

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1989)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES NON RÉSOLUS EN GÉOMÉTRIE PLANE
Autor: de la Harpe, P.
Kapitel: 3. Applications
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-57375>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

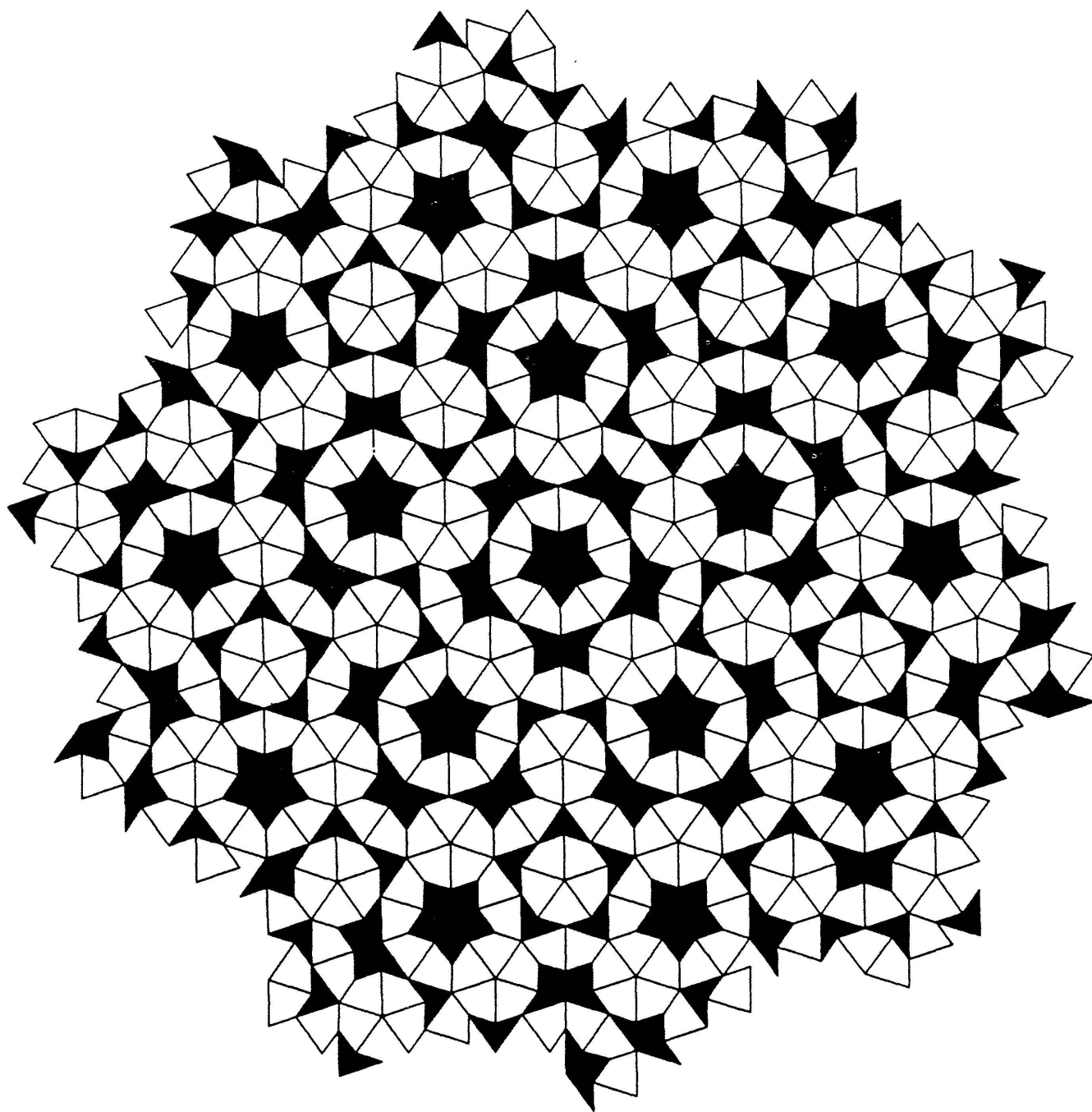
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>



3. APPLICATIONS

L'intérêt des problèmes de pavage dépasse très largement le cadre de la géométrie plane. C'est par exemple des travaux de *logique mathématique* qui, en 1961, ont conduit H. Wang à poser un problème du type de ceux discutés au § 2 :

On demande si la première question du § 2 est *décidable*, dans le sens technique de ce terme utilisé par Robinson. En d'autres termes on demande s'il existe un programme d'ordinateur qui, étant donné une famille P_1, \dots, P_k de polygones plans, indique si oui ou non cette famille pave le plan.

La notion de « programme » est à prendre ici dans un sens très général et théorique, en référence à un ordinateur sans aucune limitation de mémoire ou de rapidité. (Pour une introduction mathématique à ces problèmes d'indécidabilité, voir par exemple le remarquable article de Davis.¹⁾

Le problème de Wang s'est révélé être équivalent à celui de l'existence d'une famille P_1, \dots, P_k permettant de paver le plan, mais forcément de manière non périodique.

