

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REPRÉSENTATIONS ET TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE  
POLYNÔME DE JONES-CONWAY  
**Autor:** Vogel, Pierre  
**Kapitel:** §6. Une généralisation du polynôme de Jones-Conway  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56602>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

la classe commune des  $c_i$  et  $P$  est un polynôme de  $k[c] = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]$ . Il en résulte que la classe de  $t_n(\tau)$  modulo  $J$  est représentée par  $cP'$ ,  $P'$  désignant la classe de  $P$  dans l'anneau  $A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c}$ . D'après les théorèmes d'Alexander et Markov, le polynôme  $P'$  ne dépend que de l'entrelacs  $\hat{\tau}$ . On a ainsi associé à tout entrelacs orienté  $E$  un polynôme  $P_E = P'$  de l'anneau  $A$ . Cet anneau est en fait le sous-anneau de  $k[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$  engendré par  $\alpha, \beta, \beta^{-1}$  et  $(1+\beta)\alpha^{-1}$ .

Si  $x$  est un croisement d'un entrelacs  $E$  dessiné dans le plan, la méthode d'Alexander permet de modifier le dessin de  $E$  sans changer le croisement  $x$  de façon à obtenir un entrelacs  $E'$  isotope à  $E$  et de la forme  $\hat{\tau}$ , où  $\tau$  est une tresse de  $B_n$ . Il en résulte que les trois entrelacs  $E_+$ ,  $E_-$  et  $E_0$  obtenus par modification de  $E$  au voisinage de  $x$  sont isotopes à des entrelacs de la forme  $\hat{\tau}_+$ ,  $\hat{\tau}_-$  et  $\hat{\tau}_0$  où l'on a

$$\tau_+ = \tau' \sigma_i \tau'', \quad \tau_- = \tau' \sigma_i^{-1} \tau'', \quad \tau_0 = \tau' \tau''.$$

On a alors dans l'algèbre  $H_n$  l'égalité suivante:

$$\tau_+ - \alpha \tau_0 + \beta \tau_- = 0,$$

ce qui implique

$$P_{E_+} - \alpha P_{E_0} + \beta P_{E_-} = 0.$$

Si  $E$  est le nœud trivial il est de la forme  $\hat{1}_1$  et la classe de  $1_1$  dans le quotient de  $\Lambda$  par  $I_0$  est égal à  $c$ . On a donc

$$P_E = 1$$

et le théorème 1-7 est alors clair.

## § 6. UNE GÉNÉRALISATION DU POLYNÔME DE JONES-CONWAY

Soit  $n > 0$  un entier. Soit  $L$  une sous-variété différentiable compacte orientée de dimension 1 de l'espace usuel  $\mathbf{R}^3$  entièrement contenue dans la bande  $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$ . On suppose que le bord de  $L$  est standard. C'est-à-dire qu'il est formé des  $2n$  points de coordonnées  $(i, j, 0)$  avec  $i = 0, 1$  et  $j$  variant de 1 à  $n$ . On suppose de plus qu'en chacun de ces points, le vecteur tangent à  $L$  est vertical descendant, c'est-à-dire à projection nulle sur le plan horizontal  $0 \times \mathbf{R}^2$  et à projection négative sur l'axe vertical  $\mathbf{R} \times 0$ .

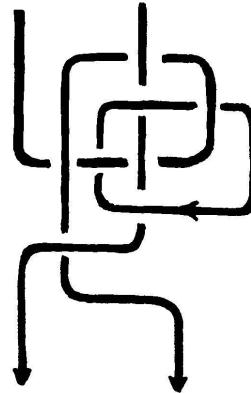
*Définition.* Une telle variété  $L$  sera appelée semi-tresse à  $n$  brins. Deux semi-tresses à  $n$  brins seront dites isotopes s'il existe une isotopie de la bande  $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$  fixe sur le bord qui envoie l'une sur l'autre.

Soient  $L$  et  $L'$  deux semi-tresses à  $n$  brins. En recollant les deux bandes l'une au-dessus de l'autre (celle contenant  $L$  étant au-dessus), on obtient une nouvelle semi-tresse. Cette semi-tresse sera appelée produit de  $L$  par  $L'$  et notée  $LL'$ .

