L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 61-76

RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

par A. SMATI

1. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

On désigne par φ la fonction arithmétique d'Euler, par γ la constante d'Euler et par a la constante

$$\frac{\zeta(2)\,\zeta(3)}{\zeta(6)} = \prod\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right).$$

Les symboles p et q dénotent toujours des nombres premiers distincts, et $\zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann. Considérons

$$F(x) = \# \{n \mid \varphi(n) \leqslant x\} = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} 1 .$$

Plusieurs auteurs ont étudié cette quantité en utilisant des méthodes élémentaires ou des méthodes non élémentaires. Traditionnellement on appelle méthodes non élémentaires celles dont les arguments utilisent l'analyse complexe ou l'analyse de Fourier. Nous suivons ici cet usage.

P. Erdös et P. Turán [4] furent les premiers à montrer que

$$F(x) = ax + o(x) \quad (x \to +\infty) ;$$

leur démonstration, non élémentaire, est basée sur l'existence d'une fonction de distribution pour $n/\varphi(n)$ prouvée par I. J. Schoenberg [10], mais ne donne pas la valeur explicite de a. R. E. Dressler [3] a donné une démonstration, élémentaire, en approchant $\varphi(n)$ par les fonctions

$$\varphi_k(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leqslant p_k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

où p_k est le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. P. T. Bateman [1], utilisant des méthodes d'analyse complexe, a fourni diverses estimations de $F(x)$, dont la plus précise est

$$F(x) = ax + O(x \exp \{- (1-\varepsilon) \left(\frac{1}{2} \log x \log \log x\right)^{1/2} \})$$

pour tout ε positif, fixé. Enfin J.-L. Nicolas [9] a démontré que

$$F(x) = ax + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

La méthode utilisée est élémentaire et est due essentiellement à Tchebychef. Elle consiste à étudier les sommes

$$\sum_{\varphi(n) \leqslant x} \log \varphi(n) \quad \text{et} \quad \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)}$$

et à les comparer. Dans cet article, on généralise la méthode décrite par J.-L. Nicolas et on démontre le résultat suivant:

THÉORÈME. *On a*

$$F(x) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Notons

$$L(x) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \log^2 \varphi(n).$$

Le passage à l'intégrale de Stieltjes

$$\sum_{\varphi(n) \leqslant x} 1 = \int_{2^-}^{x} \frac{d(L(t))}{\log^2 t} + O(1)$$

montre que le théorème découle de la

PROPOSITION. *On a*

$$L(x) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \log^2 \varphi(n) = ax \log^2 x - 2ax \log x + O(x).$$

Soit

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

La démonstration de la proposition est organisée en trois étapes. Dans la première on étudie $S(x)$, et dans la deuxième $L(x)$; dans la troisième on exprime $L(x)$ en fonction de $S(x)$ à l'aide d'une convolution.

On conjecture que cette méthode se généralise pour donner le résultat plus précis

$$\sum_{\varphi(n)\leqslant x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right), \qquad \text{pour tout } k > 0\,.$$

De façon précise, on conjecture que les mêmes principes appliqués à l'étude des quantités

$$S(x, k-1) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \frac{\log^{k-1}(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \qquad \text{et} \qquad L(x, k) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^k \varphi(n)$$

conduisent au résultat

$$L(x, k) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^k \varphi(n) = ax \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} (\log x)^{k-i} + O_k(x)\,.$$

Je remercie J.-L. Nicolas de m'avoir fourni le thème de l'étude, G. Robin de m'avoir aidé et M. Balazard pour de multiples remarques, notamment la forme améliorée du lemme F 1). J'exprime mes vifs remerciements au referee pour ses nombreuses et intéressantes suggestions.

2. Lemmes préliminaires

On aura besoin des lemmes suivants, obtenus par voie élémentaire.

