Donc $\omega'(u)$ est une dérivation de G dans A. On vérifie immédiatement que $\omega'\omega = 1_{\mathrm{Der}(G\,;\,A)}$ et que $\omega\omega' = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;\,A)}$.

2.6. On rappelle que $h(G\,;A)$ désigne le groupe abélien des classes de A-conjugaison des sections de l'extension de groupes donnée par le produit semi-direct $A \times G$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$F: h(G\,;A) \to \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}.$$

Démonstration. Il résulte de 1.9 qu'à toute section $\sigma: G \to A \times G$ on peut associer une application $f_\sigma: G \to A$ telle que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma(g) = \big(f_\sigma(g)\,;g\big)$. Compte tenu de la loi de multiplication du produit semi-direct et du fait que σ est un morphisme de groupes, on vérifie que $f_\sigma \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$.

Si σ' est une section A-conjuguée à σ, il existe un élément $a \in A$ tel que $\sigma'(g) = \iota(a)\sigma(g)\iota(a)^{-1}$; on en déduit que $\big(f_{\sigma'}(g)\,;g\big) = \big(a+f_\sigma(g)-g\cdot a\,;g\big)$ donc que $f_\sigma - f_{\sigma'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

On définit alors l'application F en posant $F([\sigma]) = [f_\sigma]$, où $[f_\sigma]$ désigne la classe de f_σ dans le groupe quotient $\dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$.

Il est immédiat de vérifier que F est un morphisme de groupes et que F est bijective.

3. LE GROUPE $H^1(G\,;A)$

3.1. Soit G un groupe. Comme d'habitude on munit $\mathbf{Z}$ de sa structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche trivial. De plus soit A un $\mathbf{Z}G$-module à gauche; on considère A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement sur la droite de A.

On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi: \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)\,.$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G\,;A)$ et de la proposition 2.6, on obtient alors le résultat classique suivant.

3.2. THÉORÈME. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^1(G;A) = h(G;A).$$

3.3. Pour construire l'application Φ on commence par considérer l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\theta : 0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0.$$

Soit $[f] \in \dfrac{\operatorname{Der}(G;A)}{\operatorname{Int}(G;A)}$ représentée par une dérivation $f \in \operatorname{Der}(G;A)$; d'après la proposition 2.5 on peut associer à f un morphisme $\tilde{f} = \omega(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG;A)$.

En faisant le produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ on obtient l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\tilde{f}\theta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \to 0.$$

Le $\mathbf{Z}G$-module F est le quotient de $\mathbf{Z}G \times A$ par le sous-module engendré par l'ensemble $\{(i(x); -\tilde{f}(x)) \mid x \in IG\}$. Si $\pi : \mathbf{Z}G \times A \to F$ est la projection canonique, les morphismes α et β sont définis en posant $\alpha(a) = \pi(0;a)$ et $\beta\pi(x;a) = \varepsilon(x)$.

Si $f' \in \operatorname{Der}(G;A)$ est un autre représentant de $[f]$ on lui associe de la même façon l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\tilde{f}'\theta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z} \to 0.$$

3.4. LEMME. *Les extensions* $\tilde{f}\theta$ *et* $\tilde{f}'\theta$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\delta : F \to F'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\
0 & \to & A & \underset{\alpha'}{\to} & F' & \underset{\beta'}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0
\end{array}$$

soit commutatif.

Par hypothèse il existe $b \in A$ tel que $f' - f = f_b$ où $f_b \in \operatorname{Int}(G;A)$.

On définit alors un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\Delta : \mathbf{Z}G \times A \to \mathbf{Z}G \times A$$

en posant $\Delta(x;a) = (x; a - x \cdot b)$.

Si $x \in IG$ on peut écrire $x = \sum_{g \in G} n_g(g-1)$ si bien qu'en utilisant la proposition 2.5 on a

$$\begin{aligned} x \cdot b &= \sum_{g \in G} n_g(g \cdot b - b) = \sum_{g \in G} n_g f_b(g) = \sum_{g \in G} n_g \tilde{f}_b(g-1) \\ &= \tilde{f}_b\Big(\sum_{g \in G} n_g(g-1)\Big) = \tilde{f}_b(x)\,. \end{aligned}$$

On a donc $\Delta(x\,; -\tilde{f}(x)) = (x\,; -\tilde{f}(x) - \tilde{f}_b(x)) = (x\,; -\tilde{f}'(x))$ et on définit δ par la condition $\pi'\Delta = \delta\pi$.

On vérifie immédiatement que $\delta\alpha = \alpha'$ et $\beta'\delta = \beta$.