**PROPOSITION 6-1.** *L'ensemble des classes d'isotopie de semi-tresses à  $n$  brins est un monoïde unitaire pour le produit. Ce monoïde contient le groupe des tresses  $B_n$  comme sous-monoïde. Il sera noté  $\hat{B}_n$ .*

*Remarque.* Contrairement au groupe  $B_n$ , le monoïde  $\hat{B}_n$  est très gros, même pour  $n$  petit. Ainsi  $\hat{B}_0$  est isomorphe au monoïde des classes d'isotopie d'entrelacs orientés, la loi de composition étant la somme disjointe.

Exemple de semi-tresse à 2 brins :



Comme précédemment, on posera

$$A = k[c]/_{1 + \beta - \alpha c} = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]/_{1 + \beta - \alpha c}.$$

**THÉORÈME 6-2.** *Il existe pour tout  $n > 0$  une unique représentation  $\rho$  du monoïde  $\hat{B}_n$  dans l'algèbre de Hecke  $H_n \otimes_k A$ , possédant les propriétés suivantes :*

- $\rho$  étend la représentation canonique de  $B_n$  dans  $H_n$ ,
- si  $L_+, L_-$  et  $L_0$  sont trois semi-tresses à  $n$  brins obtenues à partir d'une semi-tresse par modifications au voisinage d'un croisement (avec les mêmes notations que dans le cas des entrelacs), on a

$$\rho(L_+) + \beta \rho(L_-) - \alpha \rho(L_0) = 0.$$

*Démonstration.* Elle occupera tout le reste du paragraphe.

i) Construction de  $\rho$ .

Soit  $K$  le corps de fraction de  $A$ . Soit  $\varepsilon$  l'application canonique de  $H_n$  dans  $A$ , composée de la trace de  $H_n$  dans  $\Lambda$  et de l'application quotient de  $\Lambda$  dans  $A$  qui envoie chaque classe  $c_i$  en  $c$ .

LEMME 6-3. L'application qui à  $u$  et  $v$  de  $H_n$  associe  $\varepsilon(uv)$  induit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur le  $K$ -espace vectoriel  $H_n \otimes K$ .

*Démonstration.* Posons, pour tout  $u$  et  $v$  de  $H_n$ ,  $\langle u, v \rangle$  l'élément  $\varepsilon(uv)$  de  $A$ . Il est clair que le produit scalaire  $\langle , \rangle$  est symétrique. Si l'on quotiente  $k$ ,  $A$ ,  $H_n$  et  $\Lambda$  par les relations

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1,$$

$k$  devient  $\mathbf{Z}$ ,  $\Lambda$  devient l'anneau  $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \dots]$ ,  $A$  devient  $\mathbf{Z}[c]$  et  $H_n$  devient  $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$ . Si  $\sigma$  est une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ , sa classe dans  $\Lambda$  est le monôme  $c_1^{p_1} c_2^{p_2} \dots$ , où  $p_i$  représente le nombre d'orbites de  $\sigma$  à  $i$  éléments. En effet, si  $\sigma$  est un cycle d'ordre  $n$ , il est conjugué à la permutation  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$  et sa classe dans  $\Lambda$  est  $c_n$ . Si  $\sigma$  est formé de cycles d'ordres  $q_i$ ,  $\sigma$  est conjugué à une permutation  $\tau_1 \tau_2 \dots$  où les  $\tau_i$  sont des cycles d'ordres  $q_i$  et sa classe est le produit des classes  $c_{q_i}$ .

Il en résulte que la classe de  $\sigma$  dans  $\mathbf{Z}[c]$  est égale à  $c^m$ ,  $m$  étant le nombre d'orbites de  $\sigma$ . Et le produit scalaire  $\langle \sigma, \tau \rangle$  de deux permutations de  $\mathfrak{S}_n$  est égal à  $c^m$ ,  $m$  étant le nombre d'orbites de  $\sigma\tau$ . Soit  $\Delta$  le déterminant de ce produit scalaire calculé dans la base  $\mathfrak{S}_n$  de  $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$ . On a

$$\Delta = \sum_f [f] \prod_{\sigma} c^{m(\sigma f(\sigma))},$$

le produit portant sur toutes les permutations de  $\mathfrak{S}_n$  et la somme sur toutes les bijections de  $\mathfrak{S}_n$  dans lui-même. Le symbole  $[f]$  désigne la signature de  $f$  et  $m(\tau)$  désigne le nombre d'orbites de  $\tau$ .

