Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES GRANDS THÈMES DE FRANÇOIS CHÂTELET

Autor: Colliot-Thélène, Jean-Louis

Kapitel: 3.2. La contribution de Châtelet [1953] [1954 a] [1954b] [1958] [1959b] [1966].

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56605

de surfaces cubiques X qui possèdent un point rationnel non-singulier mais qui ne sont pas k-rationnelles. En 1953, Selmer établit le principe de Hasse pour les surfaces cubiques diagonales

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0\,, \qquad ab/cd \in k^{*3}\,.$$

En 1955, Skolem établit le principe de Hasse pour les surfaces cubiques singulières.

3.2. La contribution de Châtelet [1953] [1954*a*] [1954*b*] [1958] [1959*b*] [1966].

Tout d'abord, Châtelet montra qu'une surface cubique non singulière qui contient un S_3 ou un S_6 satisfait le principe de Hasse. Ce résultat généralise le résultat de Selmer mentionné ci-dessus. La clé de la démonstration est que si X contient un S_6, alors X est k-birationnelle à une surface de Severi-Brauer. Les notes de 1953 et 1954 contiennent des équations concrètes pour des surfaces satisfaisant les dites conditions.

Dans [1954*b*], Châtelet se demande comment décrire l'ensemble $X(k)$ des points rationnels d'une surface cubique X lorsque k est un corps de nombres et que X n'est pas k-rationnelle, ce qui exclut une représentation paramétrique essentiellement biunivoque. On pourrait a priori chercher un nombre fini de paramétrisations multivoques $\varphi_i : X_i \to X$ avec $X(k) = \bigcup_i \varphi_i(X_i(k))$ et chaque X_i k-birationnel au plan projectif $\mathbf{P}^2_k$. Châtelet remarque que cela semble très difficile (en 1967, Manin montrera que c'est en général impossible). Aussi Châtelet fait-il la suggestion très originale suivante: chercher de telles paramétrisations, mais avec X_i k-birationnel à $\mathbf{P}^n_k$ pour un entier $n > 2$. Il prend alors comme exemple la surface X d'équation

$$N_{K/k}(x+\omega y+\omega^2 z) = 1$$

avec $K = k(\omega)$ extension cubique non cyclique du corps de nombres k. Ici $X(k) = K^{*1}$ est le groupe des éléments de K^* de norme 1. Si L/k est la clôture galoisienne de K/k, $G = \mathrm{Gal}\,(L/k) = \langle s, t\rangle$ avec $s^3 = t^2 = 1$, Châtelet montre que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : L^* &\to K^{*1} \\ x &\mapsto \big(s(x)/x\big)\cdot\big(t\,(s(x))/x\big) \end{aligned}$$

a un conoyau fini. La démonstration utilise des factorisations fort réminiscentes de la démonstration du théorème de Mordell-Weil faible. En fait, l'application φ est, pour des raisons algébriques, surjective quel que soit le corps k. Mais la méthode inspira des travaux ultérieurs (voir 3.3).

En 1958, Châtelet s'intéressa à des surfaces cubiques avec deux points singuliers conjugués:

$$y^2 - az^2 = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) \qquad (X).$$

Les résultats qu'il obtint et que je vais maintenant décrire eurent une grande influence sur les recherches ultérieures.

Pour ces surfaces, appelées depuis surfaces de Châtelet, il établit ([1959b], [1966]), lorsque k est un corps de nombres, l'existence d'un nombre fini de paramétrisations pour les points rationnels, du type suggéré plus haut (les X_i sont ici k-birationnels à $\mathbf{P}^4_k$). Ici, une seule paramétrisation ne suffit en général pas à couvrir les points rationnels d'une telle surface.

