

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1989)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER  
**Autor:** Smati, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-57364>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

par A. SMATI

### 1. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

On désigne par  $\varphi$  la fonction arithmétique d'Euler, par  $\gamma$  la constante d'Euler et par  $a$  la constante

$$\frac{\zeta(2) \zeta(3)}{\zeta(6)} = \prod \left( 1 + \frac{1}{p(p-1)} \right).$$

Les symboles  $p$  et  $q$  dénotent toujours des nombres premiers distincts, et  $\zeta(s)$  la fonction zêta de Riemann. Considérons

$$F(x) = \# \{n \mid \varphi(n) \leq x\} = \sum_{\varphi(n) \leq x} 1.$$

Plusieurs auteurs ont étudié cette quantité en utilisant des méthodes élémentaires ou des méthodes non élémentaires. Traditionnellement on appelle méthodes non élémentaires celles dont les arguments utilisent l'analyse complexe ou l'analyse de Fourier. Nous suivons ici cet usage.

P. Erdős et P. Turán [4] furent les premiers à montrer que

$$F(x) = ax + o(x) \quad (x \rightarrow +\infty);$$

leur démonstration, non élémentaire, est basée sur l'existence d'une fonction de distribution pour  $n/\varphi(n)$  prouvée par I. J. Schoenberg [10], mais ne donne pas la valeur explicite de  $a$ . R. E. Dressler [3] a donné une démonstration, élémentaire, en approchant  $\varphi(n)$  par les fonctions

$$\varphi_k(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leq p_k}} \left( 1 - \frac{1}{p} \right),$$

où  $p_k$  est le  $k^{\text{ième}}$  nombre premier. P. T. Bateman [1], utilisant des méthodes d'analyse complexe, a fourni diverses estimations de  $F(x)$ , dont la plus précise est

$$F(x) = ax + O\left(x \exp \left\{ - (1-\varepsilon) \left( \frac{1}{2} \log x \log \log x \right)^{1/2} \right\} \right)$$

pour tout  $\varepsilon$  positif, fixé. Enfin J.-L. Nicolas [9] a démontré que

$$F(x) = ax + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

La méthode utilisée est élémentaire et est due essentiellement à Tchebychef. Elle consiste à étudier les sommes

$$\sum_{\varphi(n) \leq x} \log \varphi(n) \quad \text{et} \quad \sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{1}{\varphi(n)}$$

et à les comparer. Dans cet article, on généralise la méthode décrite par J.-L. Nicolas et on démontre le résultat suivant :

THÉORÈME. *On a*

$$F(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Notons

$$L(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^2 \varphi(n).$$

Le passage à l'intégrale de Stieltjes

$$\sum_{\varphi(n) \leq x} 1 = \int_{2^-}^x \frac{d(L(t))}{\log^2 t} + O(1)$$

montre que le théorème découle de la

PROPOSITION. *On a*

$$L(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^2 \varphi(n) = ax \log^2 x - 2ax \log x + O(x).$$

Soit

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

La démonstration de la proposition est organisée en trois étapes. Dans la première on étudie  $S(x)$ , et dans la deuxième  $L(x)$ ; dans la troisième on exprime  $L(x)$  en fonction de  $S(x)$  à l'aide d'une convolution.

On conjecture que cette méthode se généralise pour donner le résultat plus précis

$$\sum_{\varphi(n) \leq x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right), \quad \text{pour tout } k > 0.$$

De façon précise, on conjecture que les mêmes principes appliqués à l'étude des quantités

$$S(x, k-1) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{\log^{k-1}(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \quad \text{et} \quad L(x, k) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^k \varphi(n)$$

conduisent au résultat

$$L(x, k) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^k \varphi(n) = ax \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} (\log x)^{k-i} + O_k(x).$$

Je remercie J.-L. Nicolas de m'avoir fourni le thème de l'étude, G. Robin de m'avoir aidé et M. Balazard pour de multiples remarques, notamment la forme améliorée du lemme F 1). J'exprime mes vifs remerciements au referee pour ses nombreuses et intéressantes suggestions.

