1. Introduction et présentation des résultats

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 61-76

RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

par A. SMATI

1. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

On désigne par φ la fonction arithmétique d'Euler, par γ la constante d'Euler et par a la constante

$$\frac{\zeta(2)\,\zeta(3)}{\zeta(6)} = \prod \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right).$$

Les symboles p et q dénotent toujours des nombres premiers distincts, et $\zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann. Considérons

$$F(x) = \# \{n \mid \varphi(n) \leqslant x\} = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} 1 .$$

Plusieurs auteurs ont étudié cette quantité en utilisant des méthodes élémentaires ou des méthodes non élémentaires. Traditionnellement on appelle méthodes non élémentaires celles dont les arguments utilisent l'analyse complexe ou l'analyse de Fourier. Nous suivons ici cet usage.

P. Erdös et P. Turán [4] furent les premiers à montrer que

$$F(x) = ax + o(x) \qquad (x \to +\infty) ;$$

leur démonstration, non élémentaire, est basée sur l'existence d'une fonction de distribution pour $n/\varphi(n)$ prouvée par I. J. Schoenberg [10], mais ne donne pas la valeur explicite de a. R. E. Dressler [3] a donné une démonstration, élémentaire, en approchant $\varphi(n)$ par les fonctions

$$\varphi_k(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leqslant p_k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

où p_k est le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. P. T. Bateman [1], utilisant des méthodes d'analyse complexe, a fourni diverses estimations de $F(x)$, dont la plus précise est

$$F(x) = ax + O(x \exp \{- (1-\varepsilon) \left(\frac{1}{2} \log x \log \log x\right)^{1/2} \})$$

pour tout ε positif, fixé. Enfin J.-L. Nicolas [9] a démontré que

$$F(x) = ax + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

La méthode utilisée est élémentaire et est due essentiellement à Tchebychef. Elle consiste à étudier les sommes

$$\sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log \varphi(n) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)}$$

et à les comparer. Dans cet article, on généralise la méthode décrite par J.-L. Nicolas et on démontre le résultat suivant:

THÉORÈME. *On a*

$$F(x) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Notons

$$L(x) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^2\varphi(n)\,.$$

Le passage à l'intégrale de Stieltjes

$$\sum_{\varphi(n)\leqslant x} 1 = \int_{2-}^{x} \frac{d(L(t))}{\log^2 t} + O(1)$$

montre que le théorème découle de la

PROPOSITION. *On a*

$$L(x) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^2\varphi(n) = ax\log^2 x - 2ax\log x + O(x)\,.$$

Soit

$$S(x) = \sum_{n\leqslant x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}\,.$$

La démonstration de la proposition est organisée en trois étapes. Dans la première on étudie $S(x)$, et dans la deuxième $L(x)$; dans la troisième on exprime $L(x)$ en fonction de $S(x)$ à l'aide d'une convolution.

On conjecture que cette méthode se généralise pour donner le résultat plus précis

$$\sum_{\varphi(n) \leqslant x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right), \qquad \text{pour tout } k > 0\,.$$

De façon précise, on conjecture que les mêmes principes appliqués à l'étude des quantités

$$S(x, k-1) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \frac{\log^{k-1}(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \qquad \text{et} \qquad L(x, k) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \log^k \varphi(n)$$

conduisent au résultat

$$L(x, k) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \log^k \varphi(n) = ax \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} (\log x)^{k-i} + O_k(x)\,.$$

Je remercie J.-L. Nicolas de m'avoir fourni le thème de l'étude, G. Robin de m'avoir aidé et M. Balazard pour de multiples remarques, notamment la forme améliorée du lemme F 1). J'exprime mes vifs remerciements au referee pour ses nombreuses et intéressantes suggestions.

2. Lemmes préliminaires

On aura besoin des lemmes suivants, obtenus par voie élémentaire.

Lemme A ([8], [11]). *On a*

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + a\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Lemme B. *On a*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p \nmid n}} \frac{1}{\varphi(n)} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1)+1} \log x + O(1)\,.$$

Démonstration. Il est prouvé dans [5] (Lemme 3.2 page 110) le résultat plus général

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n, l) = 1}} \frac{1}{\varphi(n)} = \prod_{q \nmid l} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(l)}{l} \log x + O_l(1)\,.$$

En posant $l = p$ dans la preuve de ce résultat, $O_l(1)$ s'explicite alors de la façon suivante