Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATIONS ET TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE POLYNÔME DE JONES-CONWAY

Autor: Vogel, Pierre

Kapitel: §5. La trace de Jones-Ocneanu

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56602

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Et cela implique

$$f = \sum_{\varphi} \prod_{i} c_{\varphi(i)}(y) x_i^{\varphi(i)} = \prod_{i} \sum_{n>0} c_n(y) x_i^n = \prod_{i} \prod_{j} (1+x_i y_j) .$$

§ 5. La trace de Jones-Ocneanu

On se propose ici de montrer les théorèmes 1-6 et 1-7.

5-1. Soit donc $\equiv$ une relation d'équivalence additive sur Λ possédant la propriété suivante:

$$\text{(P)} \qquad \forall n > 0, \forall u \in H_n, \qquad t_n(u) \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}] .$$

Comme σ_n^{-1} est égal à $\alpha\beta^{-1} - \beta^{-1}\sigma_n$, on a

$$t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}] = \alpha\beta^{-1} c_1 t_n(u) - \beta^{-1} t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] .$$

D'autre part, l'application de H_n dans H_{n+1} qui à u associe $(ux1_1)\sigma_n$ induit l'application θ de E_{n-1} dans E_n (voir 3-2). La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0, \forall u \in E_{n-1} , \qquad f(u) \equiv f(\theta u) \equiv \alpha\beta^{-1} c_1 f(u) - \beta^{-1} f(\theta u) ,$$

c'est-à-dire

$$\forall u \in E , \qquad f(u) \equiv f(\theta u) \qquad \text{et} \qquad (1+\beta-ac_1) f(u) \equiv 0 ,$$

f désignant la projection canonique de E sur Λ.

D'autre part, E est un Λ-module libre de base $(s_0, s_1, s_2, ...)$ et l'on a

$$\forall n > 0 , \quad \theta s_n = s_{n+1} \qquad \text{et} \qquad f(s_n) = c_{n+1} .$$

La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0 , \quad \forall u \in \Lambda , \quad uc_n \equiv uc_{n+1} \qquad \text{et} \qquad uc_n(1+\beta-\alpha c_1) \equiv 0 ,$$

et la plus petite relation $\equiv$ vérifiant la propriété (P) est donc la congruence modulo l'idéal J de Λ engendré par les éléments

$$c_n - c_1 , \quad n > 1 \qquad \text{et} \qquad c_1(1+\beta-\alpha c_1) ,$$

ce qui achève de démontrer le théorème 1-6.

5-2. Soit τ une tresse de $B_n, n > 0$. La classe de $t_n(\tau)$ modulo l'idéal I_0 de Λ engendré par les éléments $c_i - c_1$ est de la forme cP, où c représente la classe commune des c_i et P est un polynôme de $k[c] = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]$. Il en résulte que la classe de $t_n(\tau)$ modulo J est représentée par cP', P' désignant la classe de P dans l'anneau $A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c}$. D'après les théorèmes d'Alexander et Markov, le polynôme P' ne dépend que de l'entrelacs $\hat{\tau}$. On a ainsi associé à tout entrelacs orienté E un polynôme $P_E = P'$ de l'anneau A. Cet anneau est en fait le sous-anneau de $k[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$ engendré par α, β, β^{-1} et $(1+\beta)\alpha^{-1}$.

Si x est un croisement d'un entrelacs E dessiné dans le plan, la méthode d'Alexander permet de modifier le dessin de E sans changer le croisement x de façon à obtenir un entrelacs E' isotope à E et de la forme $\hat{\tau}$, où τ est une tresse de B_n. Il en résulte que les trois entrelacs E_+, E_- et E_0 obtenus par modification de E au voisinage de x sont isotopes à des entrelacs de la forme $\hat{\tau}_+$, $\hat{\tau}_-$ et $\hat{\tau}_0$ où l'on a

$$\tau_+ = \tau'\sigma_i\tau'', \qquad \tau_- = \tau'\sigma_i^{-1}\tau'', \qquad \tau_0 = \tau'\tau''.$$

On a alors dans l'algèbre H_n l'égalité suivante:

$$\tau_+ - \alpha\tau_0 + \beta\tau_- = 0,$$

ce qui implique

$$P_{E_+} - \alpha P_{E_0} + \beta P_{E_-} = 0.$$

Si E est le nœud trivial il est de la forme $\hat{1}_1$ et la classe de 1_1 dans le quotient de Λ par I_0 est égal à c. On a donc

$$P_E = 1$$

et le théorème 1-7 est alors clair.

§ 6. Une généralisation du polynôme de Jones-Conway

Soit $n > 0$ un entier. Soit L une sous-variété différentiable compacte orientée de dimension 1 de l'espace usuel $\mathbf{R}^3$ entièrement contenue dans la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$. On suppose que le bord de L est standard. C'est-à-dire qu'il est formé des $2n$ points de coordonnées $(i, j, 0)$ avec $i = 0, 1$ et j variant de 1 à n. On suppose de plus qu'en chacun de ces points, le vecteur tangent à L est vertical descendant, c'est-à-dire à projection nulle sur le plan horizontal $0 \times \mathbf{R}^2$ et à projection négative sur l'axe vertical $\mathbf{R} \times 0$.