Lemme A ([8], [11]). *On a*

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + a\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Lemme B. *On a*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\nmid n}} \frac{1}{\varphi(n)} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1)+1} \log x + O(1)\,.$$

Démonstration. Il est prouvé dans [5] (Lemme 3.2 page 110) le résultat plus général

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} = \prod_{q\nmid l} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(l)}{l} \log x + O_l(1)\,.$$

En posant $l = p$ dans la preuve de ce résultat, $O_l(1)$ s'explicite alors de la façon suivante

$$O_p(1) = \frac{\log p}{p} + \frac{p-1}{p} O(1) = O(1),$$

où la constante impliquée par le symbole O est absolue. Le lemme B en résulte alors en observant que

$$\prod_{q \neq p} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(p)}{p} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1)+1}$$

LEMME C [2]. *On a*

$$\theta^*(x) =: \sum_{p \leqslant x} \log(p-1) = x + O\left(\frac{x}{\log^H x}\right), \quad \textit{pour tout} \quad H > 0.$$

Remarque. Le lemme C est l'une des formes équivalentes du théorème des nombres premiers avec reste. Notre résultat dépend directement des estimations élémentaires d'un tel reste, dont la première fut obtenue par E. Bombieri en 1962.

3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

1^re^ étape.

Etude de la somme $$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

LEMME 1.1. *On a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} = a \sum \frac{\log p}{p(p-1)+1}.$$

Démonstration. Soit, pour $s > 0$, la série

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s \varphi(n)}.$$

Le théorème du produit eulérien donne

$$F(s) = \prod \left(1 + \frac{1}{p^s(p-1)}\right).$$

On a

$$F(1) = \prod\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = a$$

et

$$F'(1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)\log n}{n\varphi(n)}.$$

Le lemme s'obtient alors en prenant la dérivée logarithmique de $F(s)$ en $s = 1$, c'est-à-dire

$$F'(1) = -F(1)\sum \frac{\log p}{p(p-1)+1}.$$

LEMME 1.2. *On a*

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\log n}{\varphi(n)} = \frac{1}{2}\, a \log^2 x + O(1).$$

Démonstration. Soit l'identité

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d\mid n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

où μ est la fonction de Möbius. On écrit

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\log n}{\varphi(n)} = \sum_{n\leqslant x} \frac{\log n}{n} \sum_{d\mid n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \sum_{d\leqslant x} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} \sum_{m\leqslant x/d} \frac{\log (md)}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)}\right) \log x + O(1)$$

et le lemme s'en déduit en remarquant que

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} = \prod\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = a.$$

Le résultat principal est le suivant:

LEMME D. *On a*

$$S(x) = \frac{1}{2} a \log^2 x + a\left(\gamma - \sum \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} - \sum \frac{\log p}{p(p(p-1)+1)} - \sum \frac{(p-1)\log(p-1)}{p(p(p-1)+1)}\right) \log x + O(1).$$

Démonstration. En utilisant la convolution

$$\log\left(\frac{n}{\varphi(n)}\right) = \sum_{d \mid n} \rho(d) = \sum_{d \mid n} \rho\left(\frac{n}{d}\right)$$

avec

$$\rho(n) = \begin{cases} -\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ pour } n = p\,, \\ 0 \text{ pour } n \neq p\,, \end{cases}$$

on a

$$T(x) =: \sum_{n \leqslant x} \frac{\log\left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)}{\varphi(n)} = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{d \mid n} \rho\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= - \sum_{d \leqslant x} \sum_{p \leqslant x/d} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\varphi(pd)}\,.$$

En distinguant les cas où $p \mid d$ et $p \nmid d$ et en faisant intervenir la quantité

$$\sum_{d \leqslant x} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{p \leqslant x/d \\ (p,d)=1}} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p}$$

on obtient

$$T(x) = - \sum_{d \leqslant x} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{p \leqslant x/d} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p}$$

$$- \sum_{d \leqslant x} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{p \leqslant x/d \\ (p,d)=1}} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p(p-1)} =: U(x) + V(x)\,.$$

En appliquant le lemme A on a

$$U(x) = -a \sum \frac{\log\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)}{p} \log x + O(1)\,.$$

