**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 34 (1988)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ONT 350 ANS
**Autor:** Wanner, G.
**Kapitel:** Exercices
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-56604

## EXERCICES

1. (Descartes 1639). Montrer que, pour la deuxième courbe de Debeaune, le segment de la droite $y = x + a$ coupé par l'horizontale et la tangente de chaque point $B$ est toujours de longueur $a\sqrt{2}$ (voir fig. 2).

2. Calculer par la méthode de Newton la solution de l'équation différentielle (1) pour la condition initiale $y(0) = 1$.

   Résultat:

$$y = 1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5\,,\ \&c\,.$$

3. Appliquer au premier problème de Debeaune
   a) la méthode de Newton,
   b) la séparation des variables suivie d'une quadrature,
   c) la méthode de Leibniz (formule (4)).

   On trouve alors la série de Taylor pour $e^x$ et la formule

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

4. Expliquer la signification des lignes dessinées à la figure 10 concernant la solution de la tractrice. Calculer l'intégrale (14) en utilisant la substitution $a^2 - y^2 = v^2$.

5. La caténaire renversée est-elle la forme idéale pour un arc portant un pont?

6. Calculer l'intégrale (25) pour $m = 1$ et montrer que la solution est un cercle.

7. (Johann Bernoulli 1697). Transformer l'équation de Bernoulli (15) en une équation linéaire en posant $y = v^{\frac{1}{1-n}}$.

8. (Le pendule isochrone). La force tangentielle d'un corps soumis à la pesanteur et glissant sur une courbe est

$$mg \cdot \sin\alpha = mg\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

   où $p = y'$. On cherche une courbe pour laquelle cette force est proportionnelle à l'arc $s$, donc on veut que

$$s = c \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}. \tag{26}$$

En conséquence, le mouvement du corps est une oscillation purement harmonique et la période indépendante de l'amplitude. Trouver la solution.

*Indication:* Dériver (26) (comme en (8)) et utiliser $ds = \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} \cdot dy$. On tombe sur l'équation (17) («animo revolvens inexpectatam illam identitatem *Tautochronae Hugeniae* nostrae que *Brachystochronae*» (Johann Bernoulli)).

> «Dieses ist von Christian Huygens ersonnen, dem genialsten Uhrmacher aller Zeiten» (Horologium Oscillatorium, Paris 1673).
>
> (A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Band I).

9. On cherche une courbe de longueur $L$ pour laquelle le centre de gravité est le plus bas possible, i.e.

$$\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = \min!$$

sous condition $\displaystyle\int_a^b \left(\sqrt{1 + y'^2} - \frac{L}{b - a}\right) dx = 0$.

Montrer que la «Solutio huius Quaestionis esse curvam Catenariam» (Euler [11], Cap. V, §73).

10. Obtenir l'équation de la brachystochrone (17) en se basant sur l'équation d'Euler (21).

11. Montrer que la solution du problème isopérimétrique (25), pour $m \to \infty$, converge vers un triangle.