Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EULER'S FAMOUS PRIME GENERATING POLYNOMIAL AND THE CLASS NUMBER OF IMAGINARY QUADRATIC FIELDS

Autor: Ribenboim, Paulo

Kapitel: E) Units

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56587

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Indeed,

$$(2, \omega)(2, \omega') = \left(4, 2\omega, 2\omega', \frac{1-d}{4}\right) = A2\left(2, \omega, \omega', \frac{1-d}{8}\right) = A2,$$

because $\omega + \omega' = 1$.

Also $(2, \omega) \neq (2, \omega')$, otherwise these ideals are equal to their sum $(2, \omega, \omega') = A$, because $\omega + \omega' = 1$.

c) If $d \equiv 2$ or $3 \pmod 4$ then $A2 = (2, \sqrt{d})^2$, respectively $(2, 1+\sqrt{d})^2$. First let $d = 4e + 2$ then

$$(2, \sqrt{d})^2 = (4, 2\sqrt{d}, d) = A2(2, \sqrt{d}, 2e+1) = A2,$$

so $(2, \sqrt{d})$ is a prime ideal.

Now, let $d = 4e + 3$, then

$$(2, 1+\sqrt{d})^2 = (4, 2+2\sqrt{d}, 1+d+2\sqrt{d}) = (4, 2+2\sqrt{d}, 4(e+1)+2\sqrt{d})$$
$$= A2(2, 1+\sqrt{d}, 2(e+1)+\sqrt{d}) = A2(2, 2e+1, 1+\sqrt{d}, 2(e+1)+\sqrt{d}) = A2$$

and so $(2, 1+\sqrt{d})$ is a prime ideal.

Finally, these three cases are exclusive and exhaustive, so the converse assertions also hold. □

E) Units

The element $\alpha \in A$ is a unit if there exists $\beta \in A$ such that $\alpha\beta = 1$. The set U of units is a group under multiplication. Here is a description of the group of units in the various cases. First let $d < 0$.

Let $d \neq -1, -3$. Then $U = \{\pm 1\}$.

Let $d = -1$. Then $U = \{\pm 1, \pm i\}$, with $i = \sqrt{-1}$.

Let $d = -3$. Then $U = \{\pm 1, \pm \rho, \pm \rho^2\}$, with $\rho^3 = 1$, $\rho \neq 1$, i.e. $\rho = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Let $d > 0$. Then the group of units is the product $U = \{\pm 1\} \times C$, where C is a multiplicative cyclic group. Thus $C = \{\varepsilon^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$, where ε is the smallest unit such that $\varepsilon > 1$. ε is called the fundamental unit.