Quant à $V(x)$, on a, par le lemme B,

$$V(x) = -\sum_{p \leqslant x} \frac{\log\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)}{p(p-1)} \sum_{\substack{d \leqslant x/p \\ (p,d)=1}} \frac{1}{\varphi(d)}$$

$$= a\left(\sum \frac{\log p}{p(p-1)+1} - \sum \frac{\log p}{p(p(p-1)+1)} - \sum \frac{(p-1)\log(p-1)}{p(p(p-1)+1)}\right) \log x$$
$$+ O(1)\,.$$

Le lemme D s'en déduit, en observant que

$$S(x) = \log x \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} - \sum_{n \leqslant x} \frac{\log n}{\varphi(n)} + \sum_{n \leqslant x} \frac{\log\left(\dfrac{n}{\varphi(n)}\right)}{\varphi(n)}$$

et en appliquant les lemmes A, 1.1; 1.2.

2e étape.

Etude de la somme $\quad L(x) = \sum\limits_{\varphi(n) \leqslant x} \log^2 \varphi(n)\,.$

Le résultat principal est le suivant:

LEMME E. *On a*

$$L(x) = 2x \sum_{\varphi(d) \leqslant x} \frac{\log(x/\varphi(d))}{\varphi(d)} - 2x\left(1 + \gamma - \sum \frac{\log\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)}{p}\right) \sum_{\varphi(d) \leqslant x} \frac{1}{\varphi(d)}$$

$$+ 2x \sum \frac{\log(p-1)}{p(p-1)} \sum_{\substack{\varphi(d) \leqslant x \\ p \nmid d}} \frac{1}{\varphi(d)} + 2x \sum \frac{\log p}{p(p-1)^2} \sum_{\substack{\varphi(d) \leqslant x \\ p \nmid d}} \frac{1}{\varphi(d)}$$

$$+ O\left(x \sum_{\varphi(d) \leqslant x} \frac{1}{\varphi(d) \log^2\left(\dfrac{2x}{\varphi(d)}\right)}\right).$$

La démonstration de ce lemme nécessite les résultats auxiliaires suivants.

LEMME 2.1. *On a*

$$\log^2 \varphi(n) = \sum_{d|n} \Delta(d) = \sum_{d|n} \Delta\left(\frac{n}{d}\right)$$

où la fonction Δ *est définie comme suit:*

$\Delta(p) = \log^2(p-1)$

$\Delta(pq) = 2\log(p-1)\log(q-1)$

$\Delta(p^\alpha q) = 2\log p \log(q-1); \alpha \geqslant 2$

$\Delta(p^\alpha) = (2\alpha-3)\log^2 p + 2\log p \log(p-1); \alpha \geqslant 2$

$\Delta(p^\alpha q^\beta) = 2\log p \log q, \ \alpha \geqslant 2, \ \beta \geqslant 2$

$\Delta(n) = 0$ si le nombre de facteurs premiers distincts de n excède 2.

Démonstration. On peut écrire

$$\log \varphi(n) = \sum_{p|n} \log(p-1) + \sum_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \geqslant 2}} \log p =: X + Y .$$

Par conséquent

$$\log^2 \varphi(n) = X^2 + 2XY + Y^2 \qquad \text{avec}$$

$$X^2 = \sum_{p|n} \log^2(p-1) + \sum_{m=pq|n} 2\log(p-1)\log(q-1),$$

$$Y^2 = \sum_{p|n} \sum_{\substack{(\alpha,\beta) \\ \alpha,\beta \geqslant 2 \\ p^\alpha|n,\, p^\beta|n}} \log^2 p + \sum_{\substack{m=p^\alpha q^\beta|n \\ \alpha,\beta \geqslant 2}} 2\log p \log q,$$

et

$$2XY = \sum_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \geqslant 2}} 2\log(p-1)\log p + \sum_{\substack{m=pq^\alpha|n \\ \alpha \geqslant 2}} 2\log(p-1)\log q .$$

