Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES
Autor: Oesterlé, J.
Kapitel: §9. Conclusion
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56588

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'application $P \mapsto \hat{h}(P)$ de $E(\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{R}$ est quadratique et positive, et l'on a $\hat{h}(P) = 0$ si et seulement si P est un point *de torsion* du groupe $E(\mathbf{Q})$.

Gross et Zagier ont obtenu en 1983 un très beau théorème [1]) qui donne *une expression de la dérivée en* 1 *de certaines fonctions* L associées à des formes modulaires. Exposons simplement le cas particulier de ce théorème qui nous intéresse pour le problème du nombre de classes: considérons comme au § 7 une courbe elliptique E de Weil, telle que le signe ε_E de l'équation fonctionnelle L_E soit -1, et notons f_E la forme modulaire associée (§ 6); il existe alors une constante réelle calculable non nulle c_E telle que:

Pour tout caractère de Dirichlet quadratique impair χ *de conducteur* $d \geqslant 7$ *tel que* $\chi(N_E) = 1$, *il existe un point* $P \in E(\mathbf{Q})$ *tel que*

$$L'_E(1)L_E(\chi, 1) = c_E\hat{h}(P).$$

Ce théorème peut être utilisé pour résoudre le problème laissé en suspens au paragraphe précédent, à savoir vérifier si $L'_E(1) = 0$: pour cela, on choisit un caractère de Dirichlet χ comme ci-dessus pour lequel $L_E(\chi, 1) \neq 0$ (ceci est toujours possible, d'après un théorème de Waldspurger, et on trouve facilement un tel χ lorsque E est choisie). Comme on dispose de majorations de $L_E(\chi, 1)$, de la valeur approchée de c_E et de minorations des $\hat{h}(P)$ non nuls lorsque P décrit $E(\mathbf{Q})$, il suffit alors pour conclure à la nullité de $L'_E(1)$ de montrer que $L'_E(1)$ est assez petit, ce qu'un calcul sur ordinateur permet de faire.

§ 9. Conclusion

Gross et Zagier ont vérifié que la courbe elliptique d'équation (minimale):

$$y^2 + y = x^3 - x^2 - 450\,823x + 112\,971\,139$$

satisfait aux exigences du § 6. En calculant la constante c_E correspondante (cf. pour cela mon exposé au Séminaire Bourbaki), on obtient

$$\begin{aligned} h(-d) &= 3 \Rightarrow \log d \leqslant 21\,000 \\ h(-d) &= 4 \Rightarrow \log d \leqslant 336\,000 \\ h(-d) &= 5 \Rightarrow \log d \leqslant 35\,000 \\ h(-d) &= 6 \Rightarrow \log d \leqslant 168\,000 \end{aligned}$$

etc.

---

[1]) B. H. Gross et D. B. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Inv. Math. 84 (1986), 225-320.

D'autres courbes elliptiques de Weil E telles que $E(\mathbf{Q})$ soit de rang 3, trouvées par Mestre,

$$\begin{aligned} y^2 + y &= x^3 - 7x + 6 && (N_E = 5\,077) \\ y^2 + y &= x^3 - x + 6 && (N_E = 16\,811) \\ y^2 + y &= x^3 - 19x + 30 && (N_E = 43\,669)\,, \end{aligned}$$

permettent d'obtenir de meilleures majorations:

$$\begin{aligned} h(-d) &= 3 \Rightarrow \log d \leqslant 165 \\ h(-d) &= 4 \Rightarrow \log d \leqslant 2\,640 \\ h(-d) &= 5 \Rightarrow \log d \leqslant 275 \\ h(-d) &= 6 \Rightarrow \log d \leqslant 1\,320 \end{aligned}$$

etc.

Pour achever complètement de résoudre le problème du nombre de classes, il reste en fait à vérifier qu'en-dessous des bornes précédentes les seuls d pour lesquels $h(-d)$ vaut 3, 4, 5, 6, etc. sont ceux qui figurent dans la table de Buell. Il devrait être possible de le faire en reprenant les calculs de Stark et Montgomery-Weinberger évoqués au § 5. Pour l'instant, cela n'a été fait que pour $h = 3$ (par Montgomery et Weinberger), et pour $h = 4$ (par Arno).

(Reçu le 30 mars 1987)

J. Oesterlé

Université Paris VI
UER Mathématiques
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05

vide-leer-empty