**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 34 (1988)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES
**Autor:** Oesterlé, J.
**Kapitel:** §3. Ce que l'on espère sur le comportement de h( —d)
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-56588

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

*distincts) associe* $(-1)^r$, *on a* $\lambda(n) = \chi(n)$ *pour la plupart des petits nombres entiers* $n$. *La fonction* $\zeta_K(s)$ *doit ressembler à la fonction* $\zeta(2s)$.

Ces énoncés sont volontairement vagues. Les rendre précis est souvent le nœud des démonstrations de minorations de $h(-d)$ lorsque $d$ tend vers $\infty$.

## § 3. Ce que l'on espère sur le comportement de $h(-d)$

On peut montrer que *en moyenne* (en un sens qui demande à être précisé, ce que je ne ferai pas ici), $h(-d)$ est équivalent à une constante non nulle fois $\sqrt{d}$; déjà Gauss connaissait ce type de résultat [1]).

Il n'est pas vrai par contre que $h(-d)/\sqrt{d}$ admette un minorant $> 0$ ou un majorant lorsque $d$ tend vers $+\infty$: on sait par exemple que $h(-d)/(\sqrt{d}\log\log d)$ ne tend pas vers 0 et que $h(-d)\log\log d/\sqrt{d}$ ne tend pas vers $+\infty$ lorsque $d$ tend vers $+\infty$.

On obtient cependant de façon élémentaire des *majorations* raisonnables de $h(-d)$ (raisonnable signifiant avec l'exposant $\frac{1}{2}$ que l'on attend pour $d$), de la forme $h(-d) \leqslant C\sqrt{d}\log d$. Par exemple:

Proposition. *On a pour* $d > 4$

$$h(-d) \leqslant \pi^{-1}\sqrt{d}\log d\,. \tag{27}$$

Compte tenu de (24) et (26), il revient au même de montrer que l'on a, en posant $\chi(n) = \left(\frac{-d}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n \leqslant \log d\,.$$

Or, pour tout nombre réel $x > 0$, la somme $M(x) = \sum_{n\leqslant x}\chi(n)$ est majorée par $N(x) = \inf([x], [(d-1)/2])$, et l'on a donc, en intégrant par parties

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n} = \int_{1^-}^{\infty}\frac{dM(x)}{x} = \int_1^{\infty}\frac{M(x)}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^{\infty}\frac{N(x)}{x^2}\,dx$$
$$= \int_{1^-}^{\infty}\frac{dN(x)}{x} = \sum_{n\leqslant[(d-1)/2]} 1/n \leqslant \log d\,.$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 302.

Il est possible d'obtenir des *minorations* raisonnables de $h(-d)$ *si l'on admet l'hypothèse de Riemann généralisée.* Ainsi par exemple, en suivant une démonstration de Hecke, publiée par Landau [1]), on obtient:

PROPOSITION. *Si la fonction zêta* $\zeta_K$ *du corps* $K = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}i\sqrt{d}$ *n'admet aucun zéro réel* $> 1 - (2/\log d)$, *on a*

$$h(-d) \geqslant \frac{2}{\pi e}\sqrt{d}/\log d\,. \tag{28}$$

Soit $\alpha \in ]1/2, 1[$ tel que $\zeta_K$ ne s'annule pas dans l'intervalle $]\alpha, 1[$. On a alors $\zeta_K(\alpha) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\sum_{C \in Cl(-d)} \Lambda(C, \alpha) \leqslant 0$ (formule (23)). Or il résulte de la formule (22) que $\Lambda(C, \alpha) + (\alpha(1-\alpha))^{-1}$ est positif pour toute classe $C \in Cl(-d)$, et même supérieur à $2\int_1^\infty e^{-2\pi t/\sqrt{d}}(t^{\alpha-1}+t^{-\alpha})dt$ lorsque $C$ est la classe neutre. On a par conséquent

$$h(-d) \geqslant 2\alpha(1-\alpha)\int_1^\infty e^{-2\pi t/\sqrt{d}}(t^{\alpha-1}+t^{-\alpha})dt\,.$$

