = W$. Montrons que $\{1, e_m\}$ est une base de $\mathrm{Cliff}(V)$ comme $\mathrm{Cliff}(W)$-module à droite. En effet, si $\{e_1, ..., e_{m-1}\}$ est une base orthogonale de $W$ (une telle base existe [Sch]) alors $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m\}$ est une base orthogonale de $V$ et en utilisant les relations entre les générateurs de $\mathrm{Cliff}\, V$, on peut écrire de manière unique tout élément de $M = \mathrm{Cliff}\, V$ sous la forme

$$\sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J$$

(sommes sur $I$ et $J \subset \{1, ..., m-1\}$) où

$$e_I = e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \quad \text{si} \quad I = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., m-1\}. \qquad \square$$

Posons $N = \mathrm{Cliff}(W) \subset M = \mathrm{Cliff}(V)$ et $L = \mathrm{End}_N(M)$. Il résulte du lemme que $L = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K}) \otimes N$ (nous notons $\mathrm{Mat}_l(\mathbf{K})$ l'algèbre des matrices $l \times l$ à coefficients dans $\mathbf{K}$). Nous allons identifier $L$ à une algèbre de Clifford. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de $V$, et $(e_I)_{I \subset \{1, ..., m\}}$ la base associée de $\mathrm{Cliff}(V)$, comme dans la preuve du lemme 1. Soit $\mathrm{tr}: M \to \mathbf{K}$ la forme linéaire définie par $\mathrm{tr}(e_\emptyset) = 1$ et $\mathrm{tr}(e_I) = 0$ si $I \neq \emptyset$.

On vérifie que tr est une trace ($\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ pour tous $x, y \in M$) qui est fidèle (au sens que la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{tr}(xy)$ est non