

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1989)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD  
**Autor:** Dherte, Hélène  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-57369>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

par Hélène DHERTE

## § 0. INTRODUCTION

Soit  $1 \in N \subseteq M$  une paire d'anneaux à unité. On note  $\text{End}_N(M)$  l'anneau des endomorphismes de  $M$  vu comme  $N$ -module à droite. Pour tout  $x \in M$ , la multiplication à gauche  $\lambda(x)$  par  $x$  dans  $M$  appartient à  $\text{End}_N(M)$ ; on identifie ci-dessous  $M$  à son image par  $\lambda: M \rightarrow \text{End}_N(M)$ .

Cette construction fondamentale fournit ainsi une paire  $1 \in M \subseteq \text{End}_N(M)$  à partir de  $1 \in N \subseteq M$ . En itérant, on obtient une tour :

$$1 \in M_0 = N \subseteq M_1 = M \subseteq \dots \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \dots$$

dont l'intérêt a été mis en évidence par V. Jones, d'abord lorsque  $M$  et  $N$  sont des algèbres de von Neumann qui sont des facteurs de type  $\text{II}_1$ , ensuite dans d'autres cas et en particulier lorsque  $M$  et  $N$  sont des algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps parfait (voir [J01], [J02], [GHJ]).

Un invariant numérique fort intéressant introduit par Jones et lié à la construction fondamentale est l'indice de  $N$  dans  $M$ , qui est par définition

$$[M : N] = \limsup_{k \rightarrow \infty} \text{rk}(M_k/M_0)^{1/k}$$

où  $\text{rk}(M_k/M_0)$  est le rang de  $M_k$  sur  $M_0$ , c'est-à-dire le plus petit nombre de générateurs de  $M_k$  comme  $M_0$ -module à droite.

Ce travail est consacré à l'étude d'exemples où  $M$  est libre comme  $N$ -module à droite. Plus précisément, au § 1, nous montrons comment la construction fondamentale permet de retrouver certains résultats bien connus sur les algèbres de Clifford. Au § 2, nous calculons des valeurs d'indices, et nous donnons en particulier une preuve courte de l'égalité

$$[\mathbf{K}[G] : \mathbf{K}[H]] = [G : H]$$

où  $G$  est un groupe fini,  $\mathbf{K}$  un corps de caractéristique nulle,  $\mathbf{K}[G]$  l'algèbre de  $G$  sur  $\mathbf{K}$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$  (voir [J02]).

Les résultats contenus dans cet article proviennent d'un travail de fin d'études réalisé en 1987-1988 à l'Université Libre de Bruxelles sous la direction de A. Valette.

### § 1. ALGÈBRES DE CLIFFORD

Soient  $\mathbf{K}$  un corps commutatif de caractéristique différente de deux,  $V$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $m$  et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{K}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On note  $\text{Cliff}(V)$  l'algèbre de Clifford de cette forme. Soit  $W$  un hyperplan de  $V$  tel que la restriction  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W$  est non dégénérée. L'objet de ce paragraphe est l'étude de la paire d'algèbre  $\text{Cliff}(W) \subseteq \text{Cliff}(V)$  (ces algèbres sont semi-simples [Sch]).

LEMME 1. *L'algèbre  $\text{Cliff}(V)$  est libre de rang 2 comme  $\text{Cliff}(W)$ -module à droite.*

*Preuve.* Soit  $e_m \in V$  un vecteur tel que  $\langle e_m, e_m \rangle \neq 0$ ,  $e_m \notin W$  et  $e_m^\perp = W$ . Montrons que  $\{1, e_m\}$  est une base de  $\text{Cliff}(V)$  comme  $\text{Cliff}(W)$ -module à droite. En effet, si  $\{e_1, \dots, e_{m-1}\}$  est une base orthogonale de  $W$  (une telle base existe [Sch]) alors  $\{e_1, \dots, e_{m-1}, e_m\}$  est une base orthogonale de  $V$  et en utilisant les relations entre les générateurs de  $\text{Cliff } V$ , on peut écrire de manière unique tout élément de  $M = \text{Cliff } V$  sous la forme

$$\sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J$$

(sommés sur  $I$  et  $J \subset \{1, \dots, m-1\}$ ) où

$$e_I = e_{i_1} \dots e_{i_k} \quad \text{si} \quad I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m-1\}. \quad \square$$