La somme de $\sum_{p|n} \sum_{\substack{(\alpha,\beta) \\ \alpha,\beta \geqslant 2}} \log^2 p$ se réécrit, avec $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$,

$$\sum_{\substack{p^\delta|n \\ \delta \geqslant 2}} \log^2 p \left(\sum_{\substack{(\alpha,\beta) \\ \alpha,\beta \geqslant 2 \\ \delta = \max\{\alpha,\beta\}}} 1 \right) = \sum_{\substack{p^\delta|n \\ \delta \geqslant 2}} \log^2 p\,(2\delta-3),$$

car les valeurs possibles de (α, β) avec $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$ sont

$(2, \delta), (3, \delta), ..., (\delta, \delta), (\delta, 2), (\delta, 3), ..., (\delta, \delta-1)$ et sont donc au nombre de $2\delta - 3$.

Finalement

$$\log^2 \varphi(n) = \sum_{p|n} \log^2 (p-1) + \sum_{m=pq|n} 2 \log (p-1) \log (q-1)$$

$$+ \sum_{\substack{m=p^\alpha q|n \\ \alpha \geqslant 2}} 2 \log p \log (q-1) + \sum_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \geqslant 2}} \{(2\alpha-3) \log^2 p + 2 \log p \log (p-1)\}$$

$$+ \sum_{\substack{m=p^\alpha q^\beta|n \\ \alpha, \beta \geqslant 2}} 2 \log p \log q ,$$

comme annoncé.

LEMME 2.2. *On a, uniformément pour* $d \geqslant 1, x \geqslant 1,$

$$\sum_{\varphi(pd) \leqslant x} \log^2 (p-1) = \frac{x}{\varphi(d)} \log \left(\frac{x}{\varphi(d)}\right) - \frac{x}{\varphi(d)} + O\left(\frac{x/\varphi(d)}{\log^2 \left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right)}\right) .$$

Démonstration. On a, en distinguant les cas où $p \mid d$ et $p \nmid d$,

$$\sum_{\varphi(pd) \leqslant x} \log^2 (p-1) = \sum_{p \leqslant x/\varphi(d)} \log^2 (p-1) + \sum_{\substack{x/\varphi(d) < p \leqslant x/\varphi(d)+1 \\ (p, d)=1}} \log^2 (p-1) .$$

Or

$$\sum_{p \leqslant x/\varphi(d)} \log^2 (p-1) = \int_{2^-}^{x/\varphi(d)} \log (t-1)\, d(\theta^*(t)), \quad \text{avec} \quad \theta^*(t) = \sum_{p \leqslant t} \log (p-1) .$$

L'intégration par parties et l'usage du lemme C donnent alors

$$\sum_{p \leqslant x/\varphi(d)} \log^2 (p-1) = \frac{x}{\varphi(d)} \log \left(\frac{x}{\varphi(d)}\right) - \frac{x}{\varphi(d)} + O\left(\frac{x/\varphi(d)}{\log^2 \left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right)}\right) ,$$

le lemme suit, en remarquant que

$$\sum_{\substack{x/\varphi(d) < p \leqslant x/\varphi(d)+1 \\ (p, d)=1}} \log^2 (p-1) \leqslant \log^2 \left(\frac{x}{\varphi(d)}\right) .$$

LEMME 2.3. *On a, uniformément pour* $d \geqslant 1, x \geqslant 1,$

$$\sum_{\substack{\varphi(pqd) \leqslant x \\ p<q}} 2 \log (p-1) \log (q-1) = \frac{x}{\varphi(d)} \log \frac{x}{\varphi(d)} + 2\left(\sum \frac{\log\left(1-\frac{1}{p}\right)}{p} - 2\gamma\right.$$

$$\left. - 2 \sum \frac{\log p}{p(p-1)} - 1\right) \frac{x}{\varphi(d)} + \frac{2x}{\varphi(d)} \sum_{(p, d)=1} \frac{\log (p-1)}{p(p-1)} + O\left(\frac{x/\varphi(d)}{\log^2 \left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right)}\right) .$$

Démonstration. Soit $y = x/\varphi(d)$. Dans les quelques lignes qui suivent on écrira, pour simplifier, Σ au lieu de $\Sigma\, 2 \log(p-1)\log(q-1)$, et l'on conviendra sans l'écrire que $p < q$.

