

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1989)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** AN ALGEBRAIC PROOF OF VAN DER WAERDEN'S THEOREM  
**Autor:** Bergelson, Vitaly / Furstenberg, Hillel / Hindman, Neil / Katznelson, Yitzhak

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-57373>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Proof.* By Lemma 2.4  $M(\beta\mathbf{N}) \neq \emptyset$  so pick  $p \in M(\beta\mathbf{N})$  and let  $\mathbf{p} = (p, p, \dots, p)$ . By Lemma 1.2 pick  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  such that  $cl A_i$  is a neighborhood of  $p$  and let  $U = cl A_i$ . Then  $U \times U \times \dots \times U$  is a neighborhood of  $\mathbf{p}$  while, by Theorem 2.3,  $\mathbf{p} \in I = cl I^*$ . Pick  $a, d \in \mathbf{N}$  with  $(a, a+d, a+2d, \dots, a+(l-1)d) \in U \times U \times \dots \times U$ . Then

$$\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(l-1)d\} \subseteq U \cap \mathbf{N} = (cl A_i) \cap \mathbf{N} = A_i. \quad \square$$

We remark that if one starts with the free semigroup on  $l$  letters in place of  $\mathbf{N}$ , essentially the same proof yields the Hales-Jewett Theorem. See [3] for the details.

## REFERENCES

- [1] BERGLUND, J., H. JUNGHEHN and P. MILNES. *Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity*. Lecture Notes in Math. 663, Springer-Verlag, Berlin (1978).
- [2] ELLIS, R. *Lectures on Topological Dynamics*. Benjamin, New York, 1969.
- [3] FURSTENBERG, H. and Y. KATZNELSON. Idempotents and coloring theorems. *To appear*.
- [4] FURSTENBERG, H. and B. WEISS. Topological dynamics and combinatorial number theory. *J. d'Analyse Math.* 34 (1978), 61-85.
- [5] GRAHAM, R. and B. ROTHSCILD. A short proof of van der Waerden's Theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 42 (1974), 385-386.
- [6] HINDMAN, N. Ultrafilters and Ramsey Theory — an update. *Proceedings of "Set Theory and its Applications — Conference at York"*. To appear.
- [7] SHELAH, S. Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers. *J. Amer. Math. Soc.* 1 (1989), 683-697.
- [8] TAYLOR, A. A note on van der Waerden's Theorem. *J. Comb. Theory (Series A)* 33 (1982), 215-219.
- [9] VAN DER WAERDEN, B. Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw Arch. Wisk* (3) 19 (1927), 212-216.

(Reçu le 14 juin 1989)

Vitaly Bergelson

Department of Mathematics  
Ohio State University  
Columbus, OH 43210  
(USA)

Hillel Furstenberg

Department of Mathematics  
Hebrew University  
Jerusalem (Israel)

Neil Hindman

Department of Mathematics  
Howard University  
Washington, DC 20059  
(USA)

Yitzhak Katznelson

Department of Mathematics  
Stanford University  
Stanford, CA 94305  
(USA)

**vide-leer-empty**