Posons  $N = \text{Cliff}(W) \subset M = \text{Cliff}(V)$  et  $L = \text{End}_N(M)$ . Il résulte du lemme que  $L = \text{Mat}_2(\mathbf{K}) \otimes N$  (nous notons  $\text{Mat}_l(\mathbf{K})$  l'algèbre des matrices  $l \times l$  à coefficients dans  $\mathbf{K}$ ). Nous allons identifier  $L$  à une algèbre de Clifford. Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$  une base de  $V$ , et  $(e_I)_{I \subset \{1, \dots, m\}}$  la base associée de  $\text{Cliff}(V)$ , comme dans la preuve du lemme 1. Soit  $\text{tr} : M \rightarrow \mathbf{K}$  la forme linéaire définie par  $\text{tr}(e_\emptyset) = 1$  et  $\text{tr}(e_I) = 0$  si  $I \neq \emptyset$ .

On vérifie que  $\text{tr}$  est une trace ( $\text{tr}(xy) = \text{tr}(yx)$  pour tous  $x, y \in M$ ) qui est fidèle (au sens que la forme bilinéaire  $(x, y) \rightarrow \text{tr}(xy)$  est non

dégénérée);  $\text{tr}$  ne dépend pas du choix de la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$  et sa restriction à  $N$  est encore fidèle. On peut donc définir la projection orthogonale

$$E \left\{ \begin{array}{ccc} M & \rightarrow & N \\ \sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J & \mapsto & \sum \lambda_I e_I \end{array} \right.$$

(sommés sur  $I, J \subset \{1, \dots, m-1\}$ ) relative à la forme  $(x, x') \mapsto \text{tr}(xx')$ . On montre que  $E$  possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \text{tr}(E(x)) &= \text{tr}(x), \quad \forall x \in M \\ E(y) &= y, \quad \forall y \in N \\ E(xy) &= E(x)y, \quad \forall x \in M, y \in N \\ E(yx) &= yE(x), \quad \forall x \in M, y \in N \end{aligned}$$

(voir [GHJ] 2.6.2). En d'autres termes,  $E$  est une *espérance conditionnelle* de  $M$  sur  $N$ . On vérifie aussi qu'elle est *fidèle*: si  $x \in M$  est tel que  $E(xx') = 0$  pour tout  $x' \in M$ , alors  $x = 0$ . La troisième propriété ci-dessus montre que  $E \in L$ .

LEMME 2. Avec les notations précédentes, on pose  $a = \langle e_m, e_m \rangle$  et  $F = 2E - 1$ . Alors

- (i)  $N^\perp = \lambda(e_m)(N)$ ,
- (ii)  $\lambda(e_m)F\lambda(e_m) = -aF$  dans  $L$ .

*Preuve.* (i) Si  $x, y \in N$ , on a  $\text{tr}(e_m xy) = 0$  et puisque  $e_m x \in \lambda(e_m)N$ , il vient  $\lambda(e_m)N \subseteq N^\perp$ .

Pour montrer l'inclusion inverse, remarquons que comme  $\dim N = 2^{m-1}$ ,  $\dim M = 2^m$  et  $M = N \oplus N^\perp$ , on a  $\dim N^\perp = 2^{m-1}$ . De plus  $\lambda(e_m): N \rightarrow N^\perp$  est bijective puisque  $\lambda(e_m)^2 = a \cdot 1_M$ . On en tire  $N^\perp = \lambda(e_m)N$ .

(ii) Soit  $y \in N$ . Alors  $F\lambda(e_m)y = -\lambda(e_m)y$  puisque  $F = 2E - 1$  et  $N^\perp = \lambda(e_m)N = -\lambda(e_m)Fy$ .

Soit  $x \in N^\perp$ , alors  $F\lambda(e_m)x = \lambda(e_m)x = -\lambda(e_m)Fx$ .

Donc  $F\lambda(e_m) = -\lambda(e_m)F$  et on a le résultat annoncé en multipliant à gauche par  $\lambda(e_m)$ .  $\square$

Notons  $V \oplus -a$  l'espace vectoriel  $V \oplus \mathbf{K}$  muni de la forme bilinéaire symétrique  $((x, \lambda), (x', \lambda')) \mapsto \langle x, x' \rangle - a\lambda\lambda'$ .