Soit la somme $\sum\limits_{\varphi(pqd)\leqslant x}$. En distinguant les cas $pq \mid d$ et $pq \nmid d$ et en observant que si $d' \mid d$ alors $\varphi(dd') = d'\varphi(d)$, on obtient

$$\sum_{\varphi(pqd)\leqslant x} = \sum_{pq\leqslant y} - \sum_{\substack{pq\leqslant y\\ pq\nmid d}} + \sum_{\substack{\varphi(pqd)\leqslant x\\ pq\nmid d}}.$$

En distinguant les cas $p \mid d$ et $q \nmid d$; $p \nmid d$ et $q \mid d$; $p \nmid d$ et $q \nmid d$ on obtient

$$\sum_{\substack{pq\leqslant y\\ pq\nmid d}} = \sum_{\substack{pq\leqslant y\\ (p,d)=1}} + \sum_{\substack{pq\leqslant y\\ (q,d)=1,\, p\mid d}}$$

et

$$\sum_{\substack{\varphi(pqd)\leqslant x\\ pq\nmid d}} = \sum_{\substack{(p-1)q\leqslant y\\ (p,d)=1}} + \sum_{\substack{p(q-1)\leqslant y\\ p\mid d,\,(q,d)=1}} - \sum_{\substack{(p-1)q\leqslant y\\ (p,d)=1,\,(q,d)=1}} + \sum_{\substack{(p-1)(q-1)\leqslant y\\ (p,d)=1,\,(q,d)=1}}.$$

En rassemblant ces sommes, on obtient

$$\sum_{\varphi(pqd)\leqslant x} = \sum_{pq\leqslant y} + \Bigg(\sum_{\substack{(p-1)q\leqslant y\\ (p,d)=1}} - \sum_{\substack{pq\leqslant y\\ (p,d)=1}}\Bigg) + \Bigg(\sum_{\substack{p(q-1)\leqslant y\\ p\mid d,\,(q,d)=1}} - \sum_{\substack{pq\leqslant y\\ p\mid d,\,(q,d)=1}}\Bigg)$$
$$+ \Bigg(\sum_{\substack{(p-1)(q-1)\leqslant y\\ (p,d)=1,\,(q,d)=1}} - \sum_{\substack{(p-1)q\leqslant y\\ (p,d)=1,\,(q,d)=1}}\Bigg) =: A_1 + A_2 + A_3 + A_4\,.$$

La somme A_1 s'écrit

$$2\sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \log(p-1) \sum_{q\leqslant\frac{y}{p}} \log(q-1) - \sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \log(p-1) \sum_{q\leqslant\sqrt{y}} \log(q-1)$$
$$- \sum_{p\leqslant\sqrt{y}} 2\log^2(p-1)\,.$$

Les deux premières sommes s'écrivent

$$2\sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \theta^*\left(\frac{y}{p}\right)\log(p-1) - \left(\theta^*(\sqrt{y})\right)^2 = 2y\sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \frac{\log(p-1)}{p}$$
$$- y + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right)$$

par application du lemme C. Mais, on a

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \frac{\log(p-1)}{p} = \sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \frac{\log p}{p} + \sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \frac{\log\left(1-\dfrac{1}{p}\right)}{p}.$$

L'estimation classique (cf. [7] § 55)

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{2}\log y + \left(-\gamma - \sum \frac{\log p}{p(p-1)}\right) + O\left(\frac{1}{\log^2(2y)}\right)$$

et les estimations

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \frac{\log\left(1-\dfrac{1}{p}\right)}{p} = \sum \frac{\log\left(1-\dfrac{1}{p}\right)}{p} + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

et

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \log^2(p-1) \ll \frac{y}{\log^2(2y)}$$

donnent alors

$$A_1 = y\log y + \left(2\sum \frac{\log\left(1-\dfrac{1}{p}\right)}{p} - 2\gamma - 1 - 2\sum\frac{\log p}{p(p-1)}\right)y$$
$$+ O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right).$$