Comme  $m(\tau)$  est majoré par  $n$ , quelle que soit la permutation  $\tau$ , le degré de  $\Delta$  est majoré par  $nn!$ . D'autre part, le coefficient de  $c^{nn!}$  dans  $\Delta$  est la somme des nombres  $[f]$ ,  $f$  parcourant l'ensemble des bijections de  $\mathfrak{S}_n$  dans lui-même telles que  $\sigma f(\sigma)$  ait  $n$  orbites quel que soit  $\sigma$ , c'est-à-dire telles que  $\sigma f(\sigma)$  soit l'identité quel que soit  $\sigma$ . Cet ensemble de bijections est donc réduit à un élément et le coefficient de  $c^{nn!}$  dans  $\Delta$  est non nul. Il en résulte que  $\Delta$  est non nul. Or  $\Delta$  est la classe du déterminant de la forme bilinéaire symétrique  $\langle , \rangle$  dans le quotient  $\mathbf{Z}[c]$  de  $A$ . On en déduit que le produit scalaire  $\langle , \rangle$  est non dégénéré dans  $K$ .

Soit  $L$  une semi-tresse à  $n$  brins. Pour toute tresse  $\sigma$  de  $B_n$  on peut refermer la semi-tresse  $L\sigma$  et l'on obtient un entrelacs orienté  $E_\sigma$ . On notera  $F(\sigma)$  le polynôme de Jones-Conway de  $E_\sigma$ .

**LEMME 6-4.** *L'application  $F$  s'étend en une application linéaire, toujours notée  $F$ , de l'algèbre  $H_n$  dans l'anneau  $A$ .*

*Démonstration.* On étend linéairement  $F$  à l'algèbre de groupe  $k[B_n]$ . Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux tresses et  $i < n$  un entier. D'après les propriétés du polynôme de Jones-Conway, on a

$$F(\sigma\sigma_i^2\tau) - \alpha F(\sigma\sigma_i\tau) + \beta F(\sigma\tau) = 0$$

et  $F$  se factorise à travers l'algèbre  $H_n$ .

Comme le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est non dégénéré sur  $K$ , il existe un unique élément  $U$  de l'algèbre  $H_n \otimes K$  tel que

$$\forall u \in H_n, \quad cF(u) = \langle U, u \rangle$$

et  $U$  ne dépend que de la classe d'isotopie de la semi-tresse  $L$ ;  $U$  sera noté  $\rho(L)$ .

### ii) Propriétés de $\rho$ .

**LEMME 6-5.** *Si  $L$  est une tresse  $\tau$ ,  $\rho(\tau)$  est égal à la classe de  $\tau$  dans  $H_n$ .*

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  une tresse. En refermant la tresse  $\tau\sigma$  on obtient l'entrelacs  $E_\sigma$ . On en déduit que la classe  $\varepsilon(\tau\sigma)$  dans  $A$  est égale à  $cP_{E_\sigma}$  et l'on a

$$cF(\sigma) = \langle \tau, \sigma \rangle.$$

Comme ceci a lieu pour toute tresse  $\sigma$  et donc pour tout élément de  $H_n$ ,  $\rho(\tau)$  est égal à la classe de  $\tau$  dans  $H_n$ .

**LEMME 6-6.** *Si  $L$  est une semi-tresse à  $n$  brins et  $\sigma$  une tresse de  $B_n$ , on a*

$$\rho(L\sigma) = \rho(L)\rho(\sigma).$$

*Démonstration.* Soit  $\tau$  une tresse de  $B_n$ . Le produit scalaire  $\langle \rho(L\sigma), \tau \rangle$  est égal au produit de  $c$  par le polynôme de Jones-Conway de l'entrelacs obtenu en fermant  $L\sigma\tau$ . Il en résulte que  $\langle \rho(L\sigma), \tau \rangle$  est égal à  $\langle \rho(L), \sigma\tau \rangle$

c'est-à-dire à  $\langle \rho(L)\sigma, \tau \rangle$ . Comme ceci a lieu pour toute tresse  $\tau$ ,  $\rho(L\sigma)$  est égal à  $\rho(L)\rho(\sigma)$ .

