

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES  
**Autor:** Oesterlé, J.  
**Kapitel:** §8. Le théorème de Gross et Zagier  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56588>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

on obtient par exemple<sup>1)</sup> pour  $h(-d)$  impair une inégalité de la forme

$$(34) \quad h(-d) \geq c_E \log d$$

où  $c_E$  est une constante dépendant de la courbe elliptique  $E$  choisie, et susceptible d'être calculée. (Plus généralement, si  $h(-d)$  est de la forme  $2^t h'$  avec  $h'$  impair, on a une inégalité analogue à (34) à condition de remplacer  $c_E$  par une nouvelle constante  $c_E(t)$  qui dépend de  $t$ , par exemple  $c_E(t) = c_E e^{-3\sqrt{t}}$ , et de supposer  $d$  premier à  $N_E$ ; cette dernière condition peut même être omise si l'on choisit  $E$  convenablement comme l'ont remarqué Gross et Zagier.)

*Comment trouver  $E$  remplissant les deux conditions énoncées ci-dessus?* On commence par choisir une courbe elliptique  $E$  telle que le groupe  $E(\mathbf{Q})$  ait un rang impair  $r \geq 3$  (il y en a une infinité et on peut en expliciter à volonté). On vérifie qu'elle est de Weil (soit parce qu'elle est à multiplications complexes, soit par un calcul sur ordinateur) et que le signe  $\varepsilon_E$  de l'équation fonctionnelle de  $L_E$  est  $-1$  (par le calcul). La fonction  $L_E$  a alors un zéro d'ordre  $\rho$  impair en  $1$ , et si l'on croit en la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer,  $\rho$  doit être égal à  $r$ , donc  $\geq 3$ . Malheureusement, cette conjecture n'est pas démontrée. Peut-on s'en passer et dans le cas particulier choisi, prouver directement l'inégalité  $\rho \geq 3$ ? Puisque  $\rho$  est impair, cela revient à montrer que  $L'_E(1) = 0$ . Il est possible d'obtenir par calcul sur ordinateur des valeurs approchées de  $L'_E(1)$ , mais a priori même si celles-ci sont très petites on ne peut conclure à la nullité de  $L'_E(1)$ .

Il a fallu attendre 1983 et les travaux de Gross et Zagier pour arriver enfin à surmonter cette difficulté et à appliquer le théorème de Goldfeld.

## § 8. LE THÉORÈME DE GROSS ET ZAGIER

Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\mathbf{Q}$  et soit  $P \in E(\mathbf{Q})$  un point rationnel de  $E$ . Ecrivons l'abscisse  $x(n(P))$  du point  $P + \dots + P$  ( $n$  termes, la somme étant calculée dans le groupe  $E(\mathbf{Q})$ ) sous forme d'une fraction irréductible  $a_n/b_n$ . On montre que l'expression  $\frac{1}{2} n^{-2} \log (\sup(|a_n|, |b_n|))$  a une limite  $\hat{h}(P)$  lorsque  $P$  tend vers  $+\infty$ , appelée *hauteur de Néron-Tate de  $P$* .

<sup>1)</sup> Cette inégalité, un peu meilleure que celle de Goldfeld, est prouvée par la même méthode dans mon exposé sur la question au Séminaire Bourbaki (Juin 1984, exposé 631).

L'application  $P \mapsto \hat{h}(P)$  de  $E(\mathbf{Q})$  dans  $\mathbf{R}$  est quadratique et positive, et l'on a  $\hat{h}(P) = 0$  si et seulement si  $P$  est un point de torsion du groupe  $E(\mathbf{Q})$ .

Gross et Zagier ont obtenu en 1983 un très beau théorème<sup>1)</sup> qui donne une expression de la dérivée en 1 de certaines fonctions  $L$  associées à des formes modulaires. Exposons simplement le cas particulier de ce théorème qui nous intéresse pour le problème du nombre de classes: considérons comme au § 7 une courbe elliptique  $E$  de Weil, telle que le signe  $\varepsilon_E$  de l'équation fonctionnelle  $L_E$  soit  $-1$ , et notons  $f_E$  la forme modulaire associée (§ 6); il existe alors une constante réelle calculable non nulle  $c_E$  telle que:

*Pour tout caractère de Dirichlet quadratique impair  $\chi$  de conducteur  $d \geq 7$  tel que  $\chi(N_E) = 1$ , il existe un point  $P \in E(\mathbf{Q})$  tel que*

$$L'_E(1)L_E(\chi, 1) = c_E \hat{h}(P).$$

Ce théorème peut être utilisé pour résoudre le problème laissé en suspens au paragraphe précédent, à savoir vérifier si  $L'_E(1) = 0$ : pour cela, on choisit un caractère de Dirichlet  $\chi$  comme ci-dessus pour lequel  $L_E(\chi, 1) \neq 0$  (ceci est toujours possible, d'après un théorème de Waldspurger, et on trouve facilement un tel  $\chi$  lorsque  $E$  est choisie). Comme on dispose de majorations de  $L_E(\chi, 1)$ , de la valeur approchée de  $c_E$  et de minorations des  $\hat{h}(P)$  non nuls lorsque  $P$  décrit  $E(\mathbf{Q})$ , il suffit alors pour conclure à la nullité de  $L'_E(1)$  de montrer que  $L'_E(1)$  est assez petit, ce qu'un calcul sur ordinateur permet de faire.

## § 9. CONCLUSION

Gross et Zagier ont vérifié que la courbe elliptique d'équation (minimale):

$$y^2 + y = x^3 - x^2 - 450\,823x + 112\,971\,139$$

satisfait aux exigences du § 6. En calculant la constante  $c_E$  correspondante (cf. pour cela mon exposé au Séminaire Bourbaki), on obtient

$$h(-d) = 3 \Rightarrow \log d \leq 21\,000$$

$$h(-d) = 4 \Rightarrow \log d \leq 336\,000$$

$$h(-d) = 5 \Rightarrow \log d \leq 35\,000$$

$$h(-d) = 6 \Rightarrow \log d \leq 168\,000$$

etc.

<sup>1)</sup> B. H. GROSS et D. B. ZAGIER, *Heegner points and derivatives of L-series*, Inv. Math. 84 (1986), 225-320.