Passons à A_2, qui se réécrit

$$A_2 = 2\sum_{\substack{p-1\leqslant\sqrt{y}\\(p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*\left(\frac{y}{p-1}\right) - \sum_{\substack{p-1\leqslant\sqrt{y}\\(p,d)=1}} \log(p-1))\,\theta^*(p)$$
$$-\left(2\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{y}\\(p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*\left(\frac{y}{p}\right) - \sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{y}\\(p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p)\right).$$

On a

$$\sum_{\substack{p-1\leqslant\sqrt{y}\\(p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p) - \sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{y}\\(p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p) \ll \sqrt{y}\log\sqrt{y}\,.$$

Quant aux autres termes, on les estime à l'aide du lemme C; on obtient

$$A_2 = 2y \sum_{(p,d)=1} \frac{\log(p-1)}{p(p-1)} + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right).$$

Finalement, un calcul semblable donne

$$A_3 = 2 \sum_{\substack{p \leqslant \sqrt{y} \\ p \mid d}} \log(p-1) \sum_{\substack{\frac{y}{p} < q \leqslant \frac{y}{p}+1 \\ (q,d)=1}} \log(q-1) = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right)$$

et

$$A_4 = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right),$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 2.4. *On a, uniformément pour* $d \geqslant 1, x \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha qd) \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}} 2 \log p \log(q-1) = 2 \frac{x}{\varphi(d)} \sum \frac{\log p}{p(p-1)} + 2 \frac{x}{\varphi(d)} \sum_{(p,d)=1} \frac{\log p}{p(p-1)^2}$$
$$+ O\left(\frac{x/\varphi(d)}{\log^2\left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right)}\right).$$

Démonstration. Comme précédemment, on omet l'écriture de $2 \log p$ $\log(q-1)$ dans les quelques lignes qui suivent, où l'on conviendra, également sans l'écrire, que $p \neq q$ et que $\alpha \geqslant 2$.

En distinguant comme précédemment les cas où $p \mid d$ et $p \nmid d$ puis $q \mid d$ et $q \nmid d$, on obtient, en posant $y = \dfrac{x}{\varphi(d)}$,

$$\sum_{\varphi(p^\alpha qd) \leqslant x} = \sum_{p^\alpha q \leqslant y} + \left(\sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1)q \leqslant y \\ (p,d)=1}} - \sum_{\substack{p^\alpha q \leqslant y \\ (p,d)=1}}\right) + \left(\sum_{\substack{p^\alpha(q-1) \leqslant y \\ p \mid d, (q,d)=1}} - \sum_{\substack{p^\alpha q \leqslant y \\ p \mid d, (q,d)=1}}\right)$$
$$+ \left(\sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1)(q-1) \leqslant y \\ (p,d)=1, (q,d)=1}} - \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1)q \leqslant y \\ (p,d)=1, (q,d)=1}}\right) =: B_1 + B_2 + B_3 + B_4 .$$

On a, avec le lemme C,

$$B_1 = 2 \sum_{p^\alpha \leqslant \sqrt{y}} \log p \sum_{\substack{q \leqslant \frac{y}{p^\alpha} \\ q \neq p}} \log(q-1)$$

$$= 2 \sum_{p^\alpha \leqslant y} \log p \left\{ \frac{y}{p^\alpha} + O\left(\frac{y}{p^\alpha \log^2 \left(\frac{2y}{p^\alpha} \right)} \right) + O\left(\log(p-1)\right) \right\}$$

$$= 2y \sum \frac{\log p}{p(p-1)} + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)} \right).$$

