Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1989)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER
Autor: Smati, A.
Kapitel: 2. Lemmes préliminaires
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57364

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\sum_{\varphi(n)\leqslant x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right), \qquad \text{pour tout } k > 0 .$$

De façon précise, on conjecture que les mêmes principes appliqués à l'étude des quantités

$$S(x, k-1) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \frac{\log^{k-1}(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \qquad \text{et} \qquad L(x, k) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^k \varphi(n)$$

conduisent au résultat

$$L(x, k) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^k \varphi(n) = ax \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} (\log x)^{k-i} + O_k(x) .$$

Je remercie J.-L. Nicolas de m'avoir fourni le thème de l'étude, G. Robin de m'avoir aidé et M. Balazard pour de multiples remarques, notamment la forme améliorée du lemme F 1). J'exprime mes vifs remerciements au referee pour ses nombreuses et intéressantes suggestions.

2. Lemmes préliminaires

On aura besoin des lemmes suivants, obtenus par voie élémentaire.

Lemme A ([8], [11]). *On a*

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + a\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Lemme B. *On a*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ p\nmid n}} \frac{1}{\varphi(n)} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1)+1} \log x + O(1) .$$

Démonstration. Il est prouvé dans [5] (Lemme 3.2 page 110) le résultat plus général

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ (n,l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} = \prod_{q\nmid l} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(l)}{l} \log x + O_l(1) .$$

En posant $l = p$ dans la preuve de ce résultat, $O_l(1)$ s'explicite alors de la façon suivante

$$O_p(1) = \frac{\log p}{p} + \frac{p-1}{p} O(1) = O(1),$$

où la constante impliquée par le symbole O est absolue. Le lemme B en résulte alors en observant que

$$\prod_{q \neq p} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(p)}{p} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1)+1}$$

LEMME C [2]. *On a*

$$\theta^*(x) =: \sum_{p \leqslant x} \log(p-1) = x + O\left(\frac{x}{\log^H x}\right), \quad \textit{pour tout} \quad H > 0.$$

Remarque. Le lemme C est l'une des formes équivalentes du théorème des nombres premiers avec reste. Notre résultat dépend directement des estimations élémentaires d'un tel reste, dont la première fut obtenue par E. Bombieri en 1962.

3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

1re étape.

Etude de la somme $$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

LEMME 1.1. *On a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} = a \sum \frac{\log p}{p(p-1)+1}.$$

Démonstration. Soit, pour $s > 0$, la série

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s \varphi(n)}.$$

Le théorème du produit eulérien donne

$$F(s) = \prod \left(1 + \frac{1}{p^s(p-1)}\right).$$