

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1989)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÉNÉRALISATIONS DU PREMIER THÉORÈME DE BIEBERBACH  
SUR LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES  
**Autor:** Carrière, Yves / Dal'bo, Françoise  
**Kapitel:** 1. Dans  $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-57376>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

donner une preuve simplifiée d'un résultat de Goldman et Kamishima [GK] qui, joint à [C2] fournit le théorème de Bieberbach lorentzien: *une variété lorentzienne plate compacte est à revêtement fini près une solvariété (i.e. le quotient d'un groupe de Lie résoluble par un réseau)*. Un preprint récent de Grunewald et Margulis [GM] précise la nature des réseaux concernés prolongeant ainsi le travail de Fried [Fr2] en dimension 4. Le § 4 est un survol rapide de quelques autres généralisations.

*Convention:* Le terme « groupe de Lie » est pour nous synonyme de « groupe de Lie connexe ».

Nous tenons à remercier A. Haefliger et P. de la Harpe pour les critiques et les commentaires qu'ils ont ajoutés à ce texte.

## 1. DANS $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$

Nous allons donner une preuve et une généralisation du théorème de Bieberbach qui est élémentaire si le lecteur sait qu'un groupe linéaire nilpotent admet une décomposition de Jordan (cf. 1.2). L'idée naturelle de généralisation ici est de remplacer  $E(n) = O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$  par le groupe de toutes les transformations affines  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n) = GL(\mathbf{R}^n) \ltimes \mathbf{R}^n$ . La perte de compacité du quotient dans le produit semi-direct se retrouve dans la conclusion plus faible (mais à notre avis optimale) du théorème obtenu (1.2.1).

1.1. NILPOTENCE ET COMMUTATEURS DANS UN GROUPE DE LIE. Soit  $\Gamma$  un groupe. La suite centrale  $\Gamma^{(k)}$  dérivée de  $\Gamma$  est définie par  $\Gamma^{(0)} = \Gamma$  et la relation de récurrence  $\Gamma^{(k+1)} = [\Gamma, \Gamma^{(k)}]$  où le crochet désigne le commutateur des sous-groupes concernés de  $\Gamma$ . Le groupe  $\Gamma$  est nilpotent de degré  $d$  si la suite centrale dérivée  $\Gamma^{(k)}$  devient triviale à partir de  $k = d$ . On a le lemme suivant résultant d'une récurrence sur  $d$ :

1.1.1. LEMME. Pour que  $\Gamma$  soit nilpotent de degré  $d$ , il faut et il suffit que pour un système générateur  $\Sigma$  de  $\Gamma$  on ait

$$[\gamma_0, [\gamma_1, [\dots [\gamma_{d-1}, \gamma_d] \dots]] = e, \quad \forall \gamma_0, \dots, \gamma_d \in \Sigma.$$

Autrement dit, la nilpotence d'un groupe se lit sur l'un quelconque de ses systèmes générateurs. Considérons maintenant un groupe de Lie  $G$ . L'application commutateur:  $(x, y) \in G \times G \mapsto [x, y] \in G$  a en l'élément neutre  $(e, e) \in G \times G$  ses deux applications partielles  $x \in G \mapsto [x, e]$  et  $y \in G \mapsto [e, y]$  constantes égales à  $e$ . Par conséquent, le développement de Taylor de  $[\cdot, \cdot]$  en  $(e, e)$  n'a que des termes où  $x, y$  interviennent simultanément. D'où la

1.1.2. PROPRIÉTÉ DE CONTRACTION DES COMMUTATEURS. *Pour toute constante  $c$ ,  $0 < c < 1$ , il existe un voisinage compact  $D$  de  $e \in G$  et des coordonnées locales centrées en 0 (coordonnées de  $e$ ) telles que l'on ait*

$$\forall x, y \in D, \quad \|[x, y]\| \leq c \|x\| \cdot \|y\|$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne sur l'espace des coordonnées.

Il est clair que l'on peut supposer en plus  $[D, D] \subset D$ . On dit alors que  $D$  est un domaine de contraction des commutateurs. Le lemme suivant énoncé dans [Ra] et [W1] est attribué à Zassenhaus :

1.1.3. LEMME. *Tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$  ayant un système générateur  $\Sigma \subset D$  est nilpotent.*

Ce lemme résulte directement de ce qui précède. Il nous semble contenir la clé de toute tentative de généralisation du premier théorème de Bieberbach.

