Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CARACTÉRISATION DES NORMES EUCLIDIENNES EN DIMENSION FINIE

Autor: Lion, Georges

Kapitel: III. Application au cas n = 2

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56586

III. Application au cas $n = 2$

Nous considérons désormais $E = \mathbf{R}^2$, espace vectoriel que nous identifions à $\mathbf{C}$. L'espace $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ est, comme ci-dessus, normé par $\| u \| = \sup_{|z| \leqslant 1} | u(z) |$ (attention, $u \mapsto \| u \|$ n'est pas euclidienne!); $\mathscr{B}$ est la boule unité de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$. Rappelons que si $z = x + iy$, on pose

$$\partial u/\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \partial u/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Lemme 1. *L'application* $u \mapsto (\partial u/\partial z, \partial u/\partial \bar{z})$, *de* $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ *vers* $\mathbf{C}^2$, *est un* $\mathbf{R}$-*isomorphisme, et* $\| u \| = | \partial u/\partial z | + | \partial u/\partial \bar{z} |$.

Démonstration.

On a $u(z) = \partial u/\partial z \, z + \partial u/\partial \bar{z} \, \bar{z}$, d'où $| u(z) | \leqslant \left(| \partial u/\partial z | + | \partial u/\partial \bar{z} |\right) | z |$ et en posant $\partial u/\partial z = re^{i\theta}$, $\partial u/\partial \bar{z} = \rho e^{i\varphi}$, on obtient

$$| u(e^{i(\varphi - \theta)/2}) | = r + \rho .$$

Lemme 2. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, $u \neq 0$, u *tel que* $u/\| u \|$ *ne soit pas une isométrie. Alors*:

1) *Il existe* v *et* w *isométries de* $\mathbf{R}^2$, α *et* $\beta > 0$, *tels que* $u = \alpha v + \beta w$ *et* $\| u \| = \alpha + \beta$.

2) *La solution unique du problème est donnée par*

$$\alpha = | \partial u/\partial z | , \quad \beta = | \partial u/\partial \bar{z} | , \quad \alpha v(z) = \partial u/\partial z \, z , \quad \beta w(z) = \partial u/\partial \bar{z} \, \bar{z} .$$

Démonstration. La solution explicitée convient d'après le lemme 1. Démontrons l'unicité:

Soit z_0 non nul, tel que $| u(z_0) | = (\alpha + \beta) | z_0 |$. On a par ailleurs

$$| u(z_0) | \leqslant | \alpha v(z_0) + \beta w(z_0) | \leqslant (\alpha + \beta) | z_0 | .$$

L'égalité des termes extrêmes, jointe au signe de α et β, implique $v(z_0) = w(z_0)$; et ceci ne peut se produire que lorsque v et w sont respectivement holomorphes et antiholomorphes, car $v \neq w$.

Il existe donc A et B dans $\mathbf{C}^*$, tels que

$$\alpha v(z) = Az , \quad \beta w(z) = B\bar{z} ,$$

d'où $u(z) = Az + B\bar{z}$, ce qui entraîne $A = \partial u/\partial z$ et $B = \partial u/\partial \bar{z}$, et l'on en déduit les valeurs de α et β, puis v et w.

Notation. On qualifiera désormais de paire (resp. d'impaire) toute isométrie de déterminant $+1$ (resp. -1).

Remarque. On vérifie que la frontière de B ne contient aucun convexe de dimension $\geqslant 2$; la norme $u \mapsto \| u \|$ est « presque » strictement convexe. Le fait est important pour l'étude des isométries linéaires de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, à laquelle nous allons nous consacrer désormais.

LEMME 3. *Soit* Φ *une isométrie linéaire de* $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ *dans lui-même. Alors :*

1) Φ *conserve (resp. inverse) la parité des isométries de* $\mathbf{R}^2$.

2) *Les applications*

$$\partial u/\partial z \mapsto \partial/\partial z\, \Phi(u) \quad \text{et} \quad \partial u/\partial \bar{z} \mapsto \partial/\partial \bar{z}\, \Phi(u)$$
$$\left(\text{resp. } \partial u/\partial z \mapsto \partial/\partial \bar{z}\, \Phi(u) \quad \text{et} \quad \partial u/\partial \bar{z} \mapsto \partial/\partial z\, \Phi(u)\right)$$

appartiennent au groupe orthogonal $O(2)$.

Démonstration. 1) Soit v et w des isométries de parités opposées; quels que soient $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta = 1$, on a $\| \alpha v + \beta w \| = 1$ donc $\| \Phi(\alpha v + \beta w) \| = 1$. Or $\Phi(\alpha v + \beta w) = \alpha\Phi(v) + \beta\Phi(w)$. Puisque $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$ sont des points extrémaux de $\mathscr{B}$, ce sont des isométries de $\mathbf{R}^2$; à l'inverse $\alpha v + \beta w$ et $\alpha\Phi(v) + \beta\Phi(w)$ ne sont pas des isométries; d'après le lemme 2, $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$ sont de parités opposées. Ainsi pour toute isométrie impaire w, $\Phi(w)$ est de parité opposée à celle de $\Phi(I)$, ce qui implique que pour toute parité paire v, $\Phi(v)$ est de même parité que $\Phi(I)$.

