

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES
Autor: Grivel, Pierre-Paul
Kapitel: 1. Rappels sur les extensions
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56590>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES

par Pierre-Paul GRIVEL

INTRODUCTION

Soit M et N deux modules à gauche sur un anneau R . Il est bien connu que le groupe $\text{Ext}_R^n(N; M)$ classe, à équivalence près, les n -extensions de M par N .

D'autre part soit G un groupe et A un groupe abélien sur lequel G agit à gauche. On définit le n -ième groupe de cohomologie de G à coefficients dans A comme étant le groupe $H^n(G; A) = \text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^n(\mathbf{Z}; A)$ où \mathbf{Z} est considéré avec sa structure de $\mathbf{Z}G$ -module trivial; autrement dit on définit les groupes $H^*(G; A)$ comme étant les dérivés du foncteur $\text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}; A) = A^G$.

Pour calculer ces groupes on utilise en général un complexe standard, à l'aide duquel on obtient une interprétation des premiers groupes de cohomologie.

Il paraissait intéressant d'obtenir directement l'interprétation de $H^1(G; A)$ et $H^2(G; A)$ à partir de l'interprétation de $\text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A)$ et $\text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^2(\mathbf{Z}; A)$, sans avoir recours au complexe standard.

1. RAPPELS SUR LES EXTENSIONS

1.1. Soit R un anneau. Soit M et N deux R -modules à gauche. Une n -extension de M par N est une suite exacte de R -modules

$$\xi: 0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n \xrightarrow{\alpha_n} N \rightarrow 0.$$

Deux n -extensions ξ et ξ' de M par N sont élémentairement équivalentes s'il existe n morphismes de R -modules $\gamma_i: E_i \rightarrow E'_i$ tels que $\gamma_1\alpha = \alpha'$, $\alpha'_i\gamma_i = \gamma_{i+1}\alpha_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, et $\alpha'_n\gamma_n = \alpha_n$, ou n morphismes de R -modules $\gamma'_i: E'_i \rightarrow E_i$ tels que $\gamma'_1\alpha' = \alpha$, $\alpha_i\gamma'_i = \gamma'_{i+1}\alpha'_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, et $\alpha_n\gamma'_n = \alpha'_n$.

Deux n -extensions ξ et ξ' de M par N sont alors équivalentes s'il existe une suite d'équivalences élémentaires reliant ξ à ξ' .

On remarquera que dans le cas $n = 1$ l'équivalence élémentaire est déjà une relation d'équivalence car le morphisme γ est alors un isomorphisme.

On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension ξ .

1.2. Soit ξ une n -extension de M par N . Soit $u: M \rightarrow M'$ et $v: N' \rightarrow N$ deux morphismes de R -modules.

Par produit cofibré on définit l'extension $u\xi$ de M' par N et par produit fibré on définit l'extension ξv de M par N' .

1.3. Soit ξ et ξ' deux n -extensions de M par N . Notons $\nabla: M \oplus M \rightarrow M$ l'application codiagonale définie par $\nabla(m_1; m_2) = m_1 + m_2$ et $\Delta: M \rightarrow M \oplus M$ l'application diagonale définie par $\Delta(m) = (m; m)$. La somme de Baer de $[\xi]$ et $[\xi']$ est définie en posant $[\xi] + [\xi'] = [\nabla(\xi \oplus \xi')\Delta]$.

Muni de cette opération l'ensemble des classes d'équivalence des n -extensions de M par N est un groupe abélien.

1.4. Il est bien connu que les classes d'équivalence des n -extensions de M par N sont classées par le n -ième foncteur dérivé $\text{Ext}_R^n(N; M)$ du foncteur $\text{Hom}_R(N; M)$.

1.5. Considérons maintenant un groupe G et un groupe abélien A .

Une extension de A par G est une suite exacte de groupes

$$\xi: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \rightarrow 1.$$

Si ξ et ξ' sont deux extensions de A par G alors ξ est équivalente à ξ' s'il existe un morphisme de groupe $\gamma: E \rightarrow E'$ tel que $\gamma\lambda = \lambda'$ et $\mu'\gamma = \mu$. On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension ξ .

1.6. Si ξ est une extension de A par G on définit un morphisme de groupes $\theta: G \rightarrow \text{Aut}(A)$ en posant, pour tout $g \in G$ et $a \in A$,

$$\lambda\theta(g)(a) = s(g)\lambda(a)s(g)^{-1}$$

où $s: G \rightarrow E$ est une section ensembliste de μ . Ainsi le groupe abélien A est muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$ -module à gauche.

1.7. Si le groupe A est déjà muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$ -module à gauche on désignera par $e(G; A)$ l'ensemble des classes d'équivalence des extensions de A par G telles que l'action de G sur A induite par l'extension soit égale à l'action donnée de G sur A .

L'ensemble $e(G; A)$ n'est pas vide car il contient la classe d'équivalence de l'extension

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} A \times G \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

donnée par le produit semi-direct.

1.8. Muni de la somme de Baer l'ensemble $e(G; A)$ a une structure de groupe abélien.

1.9. L'extension donnée par le produit semi-direct est scindée. Si $\sigma: G \rightarrow A \times G$ est une section de π on a nécessairement $\sigma(g) = (f_\sigma(g); g)$ où $f_\sigma(g) \in A$. Soit σ_1 et σ_2 deux sections de π ; on dit que σ_1 est A -conjuguée à σ_2 s'il existe un élément $a \in A$ tel que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma_1(g) = \iota(a)\sigma_2(g)\iota(a)^{-1}$. On notera $[\sigma]$ la classe de A -conjugaison de la section σ et on désignera par $h(G; A)$ l'ensemble des classes de A -conjugaison des sections de π .

1.10. Si σ_1 et σ_2 sont deux sections de π on définit la section $\sigma_1 + \sigma_2$ en posant $(\sigma_1 + \sigma_2)(g) = (f_{\sigma_1}(g) + f_{\sigma_2}(g); g)$. Cette opération induit sur $h(G; A)$ une structure de groupe abélien.

2. DÉRIVATIONS ET EXTENSIONS

2.1. Soit G un groupe. L'anneau de groupe $\mathbf{Z}G$ est muni d'une augmentation $\varepsilon: \mathbf{Z}G \rightarrow \mathbf{Z}$ donnée par $\varepsilon(\sum_{g \in G} n_g g) = \sum_{g \in G} n_g$. Si on considère \mathbf{Z} avec sa structure de $\mathbf{Z}G$ -module trivial à gauche, ε est un morphisme de $\mathbf{Z}G$ -module et on obtient une extension de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$0 \rightarrow IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

où l'idéal d'augmentation IG est engendré, comme \mathbf{Z} -module, par l'ensemble $\{g - 1 \mid g \in G \setminus \{1\}\}$.

2.2. Soit A un $\mathbf{Z}G$ -bimodule.

Une dérivation de G dans A est une application $f: G \rightarrow A$ telle que, pour tout $g, h \in G$, on ait $f(gh) = f(g) \cdot h + g \cdot f(h)$.

L'ensemble des dérivations de G dans A forme un groupe abélien noté $\text{Der}(G; A)$.

Pour tout $a \in A$, l'application $f_a: G \rightarrow A$ définie par $f_a(g) = g \cdot a - a \cdot g$ est une dérivation, appelée dérivation intérieure de G dans A .