3.5. L'application Φ est alors donnée en posant $\Phi([f]) = [\tilde{f}\theta]$.

3.6. On construit maintenant une application

$$\Psi : \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,; A) \to \frac{\operatorname{Der}(G\,; A)}{\operatorname{Int}(G\,; A)}\,.$$

Soit $[\xi] \in \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,; A)$ représentée par une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

Choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$ et considérons la dérivation $f_e \in \operatorname{Int}(G\,; E)$.

Comme on a $\mu f_e = 0$ on peut définir une application $f^e : G \to A$ par la condition $\lambda f^e = f_e$.

3.7. Lemme. *$f^e \in \operatorname{Der}(G\,; A)$ et $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e.*

Démonstration. Pour tous $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned} \lambda f^e(gh) &= (gh) \cdot e - e = g \cdot (h \cdot e - e) + g \cdot e - e \\ &= g \cdot \lambda f^e(h) + \lambda f^e(g) \\ &= \lambda(g \cdot f^e(h) + f^e(g))\,. \end{aligned}$$

Comme λ est injectif il en résulte que $f^e \in \operatorname{Der}(G\,; A)$. Soit $e' \in E$ tel que $\mu(e') = 1$; puisque $\mu(e-e') = 0$ il existe $b \in A$ tel que $\lambda(b) = e - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \operatorname{Int}(G\,; A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\begin{aligned} \lambda(f^e - f^{e'})(g) &= (g \cdot e - e) - (g \cdot e' - e') \\ &= g \cdot \lambda(b) - \lambda(b) \\ &= \lambda(g \cdot b - b) = \lambda f_b(g)\,. \end{aligned}$$

Ainsi $f^e - f^{e'} \in \operatorname{Int}(G\,; A)$ et par suite $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e.

3.8. Supposons maintenant que l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi' : 0 \to A \overset{\lambda'}{\to} E' \overset{\mu'}{\to} \mathbf{Z} \to 0$$

est un autre représentant de $[\xi]$.

En choisissant un élément $e' \in E'$ tel que $\mu'(e') = 1$ on définit une dérivation $f^{e'} \in \operatorname{Der}(G; A)$.

3.9. LEMME. $f^e - f^{e'} \in \operatorname{Int}(G; A)$.

Démonstration. Les extensions ξ et ξ' étant équivalentes, il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\gamma : E \to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \overset{\lambda}{\to} & E & \overset{\mu}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathbf{Z}}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\lambda'}{\to} & E' & \underset{\mu'}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme $\mu'(\gamma(e) - e') = 0$, il existe $b \in A$ tel que $\lambda'(b) = \gamma(e) - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \operatorname{Int}(G; A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\begin{aligned} \gamma\lambda(f^e - f^{e'})(g) &= \gamma\lambda f^e(g) - \lambda' f^{e'}(g) \\ &= \gamma(g \cdot e - e) - (g \cdot e' - e') \\ &= g \cdot (\gamma(e) - e') - (\gamma(e) - e') \\ &= \lambda'(g \cdot b - b) \\ &= \gamma\lambda f_b(g) . \end{aligned}$$

Comme γ est un isomorphisme et λ est injectif il en résulte que $f^e - f^{e'} \in \operatorname{Int}(G; A)$.

3.10. On peut donc définir l'application Ψ en posant $\Psi([\xi]) = [f^e]$, et il faut vérifier que Ψ est la réciproque de Φ.

3.11. LEMME. $\Psi\Phi = 1_{\frac{\operatorname{Der}(G; A)}{\operatorname{Int}(G; A)}}$.

Démonstration. Si $[f] \in \dfrac{\operatorname{Der}(G; A)}{\operatorname{Int}(G; A)}$ est représentée par $f \in \operatorname{Der}(G; A)$ alors $\Psi\Phi([f]) = \Psi([\tilde{f}\theta])$ où $\tilde{f}\theta$ est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \overset{\alpha}{\to} F \overset{\beta}{\to} \mathbf{Z} \to 0$$

décrite au n° 3.3.

Par définition du produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\gamma: \mathbf{Z}G \to F$, défini par $\gamma(x) = \pi(x;0)$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & IG & \xrightarrow{i} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & \tilde{f}\downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & F & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

L'élément $e = \pi(1;0) \in F$ vérifie la condition $\beta(e) = 1$; donc $\Psi([\tilde{f}\theta])$ est représentée par la dérivation $f^e \in \operatorname{Der}(G;A)$ telle que, pour tout $g \in G$, on ait $\alpha f^e(g) = g \cdot e - e = \pi(g-1;0)$.