Et la réponse est donc négative: il existe des familles permettant de paver le plan, mais de manière forcément non périodique; de sorte que le problème de savoir, en général, si une famille pave est *a priori insoluble par ordinateur* (travaux de Berger et Robinson déjà cités).

De même, la question de savoir si une famille de polyominos (voir la fin du § 1) pave le plan est indécidable, c'est-à-dire insoluble par ordinateur (Golomb).

Mais c'est au domaine bien différent de la *physique des métaux* que le sujet de cette note doit une actualité inattendue, et illustre ainsi les rebondissements caractéristiques de la recherche abstraite. Une goutte d'aluminium et de manganèse en proportions convenables se refroidit très brusquement en tombant sur un disque de cuivre à basse température et en rotation rapide. (La rotation a pour effet d'étaler la goutte, et le cuivre, bon conducteur de la chaleur, de la refroidir.) On peut observer le matériau résultant avec un dispositif à rayons X ou un microscope électronique. Et l'un des dogmes les mieux établis de toute la cristallographie s'écroule: le dogme veut qu'une symétrie de rotation des figures observées corresponde toujours à une rotation de

$1/2$ tour, ou $1/3$ tour, ou $1/4$ tour, ou $1/6$ tour.

Or l'expérience avec l'alliage Al-Mn obtenu montre une symétrie de

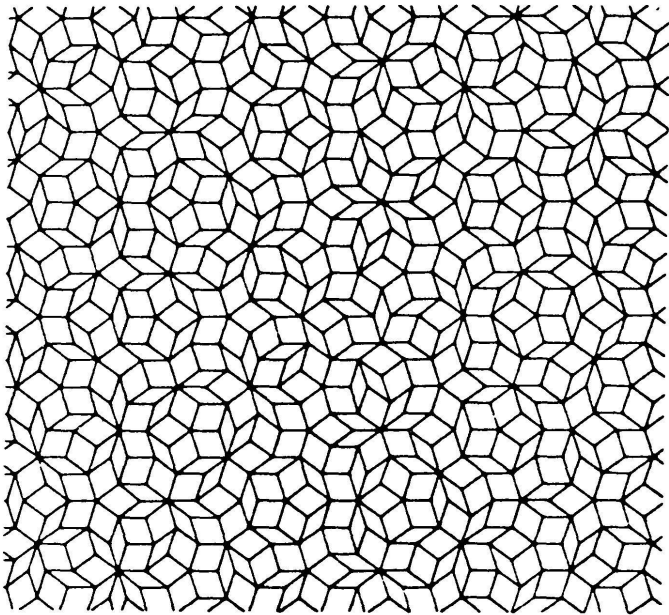
$1/5$ tour !!!

(Schechtman *et al.*, 1984). On a observé depuis d'autres alliages Ni-Cr avec des symétries de $1/12$ tour.

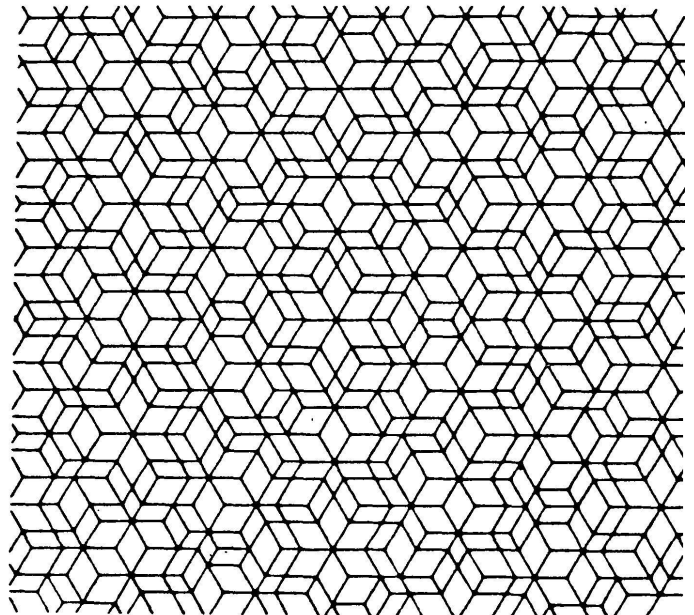
La géométrie de l'arrangement des atomes dans ces alliages hérétiques n'est pas encore connue. Mais l'hypothèse la plus plausible semble être celle

¹⁾ La question originale de Wang est moins ambitieuse, car les briques modèles P_1, \dots, P_k sont astreintes à être de forme très particulière: des carrés, tous de même taille, avec diverses saillies et encoches (ou couleurs) sur les côtés. De plus, on impose aux sommets des « carrés » des pavages de constituer un quadrillage régulier du plan. Berger, puis Robinson, montrent que cette question originale est indécidable.

d'un arrangement quasi-périodique dont certaines sections planes reproduisent des pavages de Penrose tels que les deux suivants, repris de Duneau et Katz, 1985. Ce sont des pavages distincts de ceux décrits plus haut, avec respectivement 2 et 3 modèles de briques, où certaines juxtapositions sont exclues par des règles semblables à « les sommets du type T ne se sont pas accolés à des sommets du type H ». Mais ce sont surtout des pavages qui possèdent les propriétés (i) à (iii) énoncées à la fin du § 2.