## 2. LEMMES PRÉLIMINAIRES

On aura besoin des lemmes suivants, obtenus par voie élémentaire.

LEMME A ([8], [11]). *On a*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + a\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

LEMME B. *On a*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ p \nmid n}} \frac{1}{\varphi(n)} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1) + 1} \log x + O(1).$$

*Démonstration.* Il est prouvé dans [5] (Lemme 3.2 page 110) le résultat plus général

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, l) = 1}} \frac{1}{\varphi(n)} = \prod_{q \nmid l} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(l)}{l} \log x + O_l(1).$$

En posant  $l = p$  dans la preuve de ce résultat,  $O_l(1)$  s'explique alors de la façon suivante

$$O_p(1) = \frac{\log p}{p} + \frac{p-1}{p} O(1) = O(1),$$

où la constante impliquée par le symbole  $O$  est absolue. Le lemme B en résulte alors en observant que

$$\prod_{q \neq p} \left( 1 + \frac{1}{q(q-1)} \right) \frac{\varphi(p)}{p} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1) + 1}$$

LEMME C [2]. On a

$$\theta^*(x) =: \sum_{p \leq x} \log(p-1) = x + O\left(\frac{x}{\log^H x}\right), \quad \text{pour tout } H > 0.$$

*Remarque.* Le lemme C est l'une des formes équivalentes du théorème des nombres premiers avec reste. Notre résultat dépend directement des estimations élémentaires d'un tel reste, dont la première fut obtenue par E. Bombieri en 1962.

### 3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

1<sup>re</sup> étape.

*Etude de la somme* 
$$S(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

LEMME 1.1. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} = a \sum \frac{\log p}{p(p-1) + 1}.$$

*Démonstration.* Soit, pour  $s > 0$ , la série

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s \varphi(n)}.$$

Le théorème du produit eulérien donne

$$F(s) = \prod \left( 1 + \frac{1}{p^s(p-1)} \right).$$

On a

$$F(1) = \prod \left( 1 + \frac{1}{p(p-1)} \right) = a$$

et

$$F'(1) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)}.$$

Le lemme s'obtient alors en prenant la dérivée logarithmique de  $F(s)$  en  $s = 1$ , c'est-à-dire

$$F'(1) = - F(1) \sum \frac{\log p}{p(p-1) + 1}.$$

LEMME 1.2. On a

$$\sum_{n \leq x} \frac{\log n}{\varphi(n)} = \frac{1}{2} a \log^2 x + O(1).$$

*Démonstration.* Soit l'identité

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

où  $\mu$  est la fonction de Möbius. On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\log n}{\varphi(n)} &= \sum_{n \leq x} \frac{\log n}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \sum_{d \leq x} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} \sum_{m \leq x/d} \frac{\log (md)}{m} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} \right) \log x + O(1) \end{aligned}$$

et le lemme s'en déduit en remarquant que

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} = \prod \left( 1 + \frac{1}{p(p-1)} \right) = a.$$

Le résultat principal est le suivant :

LEMME D. On a

$$S(x) = \frac{1}{2} a \log^2 x + a \left( \gamma - \sum \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p} - \sum \frac{\log p}{p(p(p-1)+1)} - \sum \frac{(p-1) \log (p-1)}{p(p(p-1)+1)} \right) \log x + O(1).$$

*Démonstration.* En utilisant la convolution

$$\log \left( \frac{n}{\varphi(n)} \right) = \sum_{d|n} \rho(d) = \sum_{d|n} \rho \left( \frac{n}{d} \right)$$

avec

$$\rho(n) = \begin{cases} -\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right) & \text{pour } n = p, \\ 0 & \text{pour } n \neq p, \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} T(x) &= : \sum_{n \leq x} \frac{\log \left( \frac{n}{\varphi(n)} \right)}{\varphi(n)} = \sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{d|n} \rho \left( \frac{n}{d} \right) \\ &= - \sum_{d \leq x} \sum_{p \leq x/d} \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{\varphi(pd)}. \end{aligned}$$

