Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ONT 350 ANS
Autor: Wanner, G.
Kapitel: Problèmes isopérimétriques, suite
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56604

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

il introduit l'idée du «multiplicateur de Lagrange» (voir [16], première partie, Section IV, § 1) en remplaçant (22) par

$$\int_a^b \mathscr{L}(\lambda, x, y, y')dx = \min! \text{ (vel max!)} \tag{23}$$

où $\mathscr{L}$ est «la fonction de Lagrange»

$$\mathscr{L}(\lambda, x, y, y') = F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y') .$$

Problèmes isopérimétriques, suite

Avec ces formules, introduites dans (21), le problème isopérimétrique de Jacob Bernoulli devient

$$y' = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{(K+y^m)^2} - 1} . \tag{24}$$

La solution est donc décrite par quadratures

$$\int \frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = x + C . \tag{25}$$

Les constantes C, K et λ sont à ajuster aux conditions aux bords et à la longueur L. Ce n'est que pour $m = 1$ que cette intégrale est résoluble avec efforts raisonnables (voir Euler [11], Caput V, Exemplum II; «quae est aequatio generalis pro Circulo»).

Pour $m > 1$ il s'agit d'intégrales «elliptiques» ou «hyperelliptiques» et on a besoin de méthodes numériques. Par exemple, si on pose $A = 0$, $B = 1$ et $L = 4$, les constantes K et λ dans (25) doivent satisfaire (puisque la courbe est symétrique il suffit de ne considérer que sa moitié ascendante)

$$\int_0^{y_{max}} \frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = 0.5 , \quad \text{et} \quad \int_0^{y_{max}} \frac{\sqrt{\lambda}dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = 2 . \tag{26}$$

où

$$y_{max} = (\sqrt{\lambda} - K)^{1/m}$$

est la valeur de y pour laquelle le dénominateur devient zéro. Un processus itératif (méthode de Newton) combiné avec le calcul numérique des intégrales

(méthode de Gauss avec traitement spécial de la singularité en y_{max}) donne alors les valeurs suivantes:

m	K	λ
1	−0.634994	0.653218
2	−0.632487	3.825194
3	−0.607747	17.505763
4	−0.442476	73.491858
5	0.105432	296.416889

Les solutions correspondantes de l'équation (24) sont représentées dans la figure 15.

Johann obtient une solution particulière

$$\int \frac{y^m dy}{\sqrt{a^{2m} - y^{2m}}} = x + C,$$

laquelle s'avère correcte (cf. (25)). Toutefois, sa solution générale est fausse, comme le constate Jacob avec satisfaction («...ou du moins nous dire, s'il n'y a point de faute d'impression dans son égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$. & ... si elle est fausse, comme je le soutiens, à moins qu'il ne veuille se désister de ses prétentions»).

EPILOGUE

Les lecteurs que plus de détails intéressent sont invités à consulter le petit livre de J.E. Hofmann [14], extrêmement bien documenté. Les travaux des Frères Bernoulli, d'Euler et de Lagrange sont accessibles dans leurs «Opera Omnia» et «Œuvres». Une description de la suite de la théorie (Cauchy, Peano, Poincaré, Gronwall) et des méthodes numériques (Adams, Runge, Kutta) est donnée dans notre monographie [13] (cf. Sections I.4-I.16, II.1 et III.1 en particulier).

Remerciement. Je tiens à remercier M. P. de la Harpe pour son intérêt et pour ses observations pertinentes.