1.2. LE THÉORÈME DE BIEBERBACH DANS  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$ . Nantis de ces préliminaires, nous allons nous intéresser au cas où  $G = \text{Aff}(\mathbf{R}^n)$ . On notera  $L: \text{Aff}(\mathbf{R}^n) \rightarrow GL(\mathbf{R}^n)$  le morphisme qui à une transformation affine  $Ax + b$  associe sa partie linéaire  $A$ . Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  et  $\overline{L(\Gamma)}^\circ$  la composante connexe neutre de l'adhérence de  $L(\Gamma)$ . On notera

$$L(\Gamma)_{nd} = L(\Gamma) \cap \overline{L(\Gamma)}^\circ$$

ce que l'on pourrait appeler « la partie non discrète de  $L(\Gamma)$  » et  $\Gamma_{nd} = \Gamma \cap L^{-1}(L(\Gamma)_{nd})$  le sous-groupe de  $\Gamma$  correspondant. Remarquons qu'*a priori*, la discrétion de  $\Gamma$  n'implique pas celle de  $L(\Gamma)$ .

Un résultat de L. Auslander [Au] (cf. [R], theorem 8.24), utilisé dans l'étude des groupes affines cristallographiques ([FG], [GK] cf. 4.1), permet d'affirmer que si  $\Gamma$  est discret dans  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  alors  $L(\Gamma)_{nd}$  (et donc  $\Gamma_{nd}$ ) est résoluble. Nous allons démontrer le théorème plus précis suivant qui semble être la bonne généralisation de Bieberbach dans cette direction :

1.2.1. THÉORÈME. *Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret dans  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  alors  $\Gamma_{nd}$  est nilpotent (de type fini d'après 2.1.4). Si de plus  $\Gamma$  est cristallographique (i.e.  $M = \mathbf{R}^n/\Gamma$  est une variété compacte) alors  $\Gamma_{nd}$  est unipotent (i.e.  $L(\Gamma)_{nd}$  est unipotent).*

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, rappelons un résultat sur les représentations affines nilpotentes. On voit d'abord  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  comme sous-groupe algébrique via le plongement habituel  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n) \rightarrow GL(\mathbf{R}^{n+1})$  qui à

la transformation affine  $Ax + b$  associe la matrice  $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(\mathbf{R}^{n+1})$ .

Soit  $N$  un sous-groupe nilpotent de  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  et  $N'$  son adhérence dans  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  pour la topologie de Zariski. La composante neutre  $N'_0$  est un groupe de Lie nilpotent connexe d'indice fini dans  $N'$ . Le groupe  $N_0 = N \cap N'_0$  est aussi d'indice fini dans  $N$  et on a (cf. theorem 1.7 de [FGH]):

1.2.2. PROPOSITION. *Il existe un unique sous-espace affine  $U$  invariant par  $N_0$  et maximal parmi les sous-espaces sur lesquels  $N_0$  est unipotent. Ce sous-espace (l'« axe » de  $N$ ) est invariant par le normalisateur de  $N$ .*

*Démonstration.* Un sous-groupe de  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  peut être vu comme sous-groupe de  $GL(\mathbf{R}^{n+1})$  stabilisant la forme linéaire donnée par la dernière coordonnée  $x_{n+1}$ . Considérons donc le sous-groupe de Lie connexe nilpotent  $N'_0$  dans  $GL(\mathbf{R}^{n+1})$ . D'après ([Bo], theorem 10.6),  $N'_0$  admet une décomposition de Jordan,  $\mathbf{R}^{n+1}$  se décompose donc en somme directe d'un sous-espace unipotent stable maximal  $V_1$  et d'un autre sous-espace invariant  $V_2$ . Le fait que  $N'_0$  provienne de  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  assure que  $V_1$  n'est pas trivial. Nécessairement  $V_2$  ne coupe pas l'espace affine  $x_{n+1} = 1$  car sinon l'action de  $N'_0$  en restriction à l'intersection fournirait un espace unipotent, ce qui contredirait la maximalité de  $V_1$ . On en déduit que  $U = V_1 \cap (x_{n+1} = 1)$  est non vide. Le normalisateur de  $N$  normalise aussi  $N'_0$  et donc stabilise  $U$ .  $\square$