En distinguant les cas où  $p | d$  et  $p \nmid d$  et en faisant intervenir la quantité

$$\sum_{d \leq x} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{p \leq x/d \\ (p, d) = 1}} \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p}$$

on obtient

$$\begin{aligned} T(x) &= - \sum_{d \leq x} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{p \leq x/d} \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p} \\ &- \sum_{d \leq x} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{p \leq x/d \\ (p, d) = 1}} \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p(p-1)} = : U(x) + V(x). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme A on a

$$U(x) = -a \sum \frac{\log \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} \log x + O(1).$$

Quant à  $V(x)$ , on a, par le lemme B,

$$\begin{aligned} V(x) &= - \sum_{p \leq x} \frac{\log \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p(p-1)} \sum_{\substack{d \leq x/p \\ (p,d)=1}} \frac{1}{\varphi(d)} \\ &= a \left( \sum \frac{\log p}{p(p-1)+1} - \sum \frac{\log p}{p(p(p-1)+1)} - \sum \frac{(p-1) \log (p-1)}{p(p(p-1)+1)} \right) \log x \\ &\quad + O(1). \end{aligned}$$

Le lemme D s'en déduit, en observant que

$$S(x) = \log x \sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} - \sum_{n \leq x} \frac{\log n}{\varphi(n)} + \sum_{n \leq x} \frac{\log \left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)}{\varphi(n)}$$

et en appliquant les lemmes A, 1.1; 1.2.

2<sup>e</sup> étape.

Etude de la somme  $L(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^2 \varphi(n).$

Le résultat principal est le suivant :

LEMME E. On a

$$\begin{aligned} L(x) &= 2x \sum_{\varphi(d) \leq x} \frac{\log (x/\varphi(d))}{\varphi(d)} - 2x \left( 1 + \gamma - \sum \frac{\log \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} \right) \sum_{\varphi(d) \leq x} \frac{1}{\varphi(d)} \\ &\quad + 2x \sum \frac{\log (p-1)}{p(p-1)} \sum_{\substack{\varphi(d) \leq x \\ p \nmid d}} \frac{1}{\varphi(d)} + 2x \sum \frac{\log p}{p(p-1)^2} \sum_{\substack{\varphi(d) \leq x \\ p \nmid d}} \frac{1}{\varphi(d)} \\ &\quad + O \left( x \sum_{\varphi(d) \leq x} \frac{1}{\varphi(d) \log^2 \left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right)} \right). \end{aligned}$$

La démonstration de ce lemme nécessite les résultats auxiliaires suivants.

LEMME 2.1. On a

$$\log^2 \varphi(n) = \sum_{d|n} \Delta(d) = \sum_{d|n} \Delta\left(\frac{n}{d}\right)$$

où la fonction  $\Delta$  est définie comme suit :

$$\Delta(p) = \log^2(p-1)$$

$$\Delta(pq) = 2 \log(p-1) \log(q-1)$$

$$\Delta(p^\alpha q) = 2 \log p \log(q-1); \alpha \geq 2$$

$$\Delta(p^\alpha) = (2\alpha-3) \log^2 p + 2 \log p \log(p-1); \alpha \geq 2$$

$$\Delta(p^\alpha q^\beta) = 2 \log p \log q, \alpha \geq 2, \beta \geq 2$$

$$\Delta(n) = 0 \text{ si le nombre de facteurs premiers distincts de } n \text{ excède } 2.$$