2) Plaçons-nous dans le premier cas, et utilisons l'identification de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ avec $\mathbf{C}^2$ découlant du lemme 1.

Si $Z = (z_1, z_2) = (z_1, 0) + (0, z_2)$ alors $\Phi(Z) = \Phi[(z_1, 0)] + \Phi[(0, z_2)]$ d'où dans le cas envisagé :

$$\Phi(Z) = \left(\varphi_1(z_1), 0\right) + \left(0, \varphi_2(z_2)\right).$$

Les applications φ_1 et φ_2 sont clairement $\mathbf{R}$-linéaires de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, et en faisant successivement $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$, on obtient $| \varphi_1(z_1) | = | z_1 |$ et $| \varphi_2(z_2) | = | z_2 |$. On ramène le second cas au premier en composant Φ avec l'application $\pi : (z_1, z_2) \to (z_2, z_1)$, qui est bien une isométrie de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$.

Prenons dans chaque facteur du produit $\mathbf{C}^2$ une base orthonormée; la matrice de Φ est alors de l'un des deux types suivants :

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & \Phi_2 \\ \Phi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Φ_1 et Φ_2 sont des matrices 2×2 orthogonales). Selon les signes respectifs des déterminants de Φ_1 et Φ_2 on obtient 8 composantes connexes dans le groupe Γ des isométries de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$.

Soit Γ_1 la composante neutre de Γ, qui est clairement isomorphe à $SO(2)\times SO(2)$. Introduisons

$$\sigma_1:(z_1, z_2)\mapsto(\bar{z}_1, z_2), \qquad \sigma_2:(z_1, z_2)\mapsto(z_1, \bar{z}_2),$$

et dressons la liste des composantes de Γ:

$$\begin{array}{cccc} \Gamma_1 & \sigma_1\Gamma_1 & \sigma_2\Gamma_1 & \sigma_2\sigma_1\Gamma_1 \\ \pi\Gamma_1 & \pi\sigma_1\Gamma_1 & \pi\sigma_2\Gamma_1 & \pi\sigma_2\sigma_1\Gamma_1 \end{array}$$

Les 4 composantes de la 1re ligne forment un groupe isomorphe à $O(2)\times O(2)$; c'est le groupe des isométries de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ qui conservent la parité, c'est-à-dire qui ont une matrice du 1er type. Les 2 composantes de la colonne de gauche constituent le groupe des isométries $\mathbf{C}$-linéaires de $\mathbf{C}^2$. Dans ce groupe Γ' opère naturellement le groupe $\{I, \pi\}$ noté c_2, si bien que Γ' est isomorphe au produit semi-direct de $SO(2)$ par lui-même.

Enfin les composantes situées dans les 2 colonnes extrêmes du tableau forment le groupe des isométries de déterminant 1; on note $S\Gamma$ ce groupe.

Pour v et $w\in O(2)$, et $u\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, posons $\Phi_{v,w}(u) = vuw^{-1}$.

THÉORÈME 2. *L'application* $(v, w)\mapsto\Phi_{v,w}$ *est une représentation linéaire de* $O(2)\times O(2)$ *sur le groupe* $S\Gamma$, *dont le noyau a 2 éléments.*

Démonstration. $\Phi_{v,w}$ est une isométrie, en effet:

$$\| vuw^{-1} \| \leqslant \| v \| \, \| u \| \, \| w^{-1} \| = \| u \| = \| v^{-1}vuw^{-1}w \| \leqslant \| vuw^{-1} \| .$$

L'application $(v, w)\mapsto\Phi_{v,w}$ est évidemment un morphisme de groupes; montrons que cette application envoie $SO(2)\times SO(2)$ sur Γ_1.

Soit $(z_1, z_2)\mapsto(\lambda z_1, \mu z_2)$ un élément de $\Gamma_1(|\lambda|=|\mu|=1)$. Il s'agit de trouver v et w de module 1 tels que $vw^{-1} = \lambda$ et $\overline{vw^{-1}} = \mu$ c'est-à-dire $v^2 = \lambda\mu$ et $w = v\lambda^{-1}$; le problème admet donc deux couples opposés pour solutions.

On en déduit enfin que l'application étudiée applique $O(2)\times O(2)$ sur $S\Gamma$, composante sur composante, selon le schéma suivant:

pour v paire, w impaire: $\Phi_{v,w}\in\pi\Gamma_1$,

pour v impaire, w paire: $\Phi_{v,w}\in\pi\sigma_2\sigma_1\Gamma_1$,

pour v et w impaires: $\Phi_{v,w}\in\sigma_2\sigma_1\Gamma_1$.