La méthode est directement inspirée de la démonstration de Weil du théorème de Mordell-Weil faible. Si K est l'extension quadratique $k(\sqrt{a})$ de k et N désigne la norme de K à k, Châtelet considère l'application:

$$f : X(k) \to (k^*/NK^*)^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x-e_1, x-e_2)$$

et montre qu'elle a une image finie. Par ailleurs, il montre que le noyau de f est constitué des points de $X(k)$ qui sont obtenus à partir de $X(K)$ par l'application p qui à un point $P \in X(K)$ associe le troisième point d'intersection avec X de la droite passant par P et par le conjugué de P (composition de P et de son conjugué). Cette application peut être vue comme l'application $\varphi_1 : X_1(k) \to X(k)$ induite par une application rationnelle définie sur k de la k-variété algébrique $X_1 = R_{K/k}(X_K)$ vers X. Ici $R_{K/k}$ est le foncteur de descente « à la Weil » qui transforme une variété définie sur K en variété définie sur k, en multipliant la dimension par le degré de K sur k. Soit S le k-tore algébrique défini par $u_1^2 - av_1^2 = 1$, $u_2^2 - av_2^2 = 1$, et soit $\mathcal{T}$ l'espace principal homogène sur X sous S défini par les équations

$$x - e_1 = u_1^2 - av_1^2, \quad x - e_2 = u_2^2 - av_2^2.$$

Ce que Châtelet établit plus précisément, c'est d'une part que l'application rationnelle $R_{K/k}(X_K) \to X$ définie par la « composition » se factorise par une application $i: R_{K/k}(X_K) \to \mathcal{T}$, d'autre part, par un calcul explicite et qui à ce jour n'a pas encore perdu tout son mystère, que l'application i est k-birationnelle. Ce calcul est analogue à la présentation de la multiplication par 2 sur une courbe de Weierstrass E comme espace principal homogène sur E sous le groupe $\mu_2 \times \mu_2$ donné par les équations $x - e_1 = u_1^2$, $x - e_2 = u_2^2$.

Comme X_K est évidemment une surface K-rationnelle, la k-variété $X_1 = R_{K/k}(X_K)$ est k-rationnelle, si bien que l'on a paramétré les points du noyau de f. Pour paramétrer les points de $X(k)$ d'image non triviale par f, Châtelet observe par un calcul fort instructif que pour tout $\alpha = f(P_0)$, les points M de $f^{-1}(\alpha) \subset X(k)$ sont obtenus à partir des points de $\varphi_1(X_1(k))$ en appliquant la « symétrie » par rapport au point P_0.

3.3. Après Châtelet.

Les travaux consécutifs à ceux de Châtelet se sont en général placés dans la perspective plus large de l'étude des surfaces rationnelles et aussi de certaines variétés rationnelles de dimension plus grande. Comme ces travaux ont fait récemment l'objet d'exposés généraux (Manin/Tsfasman 1986, l'auteur 1986), on se contentera ici de décrire les développements ayant trait directement aux recherches de Châtelet.

Manin et Iskovskih, généralisant des résultats d'Enriques (1897) ont établi une classification k-birationnelle des surfaces rationnelles. Dans cette classification, les surfaces de Châtelet généralisées :

$$y^2 - az^2 = P(x)\,, \quad \deg P \leqslant 4$$

apparaissent comme les surfaces arithmétiquement non-triviales les plus simples. Elles ont servi de banc d'essai pour toutes les conjectures concernant les variétés rationnelles, conjectures dont on a quelques raisons d'espérer qu'elles s'insèrent dans un ensemble bien plus vaste, sortant du cadre des variétés rationnelles.

Pour la commodité de l'exposé, disons que l'on s'est intéressé aux trois thèmes suivants :

k-rationalité. Si X est une surface (variété) rationnelle avec un k-point non singulier, qu'est-ce qui empêche X d'être k-rationnelle, ou du moins k-stablement rationnelle ($X \times \mathbf{P}^r_k$ k-birationnel à $\mathbf{P}^s_k$), et y a-t-il une différence entre ces deux notions (problème de Zariski, mentionné par B. Segre en 1950) ?

Principe de Hasse. Si k est un corps de nombres, décrire l'obstruction à la validité du principe de Hasse.

Description des points rationnels. Si k est un corps de nombres, et $X(k) \neq \emptyset$, obtenir des paramétrisations finies du type de Châtelet pour d'autres classes de variétés. A défaut, décrire des relations d'équivalence sur $X(k)$ approchant la décomposition en classes de paramétrisation.