Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ONT 350 ANS
Autor: Wanner, G.
Kapitel: Exercices
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56604

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

EXERCICES

1. (Descartes 1639). Montrer que, pour la deuxième courbe de Debeaune, le segment de la droite $y = x + a$ coupé par l'horizontale et la tangente de chaque point B est toujours de longueur $a\sqrt{2}$ (voir fig. 2).

2. Calculer par la méthode de Newton la solution de l'équation différentielle (1) pour la condition initiale $y(0) = 1$.

   Résultat:

$$y = 1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5, \ \&c.$$

3. Appliquer au premier problème de Debeaune
   a) la méthode de Newton,
   b) la séparation des variables suivie d'une quadrature,
   c) la méthode de Leibniz (formule (4)).

   On trouve alors la série de Taylor pour e^x et la formule

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

4. Expliquer la signification des lignes dessinées à la figure 10 concernant la solution de la tractrice. Calculer l'intégrale (14) en utilisant la substitution $a^2 - y^2 = v^2$.

5. La caténaire renversée est-elle la forme idéale pour un arc portant un pont?

6. Calculer l'intégrale (25) pour $m = 1$ et montrer que la solution est un cercle.

7. (Johann Bernoulli 1697). Transformer l'équation de Bernoulli (15) en une équation linéaire en posant $y = v^{\frac{1}{1-n}}$.

8. (Le pendule isochrone). La force tangentielle d'un corps soumis à la pesanteur et glissant sur une courbe est

$$mg \cdot \sin \alpha = mg \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

   où $p = y'$. On cherche une courbe pour laquelle cette force est proportionnelle à l'arc s, donc on veut que

(26) $$s = c\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

En conséquence, le mouvement du corps est une oscillation purement harmonique et la période indépendante de l'amplitude. Trouver la solution.

Indication: Dériver (26) (comme en (8)) et utiliser $ds = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p} \cdot dy$. On tombe sur l'équation (17) («animo revolvens inexpectatam illam identitatem *Tautochronae Hugeniae* nostrae que *Brachystochronae*» (Johann Bernoulli)).

> «Dieses ist von Christian Huygens ersonnen, dem genialsten Uhrmacher aller Zeiten» (Horologium Oscillatorium, Paris 1673).
>
> (A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Band I).

9. On cherche une courbe de longueur L pour laquelle le centre de gravité est le plus bas possible, i.e.

$$\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \min!$$

$$\text{sous condition} \int_a^b \left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{L}{b-a}\right) dx = 0.$$

Montrer que la «Solutio huius Quaestionis esse curvam Catenariam» (Euler [11], Cap. V, § 73).

10. Obtenir l'équation de la brachystochrone (17) en se basant sur l'équation d'Euler (21).

11. Montrer que la solution du problème isopérimétrique (25), pour $m \to \infty$, converge vers un triangle.