**THÉORÈME.** Soit  $L = \text{End}_N(M)$  le résultat de la construction fondamentale appliquée à  $N = \text{Cliff}(W) \subseteq M = \text{Cliff}(V)$ . Alors  $L$  est isomorphe à  $\text{Cliff}(V \oplus -a)$ .

*Preuve.* Notons  $e_{m+1}$  un vecteur de base de  $V \oplus -a$  correspondant au second facteur.

Puisque  $\dim L = \dim_{\mathbf{K}}(N \otimes \text{Mat}_2(\mathbf{K})) = 2^{m+1} = \dim(\text{Cliff}(V \oplus -a))$  il suffit de montrer que  $\text{Cliff}(V \oplus -a)$  se surjecte sur  $L$ . Montrons que l'application

$$\alpha: \begin{cases} w \mapsto \lambda(w) \\ e_m \mapsto \lambda(e_m) \\ e_{m+1} \mapsto \lambda(e_m)F \end{cases} \quad (w \in W)$$

s'étend en un homomorphisme de  $\text{Cliff}(V \oplus -a)$  sur  $L$ . Puisque  $F^2 = 1$ , en utilisant le lemme 2, on a  $\alpha(e_{m+1})^2 = -a$ . De plus,  $\alpha(e_{m+1})$  anti-commute avec les générateurs de  $\text{Cliff}(V)$  à nouveau par le lemme 2:

$$\alpha(e_{m+1})\alpha(e_m) = -\alpha(e_m)\alpha(e_{m+1}),$$

et si  $w \in W$

$$\begin{aligned} \alpha(e_{m+1})\lambda(w) &= \lambda(e_m)F\lambda(w) \\ &= \lambda(e_m)\lambda(w)F \quad \text{par } N\text{-linéarité de } F \\ &= -\lambda(w)\lambda(e_m)F \quad \text{puisque } \langle w, e_m \rangle = 0 \\ &= -\alpha(w)\alpha(e_{m+1}). \end{aligned}$$

Les relations qui définissent  $\text{Cliff}(V \oplus -a)$  montrent alors que  $\alpha$  s'étend bien en un homomorphisme d'algèbres.

Il reste à montrer que cet homomorphisme est surjectif. Comme l'espérance conditionnelle  $E$  est fidèle et que  $M$  est libre comme  $N$ -module à droite, on peut appliquer la proposition 2.6.3 de [GHJ], qui assure que  $L$  est engendrée comme algèbre par  $\lambda(M)$  et  $E$ ; mais  $\lambda(M)$  est clairement dans l'image de notre homomorphisme, et  $E$  y est aussi car

$$E = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{a} \alpha(e_m)\alpha(e_{m+1}) \right). \quad \square$$

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant, démontré différemment dans [Ka] Chap. III, 3.14 et 3.16:

**COROLLAIRE 1.**  $\text{Cliff}(W \oplus a \oplus -a) \cong \text{Cliff}(W) \otimes \text{Mat}_2(\mathbf{K})$ .

Si  $\mathbf{K}$  est algébriquement clos, deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur deux espaces de même dimension sont isomorphes. Notons

$\text{Cliff}_m$ , l'algèbre de Clifford d'une telle forme sur  $\mathbf{K}^m$ . Le corollaire 1 montre l'égalité  $\text{Cliff}_{m+2} \cong \text{Cliff}_m \otimes \text{Mat}_2(\mathbf{K})$ , connue sous le nom de *périodicité des algèbres de Clifford* sur  $\mathbf{K}$ . Le corollaire suivant en est une conséquence immédiate.

COROLLAIRE 2. *Pour  $\mathbf{K}$  algébriquement clos, on a  $\text{Cliff}_m \cong \text{Mat}_{2^{m/2}}(\mathbf{K})$  lorsque  $m$  est pair, et  $\text{Cliff}_m \cong \text{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K}) \oplus \text{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K})$  lorsque  $m$  est impair.*

## § 2. VALEURS DE L'INDICE

La preuve du lemme suivant résulte immédiatement de la définition de l'indice donnée dans l'introduction.