A. Une section du pavage de dimension trois orthogonale à un axe d'ordre cinq : pavage de Penrose généralisé.

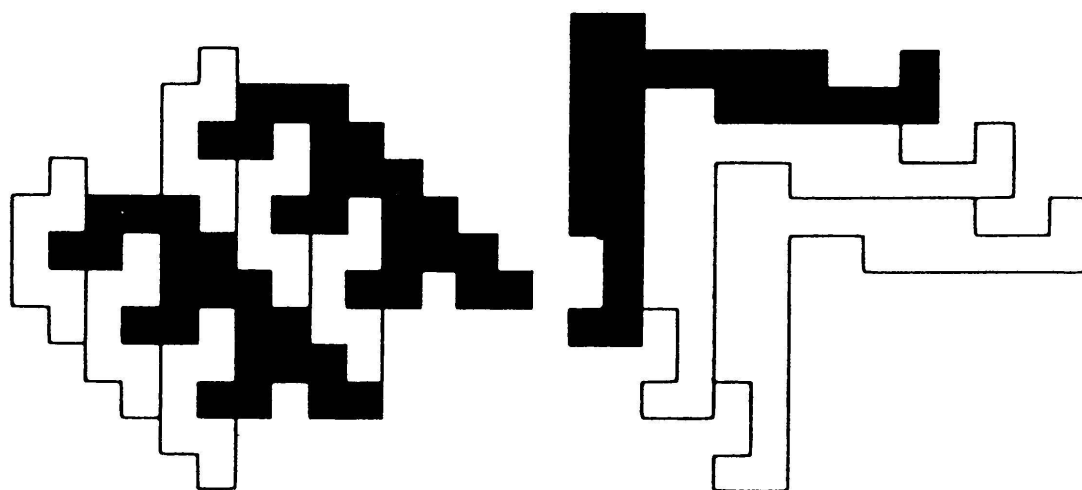


B. Une section du pavage de dimension trois orthogonale à un axe d'ordre trois.

Le lecteur peut observer que la première figure possède des symétries pentagonales *locales*, dont l'abondance est manifeste à l'œil nu.

*
* * *

L'étude des pavages est donc d'intérêt physique aussi bien que géométrique, logique ou calculatoire. Il serait bien appauvrissant d'en négliger un quelconque aspect.



Je remercie mes collègues J. P. Eckmann, T. Vust et G. Wanner (Genève), ainsi que N. A'Campo (Bâle) et F. Rothen (Lausanne), pour d'utiles conversations pendant la préparation de ce texte.

RÉFÉRENCES

- [1] BERGER, R. *The undecidability of the domino problem*. Mem. Amer. Math. Soc. 66 (1966).
- [2] DAVIS, M. Hilbert's tenth problem is unsolvable. *Amer. Monthly* 80-3 (1973), 233-269.
- [3] DUNEAU, M. and A. KATZ. Quasiperiodic patterns. *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985), 2688-2691. Voir aussi: Paver l'espace: un jeu mathématique pour les physiciens, *La Recherche* 167 (juin 1985), 816-819.
- [4] GARDNER, M. More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds and polyhexes. *Sci. Amer.* 233 (août et sept. 1975), 112-115 et 180. Voir aussi: On tessellating the plane with convex polygon tiles, *Sci. Amer.* 233 (juillet 1975), 112-117, ainsi que: SCHATTSCHNEIDER, D. Will it tile? try the Conway criterion!, *Math. Mag.* 53-4 (1980), 224-233.
- [5] GOLOMB, S. W. Tiling with sets of polyominoes. *J. Combinatorial Theory* 9 (1970), 60-71. Voir aussi: Tiling with polyominoes, *ibid.* 1 (1966), 280-296.
- [6] GRÜNBAUM, B. and G. C. SHEPHARD. Some problems on plane tilings, in *The mathematical Gardner*, édité par D. A. Klarner, Wadsworth intern. (1981), 140-166. Voir aussi: Tiling with congruent tiles, *Bull. Amer. Math. Soc.* 3 (1980), 951-973.
- [7] KERSHNER, R. B. On paving the plane. *Amer. Monthly* 75-8 (1968), 839-844.
- [8] LOCHER, J. L. et al. *Le monde de M. C. Escher*. Ed. du Chêne, Paris 1972.
- [9] NIVEN, I. Convex polygons that cannot tile the plane. *Amer. Monthly* 85-10 (1978), 785-792.