

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES  
**Autor:** Grivel, Pierre-Paul  
**Kapitel:** 2. DÉRIVATIONS ET EXTENSIONS  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56590>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

L'ensemble  $e(G; A)$  n'est pas vide car il contient la classe d'équivalence de l'extension

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} A \times G \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

donnée par le produit semi-direct.

1.8. Muni de la somme de Baer l'ensemble  $e(G; A)$  a une structure de groupe abélien.

1.9. L'extension donnée par le produit semi-direct est scindée. Si  $\sigma: G \rightarrow A \times G$  est une section de  $\pi$  on a nécessairement  $\sigma(g) = (f_\sigma(g); g)$  où  $f_\sigma(g) \in A$ . Soit  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux sections de  $\pi$ ; on dit que  $\sigma_1$  est  $A$ -conjuguée à  $\sigma_2$  s'il existe un élément  $a \in A$  tel que, pour tout  $g \in G$ , on a  $\sigma_1(g) = \iota(a)\sigma_2(g)\iota(a)^{-1}$ . On notera  $[\sigma]$  la classe de  $A$ -conjugaison de la section  $\sigma$  et on désignera par  $h(G; A)$  l'ensemble des classes de  $A$ -conjugaison des sections de  $\pi$ .

1.10. Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont deux sections de  $\pi$  on définit la section  $\sigma_1 + \sigma_2$  en posant  $(\sigma_1 + \sigma_2)(g) = (f_{\sigma_1}(g) + f_{\sigma_2}(g); g)$ . Cette opération induit sur  $h(G; A)$  une structure de groupe abélien.

## 2. DÉRIVATIONS ET EXTENSIONS

2.1. Soit  $G$  un groupe. L'anneau de groupe  $\mathbf{Z}G$  est muni d'une augmentation  $\varepsilon: \mathbf{Z}G \rightarrow \mathbf{Z}$  donnée par  $\varepsilon(\sum_{g \in G} n_g g) = \sum_{g \in G} n_g$ . Si on considère  $\mathbf{Z}$  avec sa structure de  $\mathbf{Z}G$ -module trivial à gauche,  $\varepsilon$  est un morphisme de  $\mathbf{Z}G$ -module et on obtient une extension de  $\mathbf{Z}G$ -modules

$$0 \rightarrow IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

où l'idéal d'augmentation  $IG$  est engendré, comme  $\mathbf{Z}$ -module, par l'ensemble  $\{g - 1 \mid g \in G \setminus \{1\}\}$ .

2.2. Soit  $A$  un  $\mathbf{Z}G$ -bimodule.

Une dérivation de  $G$  dans  $A$  est une application  $f: G \rightarrow A$  telle que, pour tout  $g, h \in G$ , on ait  $f(gh) = f(g) \cdot h + g \cdot f(h)$ .

L'ensemble des dérivations de  $G$  dans  $A$  forme un groupe abélien noté  $\text{Der}(G; A)$ .

Pour tout  $a \in A$ , l'application  $f_a: G \rightarrow A$  définie par  $f_a(g) = g \cdot a - a \cdot g$  est une dérivation, appelée dérivation intérieure de  $G$  dans  $A$ .

L'ensemble des dérivations intérieures de  $G$  dans  $A$  forme un sous-groupe de  $\text{Der}(G; A)$  noté  $\text{Int}(G; A)$ .

2.3. On suppose dorénavant que le groupe  $G$  agit à gauche sur le groupe abélien  $A$ .

On considère alors  $A$  comme un  $\mathbf{Z}G$ -bimodule en faisant agir  $G$  trivialement à droite sur  $A$ . Une dérivation de  $G$  dans  $A$  est donc une application  $f: G \rightarrow A$  qui satisfait la condition  $f(gh) = g \cdot f(h) + f(g)$ . On en déduit que  $f(1) = 0$ .

De plus, pour tout  $a \in A$ , la dérivation intérieure  $f_a: G \rightarrow A$  est définie par  $f_a(g) = g \cdot a - a$ .