LEMME 3. *Soit  $1 \in N \subseteq M$  une paire d'anneaux et soit  $l$  un entier tels que chaque étage  $M_k$  de la tour associée par construction fondamentale soit un  $M_k$ -module libre de rang 1. Alors  $[M : N] = l$ .*

COROLLAIRE. *Avec les notations du § 1  $[\text{Cliff}(V) : \text{Cliff}(W)] = 2$ .*

Il peut être intéressant d'avoir un critère qui assure que les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées. Pour cela, on aura besoin de la notion de trace markovienne. Si  $1 \in N \subseteq M$  est une paire d'algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps commutatif  $\mathbf{K}$ , et si  $\beta \in \mathbf{K}^x$ , une trace  $\text{tr}$  sur  $M$  est *markovienne de module  $\beta$*  si  $\text{tr}$  et sa restriction  $\text{tr}|_N$  sont fidèles, et s'il existe une trace  $\text{Tr} : L = \text{End}_N(M) \rightarrow \mathbf{K}$  telle que  $\text{Tr}(\lambda(x)) = \text{tr}(x)$  et  $\beta \text{Tr}(\lambda(x)E) = \text{tr}(x)$  pour tout  $x \in M$ , où  $E$  est l'espérance conditionnelle définie avant le lemme 2. On peut alors montrer que  $\text{Tr}$  est elle-même markovienne de module  $\beta$  pour la paire  $M \subset L$  ([GHJ] 2.7.4), ce qui permet de définir une trace sur  $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$  et une suite d'espérances conditionnelles fidèles  $E_k : M_k \rightarrow M_{k-1}$ .

On vérifie aisément que la trace  $\text{tr}$  définie sur  $\text{Cliff}(V)$  au § 1 est markovienne de module 2.

LEMME 4. *Soient  $1 \in N \subseteq M$  une paire d'algèbres de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ , et  $E : M \rightarrow N$  une espérance conditionnelle fidèle. Si  $M$  est libre de rang  $l$  comme  $N$ -module à droite, alors  $L = \text{End}_N(M)$  est libre de rang  $l$  comme  $M$ -module à droite.*

*Preuve.* Par la proposition 2.6.3 de [GHJ], l'application

$$\phi: M \otimes_N M \rightarrow L: x \otimes y \mapsto \lambda(x)E\lambda(y)$$

est un isomorphisme de  $M$ -modules à droite. Mais  $M \otimes_N M \cong N^l \otimes_N M \cong M^l$  où le dernier isomorphisme est donné par l'application  $M$ -linéaire à droite:

$$(y_1, \dots, y_l) \otimes x \mapsto (y_1x, \dots, y_lx), \quad y_i \in N, x \in M. \quad \square$$

Des lemmes 3 et 4, on déduit immédiatement que  $[M:M] = 1$  et  $[M:\mathbf{K}] = \dim(M)$  pour une  $\mathbf{K}$ -algèbre unitale  $M$  de dimension finie.

**PROPOSITION 1.** *Soient  $1 \in N \subseteq M$  une paire d'algèbres de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ . S'il existe une trace markovienne sur  $M$ , et si  $M$  est libre de rang  $l$  comme  $N$ -module à droite, alors les hypothèses de lemme 3 sont satisfaites. En particulier,  $[M:N] = l$ .*

*Preuve.* Grâce à l'existence d'une trace markovienne sur  $M$ , chaque  $M_k$  est munie d'une trace markovienne  $\text{tr}_k$  et d'une espérance conditionnelle  $E_k: M_k \rightarrow M_{k-1}$ , fidèle puisque  $M$  est de dimension finie.

En procédant par induction à partir du lemme 4, on voit que  $M_k$  est libre de rang  $l$  sur  $M_{k-1}$  et donc  $M_{k+1} = \text{End}_{M_{k-1}}(M_k)$  est libre de rang  $l$  sur  $M_k$ .  $\square$

Un cas où la proposition 1 s'applique est celui des algèbres de groupes. Soient  $G$  un groupe fini (d'ordre noté  $|G|$ ),  $H$  un sous-groupe et  $\mathbf{K}$  un corps commutatif de caractéristique nulle. On rappelle que l'algèbre de groupe  $\mathbf{K}[G]$  est l'ensemble des combinaisons linéaires  $\sum_{g \in G} a_g \cdot g$  ( $a_g \in \mathbf{K}$ ) où le produit est donné par  $g_1 \cdot g_2 = g_1g_2$  ( $g_1, g_2 \in G$ ). Comme  $\mathbf{K}$  est de caractéristique nulle,  $\mathbf{K}[G]$  est semi-simple (voir [Se]).