Ensuite,

$$B_2 = 2 \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1) \leqslant \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log p \sum_{\substack{q \leqslant \frac{y}{p^{\alpha-1}(p-1)} \\ q \neq p}} \log(q-1) - 2 \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log p \sum_{\substack{q \leqslant \frac{y}{p^\alpha} \\ q \neq p}} \log(q-1)$$

$$= 2 \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant \sqrt{y} \\ (p,d)=1,\, p \mid d}} \log p \left\{ \sum_{q \leqslant \frac{y}{p^{\alpha-1}(p-1)}} \log(q-1) - \sum_{q \leqslant \frac{y}{p^\alpha}} \log(q-1) + O\left(\log(p-1)\right) \right\}$$

$$+ 2 \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1) \leqslant \sqrt{y} \\ p^\alpha > \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log p \sum_{\substack{q \leqslant \frac{y}{p^{\alpha-1}(p-1)} \\ q \neq p}} \log(q-1)$$

$$= 2y \sum_{(p,d)=1} \frac{\log p}{p(p-1)^2} + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)} \right),$$

avec trois applications du lemme C pour la dernière égalité. Finalement,

$$B_3 = 2 \sum_{p^\alpha \leqslant \sqrt{y}} \log p \left\{ \sum_{\substack{q \leqslant y/p^\alpha + 1 \\ q \neq p,\, (q,d)=1}} \log(q-1) - \sum_{\substack{q \leqslant y/p^\alpha \\ q \neq p,\, (q,d)=1}} \log(q-1) \right\}$$

$$= O\left(\sqrt[4]{y} \log y\right) = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)} \right)$$

et de la même façon,

$$B_4 = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)} \right),$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Lemme 2.5. *On a, uniformément pour* $d \geqslant 1$, $x \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha d) \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}} \left\{ (2\alpha - 3) \log^2 p + 2 \log p \log(p-1) \right\} = O\left(\sqrt{x/\varphi(d)} \log^2 \left(\frac{x}{\varphi(d)} \right) \right).$$

Démonstration. En observant que, d'une part $\varphi(p^\alpha d) \geqslant \frac{1}{2} p^\alpha \varphi(d)$ et d'autre part $\alpha \leqslant \log\left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right) / \log 2$ si $\frac{1}{2} p^\alpha \varphi(d) \leqslant x$, on obtient

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha d) \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}} \Big((2\alpha - 3)\log^2 p + 2\log p \log(p-1)\Big)$$

$$\leqslant \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant \frac{2x}{\varphi(d)} \\ \alpha \geqslant 2}} \Big((2\alpha - 3)\log^2 p + 2\log p \log(p-1)\Big)$$

$$\ll \log\left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right) \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant \frac{2x}{\varphi(d)} \\ \alpha \geqslant 2}} \log^2 p \ll \sqrt{x/\varphi(d)} \log^2\left(\frac{x}{\varphi(d)}\right).$$

LEMME 2.6. *On a, uniformément pour* $d \geqslant 1, x \geqslant 1$

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q^\beta d) \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2,\, \beta \geqslant 2}} 2\log p \log q = O\left(\sqrt{x/\varphi(d)} \log\left(\frac{x}{\varphi(d)}\right)\right).$$

Démonstration. De $\varphi(p^\alpha q^\beta d) \geqslant (p-1)^\alpha (q-1)^\beta \varphi(d)$, on déduit que

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q^\beta d) \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2,\, \beta \geqslant 2}} 2\log p \log q \ll \sum_{\substack{(p-1)^\alpha (q-1)^\beta \leqslant x/\varphi(d) \\ \alpha \geqslant 2,\, \beta \geqslant 2}} \log p \log q \ll$$

$$\sum_{\substack{(p-1)^\alpha \leqslant \sqrt{x/\varphi(d)} \\ \alpha \geqslant 2}} \log p \sum_{\substack{(q-1)^\beta \leqslant \frac{x}{(p-1)^\alpha \varphi(d)} \\ \beta \geqslant 2}} \log q \ll \sqrt{x/\varphi(d)} \sum_{\substack{(p-1)^\alpha \leqslant \sqrt{x/\varphi(d)} \\ \alpha \geqslant 2}} \frac{\log p}{(p-1)^{\alpha/2}}$$

$$\ll \sqrt{x/\varphi(d)} \log\left(\frac{x}{\varphi(d)}\right).$$

Démonstration du lemme E. D'après le lemme 2.1, on peut écrire

$$L(x) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \sum_{d \mid n} \Delta\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\varphi(d) \leqslant x} \sum_{\substack{d' \\ \varphi(dd') \leqslant x}} \Delta(d').$$