*Démonstration.* On peut écrire

$$\log \varphi(n) = \sum_{p|n} \log(p-1) + \sum_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \geq 2}} \log p =: X + Y.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \log^2 \varphi(n) &= X^2 + 2XY + Y^2 \quad \text{avec} \\ X^2 &= \sum_{p|n} \log^2(p-1) + \sum_{m=pq|n} 2 \log(p-1) \log(q-1), \\ Y^2 &= \sum_{p|n} \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \\ \alpha, \beta \geq 2 \\ p^\alpha|n, p^\beta|n}} \log^2 p + \sum_{\substack{m=p^\alpha q^\beta|n \\ \alpha, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q, \end{aligned}$$

et

$$2XY = \sum_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \geq 2}} 2 \log(p-1) \log p + \sum_{\substack{m=pq^\alpha|n \\ \alpha \geq 2}} 2 \log(p-1) \log q.$$

La somme de  $\sum_{p|n} \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \\ \alpha, \beta \geq 2}} \log^2 p$  se réécrit, avec  $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$ ,

$$\sum_{\delta \geq 2} \log^2 p \left( \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \\ \alpha, \beta \geq 2 \\ \delta = \max\{\alpha, \beta\}}} 1 \right) = \sum_{\delta \geq 2} \log^2 p (2\delta - 3),$$

car les valeurs possibles de  $(\alpha, \beta)$  avec  $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$  sont

$(2, \delta), (3, \delta), \dots, (\delta, \delta), (\delta, 2), (\delta, 3), \dots, (\delta, \delta-1)$  et sont donc au nombre de  $2\delta - 3$ .

Finalement

$$\begin{aligned} \log^2 \varphi(n) &= \sum_{p|n} \log^2 (p-1) + \sum_{m=pq|n} 2 \log (p-1) \log (q-1) \\ &+ \sum_{\substack{m=p^\alpha q|n \\ \alpha \geq 2}} 2 \log p \log (q-1) + \sum_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \geq 2}} \{(2\alpha-3) \log^2 p + 2 \log p \log (p-1)\} \\ &+ \sum_{\substack{m=p^\alpha q^\beta|n \\ \alpha, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q, \end{aligned}$$

comme annoncé.

LEMME 2.2. On a, uniformément pour  $d \geq 1, x \geq 1$ ,

$$\sum_{\varphi(pd) \leq x} \log^2 (p-1) = \frac{x}{\varphi(d)} \log \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right) - \frac{x}{\varphi(d)} + O \left( \frac{x/\varphi(d)}{\log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right)} \right).$$

Démonstration. On a, en distinguant les cas où  $p | d$  et  $p \nmid d$ ,

$$\sum_{\varphi(pd) \leq x} \log^2 (p-1) = \sum_{p \leq x/\varphi(d)} \log^2 (p-1) + \sum_{\substack{x/\varphi(d) < p \leq x/\varphi(d)+1 \\ (p, d)=1}} \log^2 (p-1).$$

Or

$$\sum_{p \leq x/\varphi(d)} \log^2 (p-1) = \int_{2^-}^{x/\varphi(d)} \log (t-1) d(\theta^*(t)), \quad \text{avec} \quad \theta^*(t) = \sum_{p \leq t} \log (p-1).$$

L'intégration par parties et l'usage du lemme C donnent alors

$$\sum_{p \leq x/\varphi(d)} \log^2 (p-1) = \frac{x}{\varphi(d)} \log \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right) - \frac{x}{\varphi(d)} + O \left( \frac{x/\varphi(d)}{\log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right)} \right),$$

le lemme suit, en remarquant que

$$\sum_{\substack{x/\varphi(d) < p \leq x/\varphi(d)+1 \\ (p, d)=1}} \log^2 (p-1) \leq \log^2 \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right).$$

