

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES GRANDS THÈMES DE FRANÇOIS CHÂTELET  
**Autor:** Colliot-Thélène, Jean-Louis  
**Kapitel:** 3.1. Avant Châtelet.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56605>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

générale fut développée par E. Lutz (1937) et A. Weil (1936), qui étudièrent la structure du groupe topologique  $E(k)$  lorsque  $k$  est un corps  $p$ -adique (ce qu'on peut transcrire aujourd'hui au moyen des groupes formels et des modèles de Néron). Châtelet attira l'attention sur le fait que la méthode d'E. Lutz permet la détermination effective des points exceptionnels lorsque le corps de base  $k$  est un corps de nombres quelconque. Dans une note de 1940, Châtelet observe que les résultats de Lutz permettent de borner uniformément la torsion des courbes elliptiques définies sur un corps de nombres  $k$  et d'invariant  $j$  fixé (il suffit de se placer sur une complétion  $p$ -adique de  $k$ ; à  $k$ -isomorphisme près, il n'y a alors qu'un nombre fini de courbes elliptiques d'invariant  $j$  donné, et pour chacune d'elles le groupe de torsion est fini). C'est un problème ouvert de savoir si la condition sur  $j$  peut être omise (dans le cas  $k = \mathbf{Q}$ , c'est un théorème de Mazur que l'ordre du groupe de torsion est au plus 16).

### 3. SURFACES CUBIQUES

C'est la partie de l'œuvre de Châtelet qui a joué un grand rôle dans mes recherches personnelles.

Sauf mention du contraire, les surfaces cubiques ici considérées sont supposées absolument irréductibles et non coniques. Le corps de base  $k$  est pris de caractéristique zéro.

#### 3.1. AVANT CHÂTELET.

De 1940 à 1944, Mordell et B. Segre s'intéressent aux surfaces cubiques. Ils montrent que si une telle surface  $X$  définie sur  $k$  possède un point rationnel non singulier, alors il existe une application rationnelle dominante définie sur  $k$  d'un plan projectif sur  $X$ . En particulier les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. B. Segre montre en 1944 qu'une surface cubique singulière  $X$  qui possède un point rationnel non singulier est  $k$ -rationnelle ( $k$ -birationnelle au plan projectif) sauf si  $X$  possède exactement deux points singuliers conjugués. En 1951, ce même Segre étudie les surfaces cubiques non singulières. On dit qu'une telle surface contient un  $S_n$  si elle contient un ensemble globalement défini sur  $k$  de  $n$  droites gauches deux à deux. Segre montre que si  $X$  est  $k$ -rationnelle, alors  $X$  contient nécessairement un  $S_1$ , un  $S_2$ , un  $S_3$  ou un  $S_6$  (comme le montrèrent indépendamment en 1970 Swinnerton-Dyer et Iskovskih,  $X$  contient en fait un  $S_2$ , un  $S_3$  ou un  $S_6$ ). En 1951, Segre donne aussi les premiers exemples

de surfaces cubiques  $X$  qui possèdent un point rationnel non-singulier mais qui ne sont pas  $k$ -rationnelles. En 1953, Selmer établit le principe de Hasse pour les surfaces cubiques diagonales

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0, \quad ab/cd \in k^{*3}.$$

En 1955, Skolem établit le principe de Hasse pour les surfaces cubiques singulières.

### 3.2. LA CONTRIBUTION DE CHÂTELET [1953] [1954a] [1954b] [1958] [1959b] [1966].

Tout d'abord, Châtelet montra qu'une surface cubique non singulière qui contient un  $S_3$  ou un  $S_6$  satisfait le principe de Hasse. Ce résultat généralise le résultat de Selmer mentionné ci-dessus. La clé de la démonstration est que si  $X$  contient un  $S_6$ , alors  $X$  est  $k$ -birationnelle à une surface de Severi-Brauer. Les notes de 1953 et 1954 contiennent des équations concrètes pour des surfaces satisfaisant les dites conditions.

Dans [1954b], Châtelet se demande comment décrire l'ensemble  $X(k)$  des points rationnels d'une surface cubique  $X$  lorsque  $k$  est un corps de nombres et que  $X$  n'est pas  $k$ -rationnelle, ce qui exclut une représentation paramétrique essentiellement biunivoque. On pourrait a priori chercher un nombre fini de paramétrisations multivoques  $\varphi_i: X_i \rightarrow X$  avec  $X(k) = \bigcup_i \varphi_i(X_i(k))$  et chaque  $X_i$   $k$ -birationnel au plan projectif  $\mathbf{P}_k^2$ . Châtelet remarque que cela semble très difficile (en 1967, Manin montrera que c'est en général impossible). Aussi Châtelet fait-il la suggestion très originale suivante: chercher de telles paramétrisations, mais avec  $X_i$   $k$ -birationnel à  $\mathbf{P}_k^n$  pour un entier  $n > 2$ . Il prend alors comme exemple la surface  $X$  d'équation

$$N_{K/k}(x + \omega y + \omega^2 z) = 1$$

avec  $K = k(\omega)$  extension cubique non cyclique du corps de nombres  $k$ . Ici  $X(k) = K^{*1}$  est le groupe des éléments de  $K^*$  de norme 1. Si  $L/k$  est la clôture galoisienne de  $K/k$ ,  $G = \text{Gal}(L/k) = \langle s, t \rangle$  avec  $s^3 = t^2 = 1$ , Châtelet montre que l'application

$$\begin{aligned} \varphi: L^* &\rightarrow K^{*1} \\ x &\mapsto (s(x)/x) \cdot (t(s(x))/x) \end{aligned}$$

a un conoyau fini. La démonstration utilise des factorisations fort réminiscentes de la démonstration du théorème de Mordell-Weil faible. En