Le second membre de (28) est majoré par 1 pour $d \leqslant 800$, par 2 pour $d \leqslant 5000$, par 3 pour $d \leqslant 15000$. Il nous suffit donc de démontrer la proposition pour $d \geqslant 15000$. Prenons alors $\alpha$ égal à $1 - (2/\log d)$; remarquons que

$$\int_1^\infty e^{-2\pi t/\sqrt{d}}t^{-\alpha}dt \geqslant \int_1^6 e^{-2\pi t/\sqrt{d}}t^{-1}dt \geqslant e^{-12\pi/\sqrt{d}}\log 6 \geqslant 1,3 \geqslant$$

$$1/\alpha = \int_0^1 t^{\alpha-1}dt \geqslant \int_0^1 e^{-2\pi t/\sqrt{d}}t^{\alpha-1}dt\,,$$

d'où

$$h(-d) \geqslant 2\alpha(1-\alpha)\int_0^\infty e^{-2\pi t/\sqrt{d}}t^{\alpha-1}dt = 2\alpha(1-\alpha)\,(\sqrt{d}/2\pi)^\alpha\Gamma(\alpha)\,.$$

L'application $x \mapsto x(2\pi)^{-x}\Gamma(x)$ étant décroissante sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, on en déduit

[1]) E. LANDAU, *Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper*, Göttingen Nachrichten (1918), 285-295.

$$h(-d) \geqslant \frac{1}{\pi}(1-\alpha)d^{\alpha/2} = \frac{2}{\pi e}(\sqrt{d}/\log d).$$

Si nous sommes entrés dans les détails de cette démonstration, c'est pour bien illustrer les deux points suivants:

1) Nous voyons à l'œuvre le principe général énoncé à la fin du § 2, qui dit que si $d$ est grand et $h(-d)$ est petit, $\zeta_K(s)$ doit ressembler à $\zeta(2s)$: en effet $\zeta_K(s)$ admet un pôle en 1, alors que $\zeta(2s)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\,(s) > \frac{1}{2}$; mais si $d$ est grand et $h(-d)$ petit, l'existence du pôle pour $\zeta_K$ doit être contrebalancée par l'existence d'un zéro de $\zeta_K$ proche de 1, d'après la proposition ci-dessus.

2) Si l'hypothèse de Riemann généralisée était démontrée, les questions posées dans l'introduction de cette deuxième partie seraient résolues: ainsi par exemple il résulterait de la proposition que tous les discriminants fondamentaux $-d$ pour lesquels $h(-d) \leqslant 30$ figurent dans la table de Buell.

## § 4. Minorations non effectives de $h(-d)$

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, $h(-d)$ est grand lorsque $d$ est grand et que la fonction $L(\chi_d, s)$, où $\chi_d(n) = \left(\frac{-d}{n}\right)$, n'a pas de zéro voisin de 1. Supposons alors que $h(-d)$ et $h(-d')$ soient petits pour deux grandes valeurs de $d$ et $d'$ (en un sens que l'on peut préciser, ce que je ne ferai pas ici). Les fonctions $L(\chi_d, s)$ et $L(\chi_{d'}, s)$ ont alors chacune un zéro voisin de 1, et l'on en déduit que la fonction zêta du corps biquadratique $\mathbf{Q}[i\sqrt{d}, i\sqrt{d'}]$ a deux zéros voisins de 1. Des estimées élémentaires permettent d'en déduire une contradiction. Cette méthode montre que $h(-d)$ ne peut être petit que pour au plus un grand $d$. Elle est une variante de celle utilisée par Heilbronn pour montrer que

$$\lim_{d\to\infty} h(-d) = \infty, \tag{29}$$

et a été utilisée par Siegel [1]) pour préciser à quelle allure $h(-d)$ tend vers $+\infty$: Siegel montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $d(\varepsilon)$ tel que: $h(-d) \geqslant \sqrt{d}^{1-\varepsilon}$ pour $d \geqslant d(\varepsilon)$.

---

[1]) C. L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arithmetica 1 (1936), 83-86.