Or

$$\sum_{\substack{d' \\ \varphi(dd') \leqslant x}} \Delta(d') = \sum_{\varphi(pd) \leqslant x} \log^2(p-1) + \sum_{\varphi(pqd) \leqslant x} 2\log(p-1)\log(q-1)$$

$$+ \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q d) \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}} 2 \log p \log (q-1) + \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha d) \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}} \{(2\alpha - 3) \log^2 p + 2 \log p \log (p-1)\}$$

$$+ \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q^\beta d) \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2,\, \beta \geqslant 2}} 2 \log p \log q$$

L'application des lemmes 2.2 à 2.6 termine la démonstration.

3^e étape.

LEMME F. *On a*

1) $$\sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leqslant x}} \frac{\log (x/\varphi(n))}{\varphi(n)} = O(1) .$$

2) $$\sum_{\varphi(n) \leqslant x} \frac{1}{\varphi(n) \log^2 \left(\dfrac{2x}{\varphi(n)}\right)} = O(1) .$$

3) $$\sum_{\varphi(n) \leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + O(1) .$$

Démonstration.

1) Pour $y \geqslant 1$, $\log y \leqslant y$, donc

$$\sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leqslant x}} \frac{\log (x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \leqslant x \sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leqslant x}} \frac{1}{(\varphi(n))^2} = x\, O\left(\frac{1}{x}\right) = O(1) \qquad \text{(cf. [9])} .$$

2) Le passage à l'intégrale de Stieltjes et l'intégration par parties donnent:

$$\sum_{\varphi(d) \leqslant x} \frac{1}{\varphi(d) \log^2 \left(\dfrac{2x}{\varphi(d)}\right)} = \int_{1^-}^{x} \frac{d(F(t))}{t \log^2 \left(\dfrac{2x}{t}\right)} = \frac{F(x)}{x \log^2 2}$$

$$+ \int_1^x \frac{\left(\log \left(\dfrac{2x}{t}\right) - 2\right) F(t)}{t^2 \log^3 \left(\dfrac{2x}{t}\right)} dt = O(1)$$

car $F(x) = O(x)$.

3) (cf. [9]).

La proposition suit alors de la remarque

$$\sum_{\varphi(n) \leqslant x} \frac{\log (x/\varphi(n))}{\varphi(n)} = S(x) + \sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leqslant x}} \frac{\log (x/\varphi(n))}{\varphi(n)}$$

et des lemmes E, D, F, B et H.

RÉFÉRENCES

[1] BATEMAN, P. T. The distribution of values of Euler's function. *Acta Arith. 21* (1972), 329-345.

[2] BOMBIERI, E. Sulle formule di A. Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel « Primzahlsatz ». *Riv. Mat. Univ. Parma 3* (1962), 393-440.

[3] DRESSLER, R. E. A density which counts multiplicity. *Pacific J. Math. 34* (1970), 371-378.

[4] ERDÖS, P. Some remarks on Euler's φ-function and some related problems. *Bull. Amer. Math. Soc. 51* (1945), 540-544.

[5] HALBERSTAM, H. and H.-E. RICHERT. *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.

[6] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *A introduction to the theory of numbers*. 5th ed. Oxford Univ. Press, London (1979).

[7] LANDAU, E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Chelsea, 3e ed. 1974.

[8] —— Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Bedeutung zum Goldbachschen Satz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1900), 181-184.

[9] NICOLAS, J.-L. Distribution des valeurs de la fonction d'Euler. *L'Enseignement Math. 30* (1984), 331-338.

[10] SCHOENBERG, I. J. Über die asymptotische Verteilung reeler Zahlen mod 1. *Math. Z. 28* (1928), 171-199.

[11] SITARAMACHANDRARAO, R. On an error term of Landau. *Indian J. pure appl. Math. 13* (1982), 882-885.

(Reçu le 10 novembre 1988)

Abdelhakim Smati

Département de Mathématiques
Université de Limoges
123, avenue Albert-Thomas
F-87060 Limoges Cedex (France)