

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES
Autor: Oesterlé, J.
Kapitel: §4. Minorations non effectives de $h(-d)$
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56588>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$h(-d) \geq \frac{1}{\pi} (1-\alpha) d^{\alpha/2} = \frac{2}{\pi e} (\sqrt{d}/\log d).$$

Si nous sommes entrés dans les détails de cette démonstration, c'est pour bien illustrer les deux points suivants :

1) Nous voyons à l'œuvre le principe général énoncé à la fin du § 2, qui dit que si d est grand et $h(-d)$ est petit, $\zeta_K(s)$ doit ressembler à $\zeta(2s)$: en effet $\zeta_K(s)$ admet un pôle en 1, alors que $\zeta(2s)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$; mais si d est grand et $h(-d)$ petit, l'existence du pôle pour ζ_K doit être contrebalancée par l'existence d'un zéro de ζ_K proche de 1, d'après la proposition ci-dessus.

2) Si l'hypothèse de Riemann généralisée était démontrée, les questions posées dans l'introduction de cette deuxième partie seraient résolues: ainsi par exemple il résulterait de la proposition que tous les discriminants fondamentaux $-d$ pour lesquels $h(-d) \leq 30$ figurent dans la table de Buell.

§ 4. MINORATIONS NON EFFECTIVES DE $h(-d)$

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, $h(-d)$ est grand lorsque d est grand et que la fonction $L(\chi_d, s)$, où $\chi_d(n) = \left(\frac{-d}{n}\right)$, n'a pas de zéro voisin de 1. Supposons alors que $h(-d)$ et $h(-d')$ soient petits pour deux grandes valeurs de d et d' (en un sens que l'on peut préciser, ce que je ne ferai pas ici). Les fonctions $L(\chi_d, s)$ et $L(\chi_{d'}, s)$ ont alors chacune un zéro voisin de 1, et l'on en déduit que la fonction zêta du corps biquadratique $\mathbf{Q}[i\sqrt{d}, i\sqrt{d'}]$ a deux zéros voisins de 1. Des estimées élémentaires permettent d'en déduire une contradiction. Cette méthode montre que $h(-d)$ ne peut être petit que pour au plus un grand d . Elle est une variante de celle utilisée par Heilbronn pour montrer que

$$(29) \quad \lim_{d \rightarrow \infty} h(-d) = \infty,$$

et a été utilisée par Siegel¹⁾ pour préciser à quelle allure $h(-d)$ tend vers $+\infty$: Siegel montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $d(\varepsilon)$ tel que: $h(-d) \geq \sqrt{d}^{1-\varepsilon}$ pour $d \geq d(\varepsilon)$.

¹⁾ C. L. SIEGEL, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arithmetica 1 (1936), 83-86.

Il n'est malheureusement pas possible de calculer $d(\varepsilon)$ car cet entier dépend de l'hypothétique grand discriminant exceptionnel pour lequel $h(-d)$ serait petit.

On peut cependant obtenir par les méthodes précédentes un énoncé « effectif à au plus une exception près ». Cela a été fait par Tatuzawa¹⁾ en explicitant les constantes dans la démonstration de Siegel : si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on a

$$(30) \quad h(-d) \geq \frac{0,655}{\pi} \varepsilon d^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

pour $d > \sup(e^{1/\varepsilon}, e^{11,2})$ à au plus une exception près. On en déduit par exemple, en prenant $\varepsilon = 1/15$, que tous les discriminants fondamentaux $-d$ pour lesquels $h(-d) \leq 10$, à au plus une exception près, figurent dans la table de Buell et par suite sont de valeur absolue ≤ 13843 .

§ 5. LES CAS $h = 1$ ET $h = 2$ ²⁾

D'après le paragraphe précédent, il existe au plus un discriminant fondamental $-d$ tel que $h(-d) = 1$ et qui ne figure pas parmi les neuf déjà connus de Gauss. La question de savoir si un tel d existe est restée longtemps ouverte et est devenue célèbre sous le nom de *problème du dixième discriminant* (ou *du dixième corps quadratique imaginaire*).

En 1952, Heegner publie une preuve de la non-existence du dixième discriminant reposant sur la théorie des formes modulaires, mais cette preuve fut jugée incomplète à l'époque.

En 1966, Stark et Baker prouvent indépendamment la non-existence du dixième discriminant. Dans sa preuve, Stark ramène ce problème à la détermination des solutions entières des équations $8x^6 \pm 1 = y^2$ et $x^6 \pm 1 = 2y^2$. Ces équations apparaissent déjà dans le travail de Heegner. En fait, deux ans plus tard, Stark et Birch reprennent en détail les arguments de Heegner et montrent la validité de sa démonstration.

La méthode de Baker utilise les minorations effectives de formes linéaires en logarithmes de nombres algébriques. Elle a l'avantage de s'étendre au problème du nombre de classes 2, et a permis à Baker et Stark de majorer

¹⁾ T. TATUZAWA, *On a theorem of Siegel*, Jap. J. of Math., 21 (1951), 163-178.

²⁾ Pour un exposé plus détaillé des questions abordées dans ce paragraphe, avec références bibliographiques, on pourra consulter par exemple l'exposé de M. Waldschmidt au Séminaire de Théorie des nombres de Paris en 1973 (exposé 12).