Dans le cas où  $\Gamma$  est dans  $E(n)$ , c'est-à-dire où  $L(\Gamma) \subset O(n)$ , alors  $\overline{L(\Gamma)}$  est compact et donc n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Par conséquent,  $\overline{L(\Gamma)}^\circ$  est d'indice fini dans  $\overline{L(\Gamma)}$ , ce qui prouve que  $\Gamma_{nd}$  a un indice fini dans  $\Gamma$ . D'après 1.2.1,  $\Gamma_{nd}$  est nilpotent. L'énoncé de Bieberbach suit alors du lemme suivant appliqué à  $N = \Gamma_{nd}$ :

1.2.3. LEMME. *Tout sous-groupe nilpotent  $N$  de  $E(n)$  contient un sous-groupe d'indice fini  $N_0$  abélien. Si de plus  $N$  est un groupe cristallographique, alors  $N_0$  est engendré par  $n$  translations linéairement indépendantes.*

*Démonstration.* Reprenons la conclusion de la proposition précédente dans le cas où  $N \subset E(n)$ . L'action de  $N_0$  sur l'axe  $U$  est par translations pures, donc abélienne. Celle dans la direction normale à  $U$  (i.e. dans  $V_2$ ) est linéaire, triangulable et orthogonale donc diagonalisable (complexe). Ceci garantit déjà que  $N_0$  est abélien. On remarque de plus que si  $U$  est de dimension  $< n$ , la fonction continue sur  $\mathbf{R}^n$  donnée par la distance

(euclidienne) au sous-espace invariant  $U$  fournit une fonction invariante par  $N_0$  et sans maximum local. Dans le cas où  $N$  est cristallographique,  $N_0$  l'est aussi, et donc, le fait que  $U = \mathbf{R}^n$  (i.e.  $N_0$  est un groupe de translations pures) est assuré par la compacité de la variété  $M = \mathbf{R}^n/N_0$ . Pour finir, toujours dans ce cas, le même raisonnement appliqué à la fonction distance au sous-espace vectoriel  $V$  engendré par les vecteurs de translation de  $N_0$  montre que  $V = \mathbf{R}^n$ .  $\square$

1.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Elle se réduit essentiellement au lemme suivant qui tient à l'existence des dilatations que sont les homothéties en géométrie affine :

1.3.1. LEMME. Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$ , tout sous-groupe de type fini de  $\Gamma_{nd}$  est nilpotent.

*Démonstration.* Fixons pour commencer un domaine de contraction des commutateurs  $D$  du groupe de Lie  $G = \text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  (cf. 1.1.2). Pour qu'un élément  $Ax + b$  de  $\text{Aff}(\mathbf{R}^n)$  soit dans  $D$ , il suffit d'avoir  $A \in D_1 \subset GL(\mathbf{R}^n)$  et  $b \in D_2 \subset \mathbf{R}^n$  où  $D_1$  et  $D_2$  sont respectivement des voisinages de l'identité et de zéro, choisis suffisamment petits et à leur tour fixés pour la suite.

Le groupe  $L(\Gamma)_{nd} = L(\Gamma) \cap \overline{L(\Gamma)}^\circ$ , par sa définition même, admet des systèmes générateurs aussi proches de l'identité que l'on veut. Ainsi, on est assuré que tout sous-groupe de type fini de  $\Gamma_{nd}$  est inclus dans un sous-groupe dont les générateurs  $A_1x + b_1, \dots, A_sx + b_s$  ont leurs parties linéaires  $A_i, i = 1, \dots, s$  dans  $D_1$ .