LEMME 2.3. On a, uniformément pour  $d \geq 1, x \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\varphi(pqd) \leq x \\ p < q}} 2 \log (p-1) \log (q-1) &= \frac{x}{\varphi(d)} \log \frac{x}{\varphi(d)} + 2 \left( \sum \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p} - 2\gamma \right. \\ &\left. - 2 \sum \frac{\log p}{p(p-1)} - 1 \right) \cdot \frac{x}{\varphi(d)} + \frac{2x}{\varphi(d)} \sum_{(p, d)=1} \frac{\log (p-1)}{p(p-1)} + O \left( \frac{x/\varphi(d)}{\log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right)} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $y = x/\varphi(d)$ . Dans les quelques lignes qui suivent on écrira, pour simplifier,  $\Sigma$  au lieu de  $\Sigma 2 \log(p-1) \log(q-1)$ , et l'on conviendra sans l'écrire que  $p < q$ .

Soit la somme  $\sum_{\varphi(pqd) \leq x}$ . En distinguant les cas  $pq \mid d$  et  $pq \nmid d$  et en observant que si  $d' \mid d$  alors  $\varphi(dd') = d'\varphi(d)$ , on obtient

$$\sum_{\varphi(pqd) \leq x} = \sum_{pq \leq y} - \sum_{\substack{pq \leq y \\ pq \nmid d}} + \sum_{\substack{\varphi(pqd) \leq x \\ pq \nmid d}}.$$

En distinguant les cas  $p \mid d$  et  $q \nmid d$ ;  $p \nmid d$  et  $q \mid d$ ;  $p \nmid d$  et  $q \nmid d$  on obtient

$$\sum_{\substack{pq \leq y \\ pq \nmid d}} = \sum_{\substack{pq \leq y \\ (p, d) = 1}} + \sum_{\substack{pq \leq y \\ (q, d) = 1, p \nmid d}}$$

et

$$\sum_{\substack{\varphi(pqd) \leq x \\ pq \nmid d}} = \sum_{\substack{(p-1)q \leq y \\ (p, d) = 1}} + \sum_{\substack{p(q-1) \leq y \\ p \mid d, (q, d) = 1}} - \sum_{\substack{(p-1)q \leq y \\ (p, d) = 1, (q, d) = 1}} + \sum_{\substack{(p-1)(q-1) \leq y \\ (p, d) = 1, (q, d) = 1}}.$$

En rassemblant ces sommes, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi(pqd) \leq x} &= \sum_{pq \leq y} + \left( \sum_{\substack{(p-1)q \leq y \\ (p, d) = 1}} - \sum_{\substack{pq \leq y \\ (p, d) = 1}} \right) + \left( \sum_{\substack{p(q-1) \leq y \\ p \mid d, (q, d) = 1}} - \sum_{\substack{pq \leq y \\ p \mid d, (q, d) = 1}} \right) \\ &+ \left( \sum_{\substack{(p-1)(q-1) \leq y \\ (p, d) = 1, (q, d) = 1}} - \sum_{\substack{(p-1)q \leq y \\ (p, d) = 1, (q, d) = 1}} \right) =: A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \end{aligned}$$

La somme  $A_1$  s'écrit

$$\begin{aligned} 2 \sum_{p \leq \sqrt{y}} \log(p-1) \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p} \\ q \leq p}} \log(q-1) - \sum_{p \leq \sqrt{y}} \log(p-1) \sum_{q \leq \sqrt{y}} \log(q-1) \\ - \sum_{p \leq \sqrt{y}} 2 \log^2(p-1). \end{aligned}$$

Les deux premières sommes s'écrivent

$$\begin{aligned} 2 \sum_{p \leq \sqrt{y}} \theta^* \left( \frac{y}{p} \right) \log(p-1) - \left( \theta^*(\sqrt{y}) \right)^2 = 2y \sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log(p-1)}{p} \\ - y + O \left( \frac{y}{\log^2(2y)} \right) \end{aligned}$$

par application du lemme C. Mais, on a

$$\sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log(p-1)}{p} = \sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log p}{p} + \sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p}.$$