**LEMME 6-7.** *Soient  $L_+$ ,  $L_-$  et  $L_0$  trois semi-tresses obtenues par modification d'une semi-tresse près d'un croisement. Le croisement étant de signe positif pour  $L_+$  et négatif pour  $L_-$  et ayant disparu dans  $L_0$ . Alors on a*

$$\rho(L_+) + \beta\rho(L_-) - \alpha\rho(L_0) = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  une tresse. Alors les trois entrelacs obtenus en fermant  $L_+\sigma$ ,  $L_-\sigma$  et  $L_0\sigma$  sont obtenus d'un entrelacs par modifications au voisinage d'un croisement. D'après les propriétés du polynôme de Jones-Conway, on a

$$\langle \rho(L_+), \sigma \rangle + \beta \langle \rho(L_-), \sigma \rangle - \alpha \langle \rho(L_0), \sigma \rangle = 0$$

et l'on en déduit la formule cherchée.

### iii) Unicité de $\rho$ .

Soit  $L$  une semi-tresse représentée par une projection régulière sur une bande  $[0, 1] \times \mathbf{R}$  du plan. Notons  $C_1, C_2, \dots, C_n$  les composantes connexes de  $L$  qui partent de la partie supérieure de la bande en les numérotant de façon que les points supérieurs des composantes soient placés de la gauche vers la droite. On notera  $E$  l'entrelacs formé des composantes fermées de  $L$ . On dira que  $L$  est ascendante si  $E$  est en dessous de chaque  $C_i$  et si, en parcourant  $C_1$  puis  $C_2$  et ainsi de suite jusqu'à  $C_n$ , chaque fois que l'on croise une portion de courbe déjà vue, on la croise par dessus. Il est clair que si  $L$  est ascendante, l'union des  $C_i$  est dénouée et  $L$  est isotope à la somme disjointe d'une tresse et d'un entrelacs. Si  $L$  est une semi-tresse il suffit de modifier les positions dessus-dessous de certains croisements et l'on obtient une semi-tresse ascendante.

**LEMME 6-8.** *Pour toute semi-tresse  $L$  à  $n$  brins,  $\rho(L)$  appartient à  $H_n \otimes A$ .*

**LEMME 6-9.** *Soit  $\rho'$  une application de  $\hat{B}_n$  dans  $H_n \otimes A$  qui vérifie les propriétés du théorème 6-1. Alors pour toute semi-tresse  $L$ ,  $\rho'(L)$  est égal à  $\rho(L)$ .*

**LEMME 6-10.** *Soient  $L$  et  $L'$  deux semi-tresses à  $n$  brins. Alors on a*

$$\rho(LL') = \rho(L)\rho(L').$$

*Démonstrations.* Ces lemmes vont être démontrés par récurrence sur le nombre de croisements de  $L$ . Supposons donc que les lemmes sont vérifiés pour toute semi-tresse ayant au plus  $m - 1$  croisements. Soit  $L$  une semi-tresse ayant  $m$  croisements. Si l'on modifie un croisement de  $L$  (par modification dessus-dessous) on obtient une nouvelle semi-tresse  $L_1$ . Soit  $L_0$  la semi-tresse obtenue en supprimant le croisement. D'après le lemme 6-7, on a

$$\rho(L) + \beta\rho(L_1) = \alpha\rho(L_0) \quad \text{ou} \quad \beta\rho(L) + \rho(L_1) = \alpha\rho(L_0)$$

suivant le signe du croisement considéré. Comme  $L_0$  a  $m - 1$  croisements,  $\rho(L_0)$  appartient à  $H_n \otimes A$ ,  $\rho'(L_0)$  est égal à  $\rho(L_0)$  et  $\rho(L_0 L')$  est égal à  $\rho(L_0)\rho(L')$ . On en déduit que  $\rho(L)$  appartient à  $H_n \otimes A$  si et seulement si  $\rho(L_1)$  appartient à  $H_n \otimes A$ , que  $\rho'$  et  $\rho$  sont égaux en  $L$  si et seulement si ils sont égaux en  $L_1$  et que  $\rho(LL')$  est égal à  $\rho(L)\rho(L')$  si et seulement si  $\rho(L_1 L')$  est égal à  $\rho(L_1)\rho(L')$ .