Il suffit donc de prouver qu'un tel groupe est forcément nilpotent. Pour ceci, écrivons son conjugué par l'homothétie de rapport  $\lambda$  :

$$\langle A_1x + \lambda b_1, \dots, A_sx + \lambda b_s \rangle \subset \lambda \Gamma_{nd} \lambda^{-1}$$

et choisissons  $\lambda$  assez petit de façon que  $\lambda b_i \in D_2$  pour  $i = 1, \dots, s$ . Ce groupe, continûment isomorphe au précédent, est lui aussi discret et de plus possède un système générateur dans le domaine de contraction des commutateurs  $D$  fixé au début de la preuve. D'après le lemme 1.1.3, il est nilpotent.  $\square$

On conclut que  $\Gamma_{nd}$  est nilpotent grâce au petit lemme suivant :

1.3.2. LEMME. Un sous-groupe discret  $G$  de  $GL(\mathbf{C}^m)$  localement nilpotent (i.e. tous les sous-groupes de type fini de  $G$  sont nilpotents) est nilpotent.

*Démonstration.* D'après ([KM], exercice 21.1.6), un groupe de matrices localement résoluble est résoluble (cf. aussi [Ra], § 8). Le groupe  $G$  est donc résoluble. Grâce au théorème 2.1.4, énoncé au § suivant,  $G$  étant discret dans un groupe de Lie, il est polycyclique (i.e. tous ses sous-groupes sont de type fini). Par conséquent,  $G$  est de type fini, il est donc nilpotent.  $\square$

Remarquons que le lemme 1.2.3 permet d'affirmer alors que  $\Gamma_{nd}$  est abélien dans le cas classique (i.e.  $\Gamma \subset E(n)$ ). Pour terminer la preuve de 1.2.1 dans le cas général, il reste à montrer l'unipotence de  $\Gamma_{nd}$  lorsque  $\Gamma$  est un groupe cristallographique (i.e.  $\mathbf{R}^n/\Gamma$  est une variété compacte). Dans ce cas, on considère le sous-espace affine maximal  $U$  sur lequel l'action de  $\Gamma_{nd}$  est unipotente (cf. 1.2.2). Cet espace est invariant par  $\Gamma$ . On considère alors la variété  $U/\Gamma$  qui a même type d'homotopie que la  $n$ -variété compacte  $\mathbf{R}^n/\Gamma$ . Ceci force  $U$  à être de dimension  $n$  et donc  $\Gamma_{nd}$  à être unipotent (argument cohomologique de [FGH] p. 496 que l'on retrouvera en 3.3.1).  $\square$

## 2. DANS D'AUTRES GROUPES DE LIE

L'objet de ce § est de décrire une autre approche moins élémentaire du premier théorème de Bieberbach mettant en jeu les notions de moyennabilité et de croissance qui lui sont aujourd'hui indissociablement liées. L'idée de départ maintenant est de considérer  $E(n)$  comme faisant partie de la classe  $\mathcal{P}$  des groupes de Lie à croissance polynomiale, elle-même incluse dans celle  $\mathcal{M}$  des moyennables. Le résultat s'énonce simplement de la façon suivante (2.1.4, 2.2.3): si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret dans un groupe de Lie  $G \in \mathcal{M}$  (resp.  $G \in \mathcal{P}$ ) alors  $\Gamma$  est virtuellement polycyclique (resp. virtuellement nilpotent de type fini). Par ailleurs, les classes  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{P}$  sont caractérisées ainsi (2.1.3, 2.2.4):  $G \in \mathcal{M}$  (resp.  $G \in \mathcal{P}$ ) équivaut à  $G = K \rtimes R$  où  $K$  est compact et  $R$  est résoluble (resp. résoluble avec une algèbre de Lie triangulaire avec des éléments diagonaux imaginaires purs). Ces énoncés vont nous être utiles au § 3. Nous verrons au § 4 comment ils peuvent encore être généralisés.

**2.1. MOYENNABILITÉ ET RÉSOLUBILITÉ.** Soit  $G$  un groupe topologique localement compact muni de sa  $\sigma$ -algèbre borélienne  $\mathcal{B}$ . Une *moyenne* sur l'espace mesurable  $(G, \mathcal{B})$  est une mesure de probabilité, nulle sur les *négligeables* (pour une mesure de Haar de  $G$ ) et seulement supposée *finiment additive*. On dit que le groupe  $G$  est *moyennable* s'il admet une moyenne invariante à gauche. Il est facile de vérifier alors qu'elle peut être choisie biinvariante (cf. [Gre] p. 29). Par exemple, l'unique mesure de Haar d'un groupe compact  $K$  qui soit de probabilité fournit une moyenne biinvariante