L'estimation classique (cf. [7] § 55)

$$\sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{2} \log y + \left(-\gamma - \sum \frac{\log p}{p(p-1)}\right) + O\left(\frac{1}{\log^2(2y)}\right)$$

et les estimations

$$\sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} = \sum \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

et

$$\sum_{p \leq \sqrt{y}} \log^2(p-1) \ll \frac{y}{\log^2(2y)}$$

donnent alors

$$A_1 = y \log y + \left(2 \sum \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} - 2\gamma - 1 - 2 \sum \frac{\log p}{p(p-1)}\right)y + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right).$$

Passons à  $A_2$ , qui se réécrit

$$A_2 = 2 \sum_{\substack{p-1 \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*\left(\frac{y}{p-1}\right) - \sum_{\substack{p-1 \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p) - \left(2 \sum_{\substack{p \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*\left(\frac{y}{p}\right) - \sum_{\substack{p \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p)\right).$$

On a

$$\sum_{\substack{p-1 \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p) - \sum_{\substack{p \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p) \ll \sqrt{y} \log \sqrt{y}.$$

Quant aux autres termes, on les estime à l'aide du lemme C; on obtient

$$A_2 = 2y \sum_{(p,d)=1} \frac{\log(p-1)}{p(p-1)} + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right).$$

Finalement, un calcul semblable donne

$$A_3 = 2 \sum_{\substack{p \leq \sqrt{y} \\ p|d}} \log(p-1) \sum_{\substack{\frac{y}{p} < q \leq \frac{y}{p} + 1 \\ (q,d)=1}} \log(q-1) = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right)$$

et

$$A_4 = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right),$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 2.4. On a, uniformément pour  $d \geq 1$ ,  $x \geq 1$ ,

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} 2 \log p \log(q-1) = 2 \frac{x}{\varphi(d)} \sum \frac{\log p}{p(p-1)} + 2 \frac{x}{\varphi(d)} \sum_{(p,d)=1} \frac{\log p}{p(p-1)^2} \\ + O\left(\frac{x/\varphi(d)}{\log^2\left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right)}\right).$$

*Démonstration.* Comme précédemment, on omet l'écriture de  $2 \log p \log(q-1)$  dans les quelques lignes qui suivent, où l'on conviendra, également sans l'écrire, que  $p \neq q$  et que  $\alpha \geq 2$ .

En distinguant comme précédemment les cas où  $p|d$  et  $p \nmid d$  puis  $q|d$  et  $q \nmid d$ , on obtient, en posant  $y = \frac{x}{\varphi(d)}$ ,

$$\sum_{\varphi(p^\alpha q d) \leq x} = \sum_{p^\alpha q \leq y} + \left( \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1)q \leq y \\ (p,d)=1}} - \sum_{\substack{p^\alpha q \leq y \\ (p,d)=1}} \right) + \left( \sum_{\substack{p^\alpha(q-1) \leq y \\ p|d, (q,d)=1}} - \sum_{\substack{p^\alpha q \leq y \\ p|d, (q,d)=1}} \right) \\ + \left( \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1)(q-1) \leq y \\ (p,d)=1, (q,d)=1}} - \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1)q \leq y \\ (p,d)=1, (q,d)=1}} \right) =: B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

