Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ONT 350 ANS

Autor: Wanner, G.

Kapitel: Brachystochrone

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56604

deux idées élégantes ([8]). La première est rapportée dans l'exercice 7. Pour la deuxième, il pose $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ comme produit de deux fonctions (version originale: $y = m \cdot z$). Ceci donne

$$\frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u = p(x) \cdot u \cdot v + q(x) \cdot u^n \cdot v^n .$$

On peut maintenant égaliser les deux termes séparément et on trouve

$$(16a) \qquad \frac{du}{dx} = p(x) \cdot u \qquad \text{pour obtenir } u ,$$

$$(16b) \qquad \frac{dv}{dx} = q(x) u^{n-1} \cdot v^n \qquad \text{pour obtenir } v .$$

Pour le cas spécial $n = 0$, la formule (15) est l'équation linéaire inhomogène et les formules (16a) et (16b) deviennent ce qu'on appelle «la formule de la variation de la constante».

La Brachystochrone

«Il y a précisément un an que je proposai le Problème de la plus vite descente, dans les *Actes de Leipsic* comme tout nouveau, ne sçachant pas alors qu'il avait été tenté déjà par GALILEE».

(Joh. Bernoulli, juin 1697)

«...et trouver la raison de la réfraction dans notre principe commun, qui est que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées.»

(Fermat à De La Chambre, 1657)

«Mais, parce que j'en jugeai l'invention très difficile et très embarrassée, puisque ces questions de maximis et minimis conduisent d'ordinaire à des opérations de longue haleine et qui se brouillent aisément par une infinité d'asymmétries qu'on trouve sur son chemin, je laissai là ma pensée pendant plusieurs années, en attendant que quelque géomètre moins paresseux que moi en fît ou la découverte ou la démonstration. Personne ne voulut entreprendre ce travail; ...»

(Fermat, 1664)

En automne 1696, Jacob Bernoulli traite dans ses études personnelles le problème de la brachystochrone et, comme Galilée, croit que la solution est un cercle. Voici une bonne occasion pour Johann de blâmer son frère aux yeux du monde; il lance un grand concours dans les A.E. de 1696 ([7]) «Profundioris in primis Mathesos cultori, Salutem!») dans le but de résoudre ce problème. En juin 1697, le journal reçoit les solutions de Newton (anonyme, mais identifiée grâce à sa «griffe»!), Leibniz, Johann (évidemment!), de l'Hospital et celle de Jacob, malheureusement correcte elle aussi. La solution de Johann est la plus élégante: il fait une analogie avec l'optique (fig. 12):

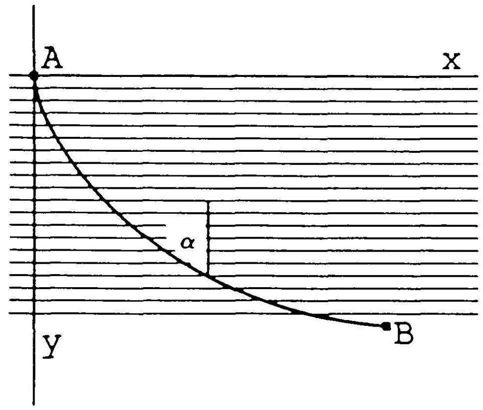

FIGURE 12.
La brachystochrone.

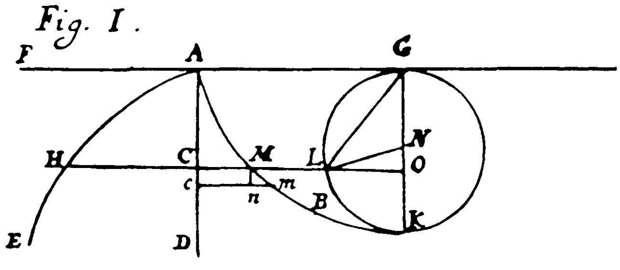

FIGURE 13.
La brachystochrone
(dessin de Joh. Bernoulli).

Il pense à de nombreuses couches matérielles où la «vitesse de lumière» est donnée par $v = \sqrt{2gy}$ (voir (4)). Le chemin le plus rapide est celui qui satisfait partout à la loi de réfraction (principe de Fermat)

$$\frac{v}{\sin \alpha} = K .$$

Ceci donne, à cause de $\sin \alpha = 1/\sqrt{1 + y'^2}$,

$$\sqrt{1 + y'^2} \cdot \sqrt{2gy} = K \quad \text{ou} \quad dx = \sqrt{\frac{y}{c - y}} \cdot dy . \tag{17}$$

Toujours en vertu de «ergo & horum integralia aequantur», la substitution

$$y = c \cdot \sin^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \cos 2u \tag{18a}$$

conduit à la formule

$$x = cu - \frac{c}{2} \sin 2u + K . \tag{18b}$$

La solution est donc une *cycloïde.*