Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES
Autor: Grivel, Pierre-Paul
Kapitel: 2. DÉRIVATIONS ET EXTENSIONS
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56590

L'ensemble $e(G;A)$ n'est pas vide car il contient la classe d'équivalence de l'extension

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} A \times G \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

donnée par le produit semi-direct.

1.8. Muni de la somme de Baer l'ensemble $e(G;A)$ a une structure de groupe abélien.

1.9. L'extension donnée par le produit semi-direct est scindée. Si $\sigma: G \to A \times G$ est une section de π on a nécessairement $\sigma(g) = \big(f_\sigma(g); g\big)$ où $f_\sigma(g) \in A$. Soit σ_1 et σ_2 deux sections de π; on dit que σ_1 est A-conjuguée à σ_2 s'il existe un élément $a \in A$ tel que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma_1(g) = \iota(a)\sigma_2(g)\iota(a)^{-1}$. On notera $[\sigma]$ la classe de A-conjugaison de la section σ et on désignera par $h(G;A)$ l'ensemble des classes de A-conjugaison des sections de π.

1.10. Si σ_1 et σ_2 sont deux sections de π on définit la section $\sigma_1 + \sigma_2$ en posant $(\sigma_1 + \sigma_2)(g) = \big(f_{\sigma_1}(g) + f_{\sigma_2}(g); g\big)$. Cette opération induit sur $h(G;A)$ une structure de groupe abélien.

2. Dérivations et extensions

2.1. Soit G un groupe. L'anneau de groupe $\mathbf{Z}G$ est muni d'une augmentation $\varepsilon: \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ donnée par $\varepsilon(\sum_{g\in G} n_g\, g) = \sum_{g\in G} n_g$. Si on considère $\mathbf{Z}$ avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial à gauche, ε est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-module et on obtient une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

où l'idéal d'augmentation IG est engendré, comme $\mathbf{Z}$-module, par l'ensemble $\{g - 1 \mid g \in G\backslash\{1\}\}$.

2.2. Soit A un $\mathbf{Z}G$-bimodule.

Une dérivation de G dans A est une application $f: G \to A$ telle que, pour tout $g, h \in G$, on ait $f(gh) = f(g)\cdot h + g \cdot f(h)$.

L'ensemble des dérivations de G dans A forme un groupe abélien noté $\mathrm{Der}(G;A)$.

Pour tout $a \in A$, l'application $f_a: G \to A$ définie par $f_a(g) = g\cdot a - a \cdot g$ est une dérivation, appelée dérivation intérieure de G dans A.

L'ensemble des dérivations intérieures de G dans A forme un sous-groupe de $\mathrm{Der}\,(G;A)$ noté $\mathrm{Int}\,(G;A)$.

2.3. On suppose dorénavant que le groupe G agit à gauche sur le groupe abélien A.

On considère alors A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement à droite sur A. Une dérivation de G dans A est donc une application $f: G \to A$ qui satisfait la condition $f(gh) = g \cdot f(h) + f(g)$. On en déduit que $f(1) = 0$.

De plus, pour tout $a \in A$, la dérivation intérieure $f_a: G \to A$ est définie par $f_a(g) = g \cdot a - a$.

2.4. Lemme. *Le groupe* $\mathrm{Der}\,(G;A)$ *est isomorphe au sous-groupe de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G;A)$ *formé des morphismes de groupes abéliens* $\bar{f}: \mathbf{Z}G \to A$ *qui satisfont la condition* $\bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbf{Z}G$.

Démonstration. Si $f \in \mathrm{Der}\,(G;A)$ et $x = \sum_{g \in G} n_g g \in \mathbf{Z}G$ on définit $\bar{f}: \mathbf{Z}G \to A$ en posant $\bar{f}(x) = \sum_{g \in G} n_g f(g)$. Inversément si $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G;A)$ satisfait la condition de l'énoncé et si $j: G \to \mathbf{Z}G$ est l'inclusion évidente, on définit une dérivation f en posant $f = \bar{f} \circ j$.

2.5. Proposition. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\omega: \mathrm{Der}\,(G;A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG;A)\,.$$

Si $f \in \mathrm{Der}\,(G;A)$ *on a* $\omega(f)\,(g-1) = f(g)$ *pour tout* $g \in G$.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Der}\,(G;A)$; posons $\omega(f) = \bar{f} \circ i$ où $i: IG \to \mathbf{Z}G$ est l'inclusion. Si $x \in \mathbf{Z}G$ et $y \in IG$ on a, d'après le lemme 2.4,

$$\omega(f)\,(xy) = \bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y) = x \cdot \omega(f)\,(y)\,;$$

donc $\omega(f)$ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules. De plus, pour tout $g \in G$, on a $\omega(f)\,(g-1) = \bar{f}(g-1) = f(g) - f(1) = f(g)$.

Définissons maintenant une application

$$\omega': \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG;A) \to \mathrm{Der}\,(G;A)\,.$$

Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG;A)$ et $g \in G$ posons $\omega'(u)\,(g) = u(g-1)$. Pour tout $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned}\omega'(u)\,(gh) &= u\big(g(h-1)+(g-1)\big) = g \cdot u(h-1) + u(g-1)\\ &= g \cdot \omega'(u)\,(h) + \omega'(u)\,(g)\,.\end{aligned}$$

Donc $\omega'(u)$ est une dérivation de G dans A. On vérifie immédiatement que $\omega'\omega = 1_{\mathrm{Der}(G\,;\,A)}$ et que $\omega\omega' = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;\,A)}$.

2.6. On rappelle que $h(G\,;A)$ désigne le groupe abélien des classes de A-conjugaison des sections de l'extension de groupes donnée par le produit semi-direct $A \times G$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$F : h(G\,;A) \to \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}.$$

Démonstration. Il résulte de 1.9 qu'à toute section $\sigma : G \to A \times G$ on peut associer une application $f_\sigma : G \to A$ telle que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma(g) = \big(f_\sigma(g)\,;g\big)$. Compte tenu de la loi de multiplication du produit semi-direct et du fait que σ est un morphisme de groupes, on vérifie que $f_\sigma \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$.

Si σ' est une section A-conjuguée à σ, il existe un élément $a \in A$ tel que $\sigma'(g) = \iota(a)\sigma(g)\iota(a)^{-1}$; on en déduit que $\big(f_{\sigma'}(g)\,;g\big) = \big(a+f_\sigma(g)-g\cdot a\,;g\big)$ donc que $f_\sigma - f_{\sigma'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

On définit alors l'application F en posant $F([\sigma]) = [f_\sigma]$, où $[f_\sigma]$ désigne la classe de f_σ dans le groupe quotient $\dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$.

Il est immédiat de vérifier que F est un morphisme de groupes et que F est bijective.

3. LE GROUPE $H^1(G\,;A)$

3.1. Soit G un groupe. Comme d'habitude on munit $\mathbf{Z}$ de sa structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche trivial. De plus soit A un $\mathbf{Z}G$-module à gauche; on considère A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement sur la droite de A.

On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi : \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)\,.$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G\,;A)$ et de la proposition 2.6, on obtient alors le résultat classique suivant.