On a, avec le lemme C,

$$B_1 = 2 \sum_{p^\alpha \leq \sqrt{y}} \log p \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p^\alpha} \\ q \neq p}} \log(q-1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{p^\alpha \leq y} \log p \left\{ \frac{y}{p^\alpha} + O\left(\frac{y}{p^\alpha \log^2\left(\frac{2y}{p^\alpha}\right)}\right) + O(\log(p-1)) \right\} \\
 &= 2y \sum \frac{\log p}{p(p-1)} + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right).
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 B_2 &= 2 \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1) \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log p \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p^{\alpha-1}(p-1)} \\ q \neq p}} \log(q-1) - 2 \sum_{\substack{p^\alpha \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log p \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p^\alpha} \\ q \neq p}} \log(q-1) \\
 &= 2 \sum_{\substack{p^\alpha \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1, p|d}} \log p \left\{ \sum_{q \leq \frac{y}{p^{\alpha-1}(p-1)}} \log(q-1) - \sum_{q \leq \frac{y}{p^\alpha}} \log(q-1) + O(\log(p-1)) \right\} \\
 &\quad + 2 \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1) \leq \sqrt{y} \\ p^\alpha > \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log p \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p^{\alpha-1}(p-1)} \\ q \neq p}} \log(q-1) \\
 &= 2y \sum_{(p,d)=1} \frac{\log p}{p(p-1)^2} + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right),
 \end{aligned}$$

avec trois applications du lemme C pour la dernière égalité. Finalement,

$$\begin{aligned}
 B_3 &= 2 \sum_{p^\alpha \leq \sqrt{y}} \log p \left\{ \sum_{\substack{q \leq y/p^{\alpha+1} \\ q \neq p, (q,d)=1}} \log(q-1) - \sum_{\substack{q \leq y/p^\alpha \\ q \neq p, (q,d)=1}} \log(q-1) \right\} \\
 &= O(\sqrt[4]{y} \log y) = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right)
 \end{aligned}$$

et de la même façon,

$$B_4 = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right),$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 2.5. On a, uniformément pour  $d \geq 1, x \geq 1$ ,

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} \{(2\alpha-3) \log^2 p + 2 \log p \log(p-1)\} = O\left(\sqrt{x/\varphi(d)} \log^2\left(\frac{x}{\varphi(d)}\right)\right).$$

*Démonstration.* En observant que, d'une part  $\varphi(p^\alpha d) \geq \frac{1}{2} p^\alpha \varphi(d)$  et d'autre part  $\alpha \leq \log \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right) / \log 2$  si  $\frac{1}{2} p^\alpha \varphi(d) \leq x$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} \left( (2\alpha - 3) \log^2 p + 2 \log p \log(p-1) \right) \\ & \leq \sum_{\substack{p^\alpha \leq \frac{2x}{\varphi(d)} \\ \alpha \geq 2}} \left( (2\alpha - 3) \log^2 p + 2 \log p \log(p-1) \right) \\ & \ll \log \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right) \sum_{\substack{p^\alpha \leq \frac{2x}{\varphi(d)} \\ \alpha \geq 2}} \log^2 p \ll \sqrt{x/\varphi(d)} \log^2 \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right). \end{aligned}$$

LEMME 2.6. On a, uniformément pour  $d \geq 1, x \geq 1$

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q^\beta d) \leq x \\ \alpha \geq 2, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q = O \left( \sqrt{x/\varphi(d)} \log \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right) \right).$$

*Démonstration.* De  $\varphi(p^\alpha q^\beta d) \geq (p-1)^\alpha (q-1)^\beta \varphi(d)$ , on déduit que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q^\beta d) \leq x \\ \alpha \geq 2, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q \ll \sum_{\substack{(p-1)^\alpha (q-1)^\beta \leq x/\varphi(d) \\ \alpha \geq 2, \beta \geq 2}} \log p \log q \ll \\ & \sum_{\substack{(p-1)^\alpha \leq \sqrt{x/\varphi(d)} \\ \alpha \geq 2}} \log p \sum_{\substack{(q-1)^\beta \leq \frac{x}{(p-1)^\alpha \varphi(d)} \\ \beta \geq 2}} \log q \ll \sqrt{x/\varphi(d)} \sum_{\substack{(p-1)^\alpha \leq \sqrt{x/\varphi(d)} \\ \alpha \geq 2}} \frac{\log p}{(p-1)^{\alpha/2}} \\ & \ll \sqrt{x/\varphi(d)} \log \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration du lemme E.* D'après le lemme 2.1, on peut écrire

$$L(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \sum_{d|n} \Delta \left( \frac{n}{d} \right) = \sum_{\varphi(d) \leq x} \sum_{\substack{d' \\ \varphi(dd') \leq x}} \Delta(d').$$

