Il s'agit donc de trouver $a(n)$, le nombre d'arbres différents à n nœuds, avec toutes les ramifications de degré 1, 2 ou 3. On convient que $a(0) = 1$, et on note $A(x) = \Sigma a(n) x^n$ la fonction génératrice. On remarque alors qu'à tout arbre on peut en faire correspondre trois autres, qui sont les descendants de l'atome de carbone jouxtant la racine OH (voir Figure 2). Mais l'opération inverse, consistant à reconstruire un arbre à partir de trois autres, exige que l'on identifie les triplets d'arbres qui ne diffèrent que d'une permutation. On en déduit que la solution du problème est donnée par l'indicateur des cycles du groupe Σ_3, avec comme inventaire des figures la fonction $A(x)$ elle-même. Le théorème 6.2 devient ainsi, si l'on tient compte du nœud supplémentaire:

$$\frac{1}{x}(A(x)-1) = Z(\Sigma_3 ; A(x), A(x^2), A(x^3)) = \frac{1}{6}(A(x)^3 + 3A(x)A(x^2) + 2A(x^3)) .$$

Cette équation fonctionnelle pour la fonction $A(x)$ permet d'en trouver inductivement le développement en série, et les premiers termes sont

$$A(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 17x^6 + \ldots$$

RÉFÉRENCES

[1] BURNSIDE, W. *Theory of groups of finite order.* Second edition. Cambridge at the University Press (1911).
[2] DE BRUIJN, N. G. Color patterns that are invariant under a given permutation of the colors. *Journal of Combinatorial Theory 2* (1967), 418-421.
[3] FROBENIUS, G. Über die Kongruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmoduls. *Journal de Crelle 101* (1887), 277-293.
[4] GALOIS, E. *Œuvres mathématiques.* Gauthier-Villars (1897).
[5] GILBERT, E. N. and J. RIORDAN. Symmetry types of periodic sequences. *Illinois Journal of Mathematics 5* (1961), 657-665.
[6] PÒLYA, G. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und chemische Verbindungen. *Acta Mathematica 68* (1937), 145-252.
[7] PÒLYA, G., R. TARJAN and D. WOODS. *Notes on Introductory Combinatorics.* Birkhäuser-Verlag (1983).
[8] VAN DER WAERDEN, B. L. *Moderne Algebra.* Erster Teil, zweite Auflage. Berlin, Verlag von Julius Springer (1937).

(Reçu le 3 septembre 1988)

François Sigrist
Institut de mathématiques et d'informatique
Université de Neuchâtel
Chantemerle 20
CH-2000 Neuchâtel (Suisse)