2.4. LEMME. *Le groupe  $\text{Der}(G; A)$  est isomorphe au sous-groupe de  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G; A)$  formé des morphismes de groupes abéliens  $\bar{f}: \mathbf{Z}G \rightarrow A$  qui satisfont la condition  $\bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y)$  pour tous  $x, y \in \mathbf{Z}G$ .*

*Démonstration.* Si  $f \in \text{Der}(G; A)$  et  $x = \sum_{g \in G} n_g g \in \mathbf{Z}G$  on définit  $\bar{f}: \mathbf{Z}G \rightarrow A$  en posant  $\bar{f}(x) = \sum_{g \in G} n_g f(g)$ . Inversément si  $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G; A)$  satisfait la condition de l'énoncé et si  $j: G \rightarrow \mathbf{Z}G$  est l'inclusion évidente, on définit une dérivation  $f$  en posant  $f = \bar{f} \circ j$ .

2.5. PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\omega: \text{Der}(G; A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG; A).$$

*Si  $f \in \text{Der}(G; A)$  on a  $\omega(f)(g-1) = f(g)$  pour tout  $g \in G$ .*

*Démonstration.* Soit  $f \in \text{Der}(G; A)$ ; posons  $\omega(f) = \bar{f} \circ i$  où  $i: IG \rightarrow \mathbf{Z}G$  est l'inclusion. Si  $x \in \mathbf{Z}G$  et  $y \in IG$  on a, d'après le lemme 2.4,

$$\omega(f)(xy) = \bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y) = x \cdot \omega(f)(y);$$

donc  $\omega(f)$  est un morphisme de  $\mathbf{Z}G$ -modules. De plus, pour tout  $g \in G$ , on a  $\omega(f)(g-1) = \bar{f}(g-1) = f(g) - f(1) = f(g)$ .

Définissons maintenant une application

$$\omega': \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG; A) \rightarrow \text{Der}(G; A).$$

Si  $u \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG; A)$  et  $g \in G$  posons  $\omega'(u)(g) = u(g-1)$ . Pour tout  $g, h \in G$  on a

$$\begin{aligned} \omega'(u)(gh) &= u(g(h-1) + (g-1)) = g \cdot u(h-1) + u(g-1) \\ &= g \cdot \omega'(u)(h) + \omega'(u)(g). \end{aligned}$$

Donc  $\omega'(u)$  est une dérivation de  $G$  dans  $A$ . On vérifie immédiatement que  $\omega'\omega = 1_{\text{Der}(G; A)}$  et que  $\omega\omega' = 1_{\text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG; A)}$ .

2.6. On rappelle que  $h(G; A)$  désigne le groupe abélien des classes de  $A$ -conjugaison des sections de l'extension de groupes donnée par le produit semi-direct  $A \times G$ .

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$F: h(G; A) \rightarrow \frac{\text{Der}(G; A)}{\text{Int}(G; A)}.$$

*Démonstration.* Il résulte de 1.9 qu'à toute section  $\sigma: G \rightarrow A \times G$  on peut associer une application  $f_\sigma: G \rightarrow A$  telle que, pour tout  $g \in G$ , on a  $\sigma(g) = (f_\sigma(g); g)$ . Compte tenu de la loi de multiplication du produit semi-direct et du fait que  $\sigma$  est un morphisme de groupes, on vérifie que  $f_\sigma \in \text{Der}(G; A)$ .

Si  $\sigma'$  est une section  $A$ -conjuguée à  $\sigma$ , il existe un élément  $a \in A$  tel que  $\sigma'(g) = \iota(a)\sigma(g)\iota(a)^{-1}$ ; on en déduit que  $(f_{\sigma'}(g); g) = (a + f_\sigma(g) - g \cdot a; g)$  donc que  $f_{\sigma'} - f_\sigma \in \text{Int}(G; A)$ .

On définit alors l'application  $F$  en posant  $F([\sigma]) = [f_\sigma]$ , où  $[f_\sigma]$  désigne la classe de  $f_\sigma$  dans le groupe quotient  $\frac{\text{Der}(G; A)}{\text{Int}(G; A)}$ .

Il est immédiat de vérifier que  $F$  est un morphisme de groupes et que  $F$  est bijective.

### 3. LE GROUPE $H^1(G; A)$

3.1. Soit  $G$  un groupe. Comme d'habitude on munit  $\mathbf{Z}$  de sa structure de  $\mathbf{Z}G$ -module à gauche trivial. De plus soit  $A$  un  $\mathbf{Z}G$ -module à gauche; on considère  $A$  comme un  $\mathbf{Z}G$ -bimodule en faisant agir  $G$  trivialement sur la droite de  $A$ .

On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi: \frac{\text{Der}(G; A)}{\text{Int}(G; A)} \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A).$$

Compte tenu de la définition des groupes  $H^*(G; A)$  et de la proposition 2.6, on obtient alors le résultat classique suivant.