Pour montrer les propriétés cherchées on peut supposer, quitte à modifier les croisements non descendants de  $L$ , que  $L$  est descendant. La semi-tresse  $L$  est alors isotope à l'union disjointe d'une tresse  $\tau$  et d'un entrelacs  $E$ .

Soit  $\sigma$  une tresse. L'entrelacs obtenu en fermant  $L\sigma$  est l'union disjointe de  $E$  et de l'entrelacs obtenu en fermant  $\tau$ . On a donc

$$\langle \rho(L), \sigma \rangle = \langle \tau, \sigma \rangle cP_E$$

ce qui implique que  $\rho(L)$  est égal à  $\rho(\tau)cP_E$  et par suite appartient à  $H_n \otimes A$ .

D'autre part, pour tout entrelacs orienté  $E'$ , on peut considérer l'image par  $\rho'$  de l'union disjointe de  $\tau$  et de  $E'$ . On construit ainsi un invariant polynomial d'entrelacs qui vérifie les propriétés du polynôme de Jones-Conway, sauf la propriété de valoir 1 sur l'entrelacs trivial. D'après l'unicité du polynôme de Jones-Conway, on a

$$\rho'(\tau \bigcup E') = \rho(\tau)cP_E.$$

Comme il en est de même pour  $\rho$ ,  $\rho$  et  $\rho'$  prennent la même valeur en  $L$ .

Enfin, on remarque que  $LL'$  est isotope à l'union disjointe de  $\varepsilon$  et de  $\tau L'$ . On a donc pour toute tresse  $\sigma$

$$\langle \rho(LL'), \sigma \rangle = \langle \rho(L'), \sigma \tau \rangle cP_E,$$

ce qui implique

$$\rho(LL') = \rho(\tau)\rho(L')cP_E.$$

Comme ceci a lieu quel que soit  $L'$ , on a

$$\rho(L) = \rho(\tau)cP_E$$

et l'on a

$$\rho(LL') = \rho(L)\rho(L').$$

Les lemmes sont alors démontrés, ce qui prouve que  $\rho$  est une représentation de  $\hat{B}_n$  dans  $H_n \otimes A$  qui prolonge la représentation canonique de  $B_n$  dans  $H_n$ , qu'elle vérifie la formule voulue sur les semi-tresses  $L_+$ ,  $L_-$  et  $L_0$ , et que c'est la seule représentation vérifiant ces propriétés.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALEXANDER, J. W. A lemma on a system of knotted curves. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 9 (1923), 93-95.
- [2] —— A matrix knot invariant. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 19 (1933), 272-275.
- [3] BIRMAN, J. S. *Braids, links and mapping class group*. Annals of Math. Studies n° 82. Princeton Univ. Press. Princeton, N.J. (1976).
- [4] BIRMAN, J. S. and H. WENZL. Braids, links, polynomials and a new algebra. Preprint 1986.
- [5] BRANDT, R. D., W. B. R. LICKORISH and K. C. MILLETT. A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Invent. Math.* 84 (1986), 563-573.
- [6] FREYD, P., D. YETTER, J. HOSTE, W. B. R. LICKORISH, K. C. MILLETT and A. OCNEANU. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. AMS* 12 (1985), 239-246.
- [7] de la HARPE, P., M. KERVAIRE and C. WEBER. On the Jones polynomial. *L'Ens. Math.* 32 (1986), 271-335.
- [8] HOSTE, J. A new polynomial for knots and links. *Pac. J. of Math.* 124 (1986), 295-320.
- [9] JONES, V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin AMS* 12 (1985), 103-111.
- [10] —— A new knot polynomial and von Neumann algebras. *Notices AMS* 33 (1986), 219-225.
- [11] —— Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Annals of Math.* 126 (1987), 389-414.
- [12] KAUFFMAN, L. State models and the Jones polynomial. *Topology* 26 (1987), 395-407.
- [13] —— An invariant of regular isotopy. Preprint.