Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES
Autor: Oesterlé, J.
Kapitel: §3. Une méthode élémentaire pour calculer le nombre de classes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56588

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 3. Une méthode élémentaire pour calculer le nombre de classes [1])

Soit d un entier $\geqslant 1$. D'après le § 2, le nombre $\tilde{h}(-d)$ de classes de formes quadratiques de discriminant $-d$ est le nombre de formes quadratiques réduites de discriminant $-d$, c'est-à-dire le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers vérifiant

$$(7)\qquad \begin{aligned} & b^2 - 4ac = -d \\ & |b| \leqslant a \leqslant c \\ & b \geqslant 0 \quad \text{si} \quad a \text{ est égal à } |b| \text{ ou à } c\,. \end{aligned}$$

Nous savons déjà que $\tilde{h}(-d)$ est non nul si et seulement si $-d$ est congru à 0 ou à 1 modulo 4. Les conditions (7) entraînent que a, donc aussi $|b|$ est majoré par $\sqrt{d/3}$ (§ 1, formule (3)) et que $|b|$ est de même parité que d. On en déduit aussitôt la formule suivante, permettant de calculer $\tilde{h}(-d)$:

Proposition. *Supposons $-d$ congru à 0 ou à 1 modulo 4. On a:*

$$\tilde{h}(-d) = \sum_{\substack{0 \leqslant b \leqslant \sqrt{d/3} \\ b \equiv d (\mathrm{mod.}\ 2)}} \ \sum_{\substack{a \mid ((b^2+d)/4) \\ b \leqslant a \leqslant \sqrt{(b^2+d)/4}}} n(a, b)$$

avec $n(a, b) = 1$ si l'on a $b = 0$ ou $a = b$ ou $a = \sqrt{(b^2+d)/4}$, et $n(a, b) = 2$ sinon.

Exemple. Calculons $\tilde{h}(-347)$. On a $10 < \sqrt{347/3} < 11$, d'où le tableau suivant:

b	$(b^2+d)/4$	a	$n(a, b)$
1	$87 = 3.29$	1, 3	1, 2
3	89	—	—
5	$93 = 3.31$	—	—
7	$99 = 3^2.11$	9	2
9	107	—	—

dont on déduit $\tilde{h}(-347) = 5$. Les coefficients des cinq formes réduites se lisent sur le tableau; ce sont:

$$(1, 1, 87),\ (3, 1, 29),\ (3, -1, 29),\ (9, 7, 11) \text{ et } (9, -7, 11)\,.$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 174 et 175.

L'étude des formes quadratiques se ramène facilement à celle des formes *primitives*, c'est-à-dire celles dont les coefficients ont 1 pour plus grand commun diviseur. En effet, si $-d < 0$ est congru à 0 ou à 1 modulo 4, il existe un plus grand entier F tel que $-d$ s'écrive $-d_0F^2$ avec $-d_0$ congru à 0 ou 1 modulo 4. Pour toute classe C de formes quadratiques de discriminant $-d$, il existe un diviseur $f \geqslant 1$ de F et une classe C' de formes quadratiques primitives de discriminant $-df^{-2}$ tels que $C = fC'$.

Les nombres de classes $\tilde{h}$ et les nombres de classes primitives h sont donc reliés par l'égalité

$$\tilde{h}(-d) = \sum_{f|F} h(-df^{-2}) . \tag{8}$$

Lorsque F est égal à 1, ce qui équivaut à dire que d n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier impair et est congru à 3 (mod. 4), à 4 (mod. 16) ou à 8 (mod. 16), on dit que $-d$ est un *discriminant fondamental*. Toute forme de discriminant $-d$ est alors primitive et on a $\tilde{h}(-d) = h(-d)$.

§ 4. Le groupe des classes [1])

Cherchant à généraliser la formule classique

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = (xx'-yy')^2 + (xy'+yx')^2 ,$$

Gauss se demande pour quels couples (q, q') de formes quadratiques, il existe une forme quadratique q'' telle que l'on ait une identité

$$q(x, y)q'(x', y') = q''(x'', y'') ,$$

où x'' et y'' sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de xx', xy', yx' et yy'.

Si l'on a une identité du type précédent, et si $-d$, $-d'$, $-d''$ désignent les discriminants de q, q', q'', le carré du déterminant de l'application linéaire $(x, y) \mapsto (x'', y'')$ (resp. $(x', y') \mapsto (x'', y'')$) est égal à $dq'(x', y')^2/d''$ (resp. $d'q(x, y)^2/d''$).

Gauss montre que lorsque q et q' sont des formes primitives de même discriminant $-d$, il est possible d'obtenir une identité du type ci-dessus, avec q'' forme primitive de discriminant $-d$, et

$$q'(x', y') = \det\big((x, y) \mapsto (x'', y'')\big) , \quad q(x, y) = \det\big((x', y') \mapsto (x'', y'')\big) .$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 234 à 243.