Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES

Autor: Oesterlé, J.

Kapitel: §9. Conclusion

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56588

L'application $P \mapsto \hat{h}(P)$ de $E(\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{R}$ est quadratique et positive, et l'on a $\hat{h}(P) = 0$ si et seulement si P est un point *de torsion* du groupe $E(\mathbf{Q})$.

Gross et Zagier ont obtenu en 1983 un très beau théorème [1]) qui donne *une expression de la dérivée en* 1 *de certaines fonctions* L associées à des formes modulaires. Exposons simplement le cas particulier de ce théorème qui nous intéresse pour le problème du nombre de classes: considérons comme au § 7 une courbe elliptique E de Weil, telle que le signe ε_E de l'équation fonctionnelle L_E soit -1, et notons f_E la forme modulaire associée (§ 6); il existe alors une constante réelle calculable non nulle c_E telle que:

Pour tout caractère de Dirichlet quadratique impair χ *de conducteur* $d \geqslant 7$ *tel que* $\chi(N_E) = 1$, *il existe un point* $P \in E(\mathbf{Q})$ *tel que*

$$L'_E(1) L_E(\chi, 1) = c_E \hat{h}(P) .$$

Ce théorème peut être utilisé pour résoudre le problème laissé en suspens au paragraphe précédent, à savoir vérifier si $L'_E(1) = 0$: pour cela, on choisit un caractère de Dirichlet χ comme ci-dessus pour lequel $L_E(\chi, 1) \neq 0$ (ceci est toujours possible, d'après un théorème de Waldspurger, et on trouve facilement un tel χ lorsque E est choisie). Comme on dispose de majorations de $L_E(\chi, 1)$, de la valeur approchée de c_E et de minorations des $\hat{h}(P)$ non nuls lorsque P décrit $E(\mathbf{Q})$, il suffit alors pour conclure à la nullité de $L'_E(1)$ de montrer que $L'_E(1)$ est assez petit, ce qu'un calcul sur ordinateur permet de faire.

§ 9. Conclusion

Gross et Zagier ont vérifié que la courbe elliptique d'équation (minimale):

$$y^2 + y = x^3 - x^2 - 450\,823x + 112\,971\,139$$

satisfait aux exigences du § 6. En calculant la constante c_E correspondante (cf. pour cela mon exposé au Séminaire Bourbaki), on obtient

$$\begin{aligned} h(-d) = 3 &\Rightarrow \log d \leqslant 21\,000 \\ h(-d) = 4 &\Rightarrow \log d \leqslant 336\,000 \\ h(-d) = 5 &\Rightarrow \log d \leqslant 35\,000 \\ h(-d) = 6 &\Rightarrow \log d \leqslant 168\,000 \end{aligned}$$

etc.

[1]) B. H. Gross et D. B. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Inv. Math. 84 (1986), 225-320.

D'autres courbes elliptiques de Weil E telles que $E(\mathbf{Q})$ soit de rang 3, trouvées par Mestre,

$$\begin{aligned}
y^2 + y &= x^3 - 7x + 6 && (N_E = 5\,077) \\
y^2 + y &= x^3 - x + 6 && (N_E = 16\,811) \\
y^2 + y &= x^3 - 19x + 30 && (N_E = 43\,669),
\end{aligned}$$

permettent d'obtenir de meilleures majorations:

$$\begin{aligned}
h(-d) &= 3 \Rightarrow \log d \leqslant 165 \\
h(-d) &= 4 \Rightarrow \log d \leqslant 2\,640 \\
h(-d) &= 5 \Rightarrow \log d \leqslant 275 \\
h(-d) &= 6 \Rightarrow \log d \leqslant 1\,320
\end{aligned}$$

etc.

Pour achever complètement de résoudre le problème du nombre de classes, il reste en fait à vérifier qu'en-dessous des bornes précédentes les seuls d pour lesquels $h(-d)$ vaut 3, 4, 5, 6, etc. sont ceux qui figurent dans la table de Buell. Il devrait être possible de le faire en reprenant les calculs de Stark et Montgomery-Weinberger évoqués au § 5. Pour l'instant, cela n'a été fait que pour $h = 3$ (par Montgomery et Weinberger), et pour $h = 4$ (par Arno).

(Reçu le 30 mars 1987)

J. Oesterlé

Université Paris VI
UER Mathématiques
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05

vide-leer-empty