L'inclusion  $1 \in \mathbf{K}[H] \subseteq \mathbf{K}[G]$  fournit un exemple de paire d'algèbres semi-simples de dimension finie. La fonctionnelle linéaire sur  $\mathbf{K}[G]$  définie par

$$\text{tr} \left( \sum_{g \in G} a_g \cdot g \right) = a_1$$

est une trace fidèle dont la restriction à  $\mathbf{K}[H]$  est fidèle. L'espérance conditionnelle  $E: \mathbf{K}[G] \rightarrow \mathbf{K}[H]$  associée s'écrit

$$E \left( \sum_{g \in G} a_g \cdot g \right) = \sum_{g \in H} a_g \cdot g.$$

PROPOSITION 2. Si  $\mathbf{K}$  est de caractéristique nulle,

$$[\mathbf{K}[G]:\mathbf{K}[H]] = [G:H].$$

Cette proposition est en fait bien connue ([J01], [J02]); c'est elle qui justifie l'appellation d'indice. La preuve ci-dessous semble neuve:

*Preuve de la proposition 2.* Remarquons que  $\mathbf{K}[G]$  est libre de rang  $[G:H]$  comme  $\mathbf{K}[H]$ -module à droite: en effet, le choix d'un système de représentants pour les classes latérales gauches de  $H$  dans  $G$  fournit une base de  $\mathbf{K}[G]$  comme  $\mathbf{K}[H]$ -module à droite. Montrons d'autre part que  $\text{tr}$  est markovienne de module  $[G:H]$  sur  $\mathbf{K}[G]$ .

Pour cela, considérons  $\text{End}_{\mathbf{K}[H]}(\mathbf{K}[G])$  comme une sous-algèbre de l'algèbre  $\text{End}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[G]) = \text{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$ . Cette dernière algèbre est munie de la trace

$$S \mapsto \frac{1}{|G|} \text{Tr}(S)$$

où  $\text{Tr}$  est la trace usuelle sur  $\text{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$ .

Il est alors banal de vérifier que

$$\frac{1}{|G|} \text{Tr} \lambda(1) = \text{tr}(1) = 1$$

$$\frac{1}{|G|} \text{Tr} \lambda(g) = \text{tr}(g) = 0 \quad \text{pour } g \in G \setminus \{1\}$$

$$\frac{1}{|G|} \text{Tr} E = \frac{|H|}{|G|} = \frac{\text{tr}(1)}{[G:H]}$$

$$\frac{1}{|G|} \text{Tr} \lambda(g)E = \text{tr}(g) = 0 \quad \text{pour } g \in G \setminus \{1\}.$$

Par linéarité, on en déduit la propriété annoncée. La proposition 1 s'applique donc et permet de conclure.  $\square$

Le résultat ci-dessus est encore valable si  $\mathbf{K}$  est de caractéristique  $p$ , pour autant que  $p$  ne divise pas  $|G|$ .

## RÉFÉRENCES

- [GHJ] GOODMAN, Frederick M., P. de la HARPE and V. JONES. Coxeter graphs and towers of algebras. A paraître dans *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, Springer-Verlag.
- [J01] JONES, V. Index for subfactors. *Inventiones Math.* 72 (1983), 1-25.
- [J02] ——— Index for subrings of rings. *Contemp. Math.* 45 (Am. Math. Soc. 1985), 181-190.
- [Ka] KAROUBI, M. *K-Theory*. Springer-Verlag, 1978.
- [Sch] SCHARLAU, W. *Quadratic and Hermitian Forms*. Springer-Verlag, 1985.
- [Se] SERRE, J. P. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1978.

(Reçu le 16 mars 1989)

Hélène Dherte

Institut de Mathématique  
Université Catholique de Louvain  
2, chemin du Cyclotron  
B-1348 Louvain-la-Neuve  
(Belgique)