

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EULER'S FAMOUS PRIME GENERATING POLYNOMIAL AND THE CLASS NUMBER OF IMAGINARY QUADRATIC FIELDS  
**Autor:** Ribenboim, Paulo

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56587>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$= a^2 + b^2p$ , thus  $1 > a^2 + (b^2 - 1)p$  and necessarily  $a^2 = 0, b^2 = 1$ , hence  $4l = p$ , which is absurd.

Now assume that there exists  $m, 0 \leq m \leq q - 2$ , such that  $f_q(m) = m^2 + m + q$  is not a prime. Then there exists a prime  $l$  such that  $l^2 \leq m^2 + m + q$  and  $m^2 + m + q = al$ , with  $a \geq 1$ . Since  $m^2 + m + q$  is odd then  $l \neq 2$ . Also  $4l^2 \leq (2m+1)^2 + p < \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$ , hence  $l < \frac{p+1}{4} = q$ . As it was shown,  $\left(\frac{l}{p}\right) = -1$ . However,

$$4al = (2m+1)^2 + 4q - 1 = (2m+1)^2 + p,$$

hence  $-p$  is a square modulo  $l$ , so by Gauss' reciprocity law,

$$1 = \left(\frac{-p}{l}\right) = \left(\frac{-1}{l}\right) \left(\frac{p}{l}\right) = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \left(\frac{l}{p}\right) (-1)^{\frac{l-1}{2} \times \frac{p-1}{2}} = \left(\frac{l}{p}\right),$$

and this is absurd. □

#### BIBLIOGRAPHY

- [1] AYOUB, R. and S. CHOWLA. On Euler's polynomial. *J. Nb. Th.* 13 (1981), 443-445.
- [2] BOREVICH, Z. I. and I. R. SHAFAREVICH. *Number Theory*. Academic Press, New York, 1966.
- [3] COHN, H. *Advanced Number Theory*. Dover Publ., New York, 1962.
- [4] GOLDFELD, D. Gauss' class number problem for imaginary quadratic fields. *Bull. Amer. Math. Soc.* 13 (1985), 23-37.
- [5] LEHMER, D. H. On the function  $x^2 + x + A$ . *Sphinx* 6 (1936), 212-214.
- [6] PRITCHARD, P. A. Long arithmetic progressions of primes: some old, some new. *Math. of Comp.* 45 (1985), 263-267.
- [7] RABINOVITCH, G. Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörper. *Intern. Congress of Math.*, Cambridge, 1912, vol. 1, 418-421.
- [8] RIBENBOIM, P. *Algebraic Numbers*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [9] ——— *The Book of Prime Number Records*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [10] SCHINZEL, A. and W. SIERPIŃSKI. Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers. Remarques. *Acta Arithm.* 4 (1958), 185-208 and 5 (1959), p. 259.
- [11] SCHINZEL, A. Remarks on the paper «Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers». *Acta Arithm.* 7 (1961), 1-8.
- [12] SZEKERES, G. On the number of divisors of  $x^2 + x + A$ . *J. Nb. Th.* 6 (1984), 434-442.

(Reçu le 4 avril 1987)

Paulo Ribenboim

Queen's University  
Kingston, Ontario  
Canada K7L 3N6