Or

$$\sum_{\varphi(dd') \leq x} \Delta(d') = \sum_{\varphi(pd) \leq x} \log^2(p-1) + \sum_{\varphi(pqd) \leq x} 2 \log(p-1) \log(q-1)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} 2 \log p \log (q-1) + \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} \{(2\alpha-3) \log^2 p + 2 \log p \log (p-1)\} \\
 & + \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q^\beta d) \leq x \\ \alpha \geq 2, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q
 \end{aligned}$$

L'application des lemmes 2.2 à 2.6 termine la démonstration.

3<sup>e</sup> étape.

LEMME F. On a

- 1)  $\sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leq x}} \frac{\log (x/\varphi(n))}{\varphi(n)} = O(1).$
- 2)  $\sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{1}{\varphi(n) \log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(n)} \right)} = O(1).$
- 3)  $\sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + O(1).$

*Démonstration.*

1) Pour  $y \geq 1$ ,  $\log y \leq y$ , donc

$$\sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leq x}} \frac{\log (x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \leq x \sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leq x}} \frac{1}{(\varphi(n))^2} = x O\left(\frac{1}{x}\right) = O(1) \quad (\text{cf. [9]}).$$

2) Le passage à l'intégrale de Stieltjes et l'intégration par parties donnent :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\varphi(d) \leq x} \frac{1}{\varphi(d) \log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right)} &= \int_{1^-}^x \frac{d(F(t))}{t \log^2 \left( \frac{2x}{t} \right)} = \frac{F(x)}{x \log^2 2} \\
 &+ \int_1^x \frac{\left( \log \left( \frac{2x}{t} \right) - 2 \right) F(t)}{t^2 \log^3 \left( \frac{2x}{t} \right)} dt = O(1)
 \end{aligned}$$

car  $F(x) = O(x)$ .

3) (cf. [9]).

La proposition suit alors de la remarque

$$\sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} = S(x) + \sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leq x}} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}$$

et des lemmes E, D, F, B et H.

### RÉFÉRENCES

- [1] BATEMAN, P. T. The distribution of values of Euler's function. *Acta Arith.* 21 (1972), 329-345.
- [2] BOMBIERI, E. Sulle formule di A. Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel « Primzahlsatz ». *Riv. Mat. Univ. Parma* 3 (1962), 393-440.
- [3] DRESSLER, R. E. A density which counts multiplicity. *Pacific J. Math.* 34 (1970), 371-378.
- [4] ERDÖS, P. Some remarks on Euler's  $\varphi$ -function and some related problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), 540-544.
- [5] HALBERSTAM, H. and H.-E. RICHERT. *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.
- [6] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *A introduction to the theory of numbers*. 5th ed. Oxford Univ. Press, London (1979).
- [7] LANDAU, E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Chelsea, 3<sup>e</sup> ed. 1974.
- [8] ——— Über die zahlentheoretische Funktion  $\varphi(n)$  und ihre Bedeutung zum Goldbachschen Satz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1900), 181-184.
- [9] NICOLAS, J.-L. Distribution des valeurs de la fonction d'Euler. *L'Enseignement Math.* 30 (1984), 331-338.
- [10] SCHOENBERG, I. J. Über die asymptotische Verteilung reeler Zahlen mod 1. *Math. Z.* 28 (1928), 171-199.
- [11] SITARAMACHANDRARAO, R. On an error term of Landau. *Indian J. pure appl. Math.* 13 (1982), 882-885.

(Reçu le 10 novembre 1988)

Abdelhakim Smati

Département de Mathématiques  
 Université de Limoges  
 123, avenue Albert-Thomas  
 F-87060 Limoges Cedex (France)