Or on a $f^e = f$; en effet, compte tenu de la proposition 2.5 on a, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \alpha(f^e - f)(g) &= \alpha f^e(g) - \alpha\tilde{f}(g-1) \\ &= \alpha f^e(g) - \gamma(g-1) \\ &= \pi(g-1;0) - \pi(g-1;0) = 0\,. \end{aligned}$$

3.12. Lemme. $\Phi\Psi = 1_{\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A)}$.

Démonstration. Soit $[\xi] \in \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A)$ représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi: 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \to 0$$

et choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$; on a alors $\Phi\Psi([\xi]) = [\tilde{f^e}\theta]$.

Il s'agit donc de démontrer que les extensions ξ et $\tilde{f}^e\theta$ sont équivalentes; pour cela il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\delta: E \to F$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A\downarrow & & \delta\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & F & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Si $u \in E$ on a $\mu(u - \mu(u)e) = 0$; on peut donc définir un morphisme de groupes abéliens $\upsilon: E \to A$ tel que $\lambda\upsilon(u) = u - \mu(u)e$ pour tout $u \in E$.

Définissons alors δ en posant $\delta(u) = \pi(\mu(u);\upsilon(u))$. Il faut vérifier que δ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules; or si $g \in G$ et $u \in E$ on a

$$g \cdot \delta(u) - \delta(g \cdot u) = \pi(\mu(u)(g-1); g \cdot \upsilon(u) - \upsilon(g \cdot u))\,.$$

Mais

$$\begin{aligned}\lambda(g\cdot\upsilon(u)-\upsilon(g\cdot u)) &= g\cdot(u-\mu(u)e)-(g\cdot u-\mu(u)e)\\ &= -\ \mu(u)\,(g\cdot e-e)\\ &= -\ \mu(u)\lambda f^{e}(g)\\ &= \lambda(-\mu(u)\tilde{f}^{e}(g-1))\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que $g\cdot\delta(u)-\delta(g\cdot u)=0$.

Finalement on vérifie immédiatement que $\delta\lambda=\alpha$ et $\beta\delta=\mu$.

3.13. Il reste à montrer que l'application Ψ est un morphisme de groupes abéliens.

Soit $[\xi_i]\in\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A)$ $(i=1,2)$ représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi_i : 0 \to A \overset{\lambda_i}{\to} E_i \overset{\mu_i}{\to} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

On choisit un élément $e_i\in E_i$ tel que $\mu_i(e_i)=1$ et on considère la dérivation $f^{e_i}\in\mathrm{Der}\,(G;A)$ définie par $\lambda_i f^{e_i}(g)=g\cdot e_i-e_i$.

On a alors $\Psi([\xi_1])+\Psi([\xi_2])=[f^{e_1}]+[f^{e_2}]=[f^{e_1}+f^{e_2}]$.

Maintenant $[\xi_1]+[\xi_2]$ est représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules $\xi_0=\nabla(\xi_1\oplus\xi_2)\Delta$ et on a le diagramme commutatif suivant

(3.13.1)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A\oplus A & \overset{\lambda_1\oplus\lambda_2}{\to} & E_1\oplus E_2 & \overset{\mu_1\oplus\mu_2}{\to} & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} & \to & 0\\
 & & \nabla\downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}} & & \\
0 & \to & A & \underset{\lambda}{\to} & E & \underset{\mu}{\to} & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} & \to & 0\\
 & & 1_A\uparrow & & \delta\uparrow & & \uparrow\Delta & & \\
0 & \to & A & \underset{\lambda_0}{\to} & E_0 & \underset{\mu_0}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0\,.
\end{array}$$

On choisit un élément $e_0\in E_0$ tel que $\mu_0(e_0)=1$ et on considère la dérivation $f^{e_0}\in\mathrm{Der}\,(G;A)$ définie par $\lambda_0 f^{e_0}(g)=g\cdot e_0-e_0$.

On a alors $\Psi([\xi_1]+[\xi_2])=[f^{e_0}]$.

3.14. Lemme. $f^{e_1}+f^{e_2}-f^{e_0}\in\mathrm{Int}\,(G;A)$.

Démonstration. Comme $\mu(\gamma(e_1;e_2)-\delta(e_0))=0$, il existe un élément $a\in A$ tel que $\lambda(a)=\gamma(e_1;e_2)-\delta(e_0)$. Considérons la dérivation $f_a\in\mathrm{Int}\,(G;A)$. Pour tout $g\in G$ on a, compte tenu du diagramme (3.13.1),

$$\lambda(f^{e_1}(g)+f^{e_2}(g)-f^{e_0}(g)-f_a(g))=0\,.$$