Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATIONS ET TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE POLYNÔME DE JONES-CONWAY

Autor: Vogel, Pierre

Kapitel: §2. Représentations des algèbres de Hecke

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56602

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 2. Représentations des algèbres de Hecke

Dans toute la suite, on désignera par K l'extension quadratique de l'anneau k définie par

$$K = k[\lambda]/_{\lambda^2-\alpha\lambda+\beta}\,.$$

On posera également $\mu = \alpha - \lambda$. On a donc

$$\alpha = \lambda + \mu\,, \qquad \beta = \lambda\mu\,,$$

et K est l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers en les variables λ et μ.

Soit n un entier positif. On désignera par X_n l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et l'on notera M le K-module librement engendré par l'ensemble F_n des fonctions de X_n dans $\mathbf{Z}$. Soit i un entier compris strictement entre 0 et n. On notera s_i l'application linéaire de M dans lui-même définie par:

$$\forall f \in F_n,\, s_i(f) = \begin{cases} \lambda f \circ \varepsilon_i & \text{si} \quad f(i) < f(i+1) \\ \lambda f & \text{si} \quad f(i) = f(i+1) \\ (\lambda+\mu)f - \mu f \circ \varepsilon_i & \text{si} \quad f(i) > f(i+1) \end{cases}$$

où ε_i désigne la permutation de X_n qui échange i et $i+1$.

Lemme 2-1. *Les endomorphismes* s_i *vérifient les formules suivantes:*

$$s_i^2 - \alpha s_i + \beta = 0\,,$$
$$\forall i, j < n\,, \quad j > i+1 \quad \Rightarrow \quad s_i s_j = s_j s_i$$
$$j = i+1 \quad \Rightarrow \quad s_i s_j s_i = s_j s_i s_j\,.$$

Démonstration. La deuxième formule est évidente car les supports des permutations ε_i et ε_j sont disjoints. La première formule à vérifier sur une fonction f est évidente si f prend les mêmes valeurs en i et en $i+1$. Il y a donc essentiellement les cas $f(i) > f(i+1)$ et $f(i) < f(i+1)$ et chacun de ces cas se montre aisément. Quant à la dernière formule, il faut considérer, pour une fonction f de F_n, les différentes positions respectives de $f(i)$, $f(i+1)$, $f(i+2)$. Lorsque deux de ces nombres sont égaux, la formule est facile à vérifier. Sinon il reste à priori six cas à examiner. A ce stade il est plus facile de poser:

$$\forall a, b \in \mathbf{Z}\,, \quad a < b \quad \Rightarrow \quad [a, b] = 0 \qquad <a, b> = \lambda$$
$$a > b \quad \Rightarrow \quad [a, b] = \lambda + \mu \quad <a, b> = -\mu\,.$$

On a alors, si $f(i)$ est différent de $f(i+1)$,

$$s_i(f) = [f(i), f(i+1)]f + <f(i), f(i+1)> f \circ \varepsilon_i .$$

Désignons par a, b et c les trois nombres $f(i)$, $f(i+1)$ et $f(i+2)$ que l'on suppose distincts. On vérifie les formules suivantes:

$$\begin{aligned} s_i s_j s_i(f) = {} & ([a, b]^2[b, a] + [a, c] <a, b> <b, a>)f \\ & + ([a, b] [b, c] <a, b> + [a, c] [b, a] <a, b>)f \circ \varepsilon_i \\ & + [a, b] [a, c] <b, c> f \circ \varepsilon_j + [a, b] <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ & + [b, c] <a, b> <a, c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ & + <a, b> <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_i , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j s_i s_j(f) = {} & ([a, b] [b, c]^2 + [a, c] <b, c> <c, b>)f \\ & + ([a, b] [b, c] <b, c> + [a, c] [c, b] <b, c>)f \circ \varepsilon_j \\ & + [a, c] [b, c] <a, b> f \circ \varepsilon_i + [a, b] <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ & + [b, c] <a, b> <a, c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ & + <a, b> <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \varepsilon_j . \end{aligned}$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que les deux expressions sont égales quelles que soient les positions respectives des trois nombres a, b et c.

COROLLAIRE 2-2. *Il existe une représentation de l'algèbre H_n dans l'algèbre des endomorphismes de M, qui envoie les générateurs σ_i de H_n en l'endomorphisme s_i. De ce fait M devient un H_n-module.*

Soit φ une application à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. On appellera poids de φ le nombre $\sum_{p \in \mathbf{Z}} \varphi(p)$. Soit $M(\varphi)$ le sous-module de M (n étant égal au poids de φ) engendré par les fonctions f de F_n telles que

$$\forall p \in \mathbf{Z}, \quad \varphi(p) = \operatorname{card}(f^{-1}(p)) .$$

PROPOSITION 2-3. *Pour toute fonction φ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, à support fini, le sous-module $M(\varphi)$ de M est un H_n-module.*

Démonstration. Evidente.

Soient $p < n$ des entiers strictement positifs. On notera Σ_p l'ensemble des éléments de H_n de la forme: $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$, avec $1 \leqslant i \leqslant p$. Si i est égal à 1, cet élément est égal à 1. On notera S_n l'ensemble des éléments de H_n de la forme: $\tau_1\tau_2 \dots \tau_n$, chaque élément τ_i appartenant à Σ_i. L'ensemble S_n possède $p!$ éléments. L'importance de cet ensemble provient du résultat classique suivant:

PROPOSITION 2-4. *L'algèbre* H_n *est un k-module libre de base* S_n.

Démonstration. Soit $p \leqslant n$ un entier strictement positif. Notons, pour tout i compris entre 1 et p (au sens large), τ_i l'élément $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$. Il est facile de vérifier les formules suivantes:

$$\forall i \leqslant p, \forall j < p, \tau_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_j \tau_i & \text{si} \quad j < i-1 \\ \tau_j & \text{si} \quad j = i-1 \\ \alpha\tau_i - \beta\tau_{i-1} & \text{si} \quad j = i \\ \sigma_{j-1}\tau_i & \text{si} \quad j > i. \end{cases}$$

Il en résulte que le sous-module de H_n engendré par S_n est stable par multiplication à droite par tous les générateurs σ_i de H_n, ce qui prouve que H_n est engendré linéairement par S_n.

Soit maintenant φ l'application de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, de support $\{1, 2, ..., n\}$ et qui vaut 1 sur son support. Le K-module $M(\varphi)$ est alors isomorphe à l'anneau du groupe symétrique $K[\mathfrak{S}_n]$. Soit f_0 l'inclusion de $\{1, ..., n\}$ dans $\mathbf{Z}$. La multiplication à droite par f_0 induit une application K-linéaire γ de $H_n \otimes K$ dans $M(\varphi)$. Si l'on tensorise ces modules par $\mathbf{Z}$ au-dessus de K, via le morphisme de K dans $\mathbf{Z}$ qui envoie λ et μ en 1 et -1, $H_n \otimes \mathbf{Z}$ devient $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$ ainsi que $M(\varphi)$ et γ devient l'identité. On en déduit que $\gamma(S_n)$ est une base de $M(\varphi) \otimes \mathbf{Z}$ et un système libre de $M(\varphi)$. Ce qui prouve que S_n est une base de H_n.

COROLLAIRE 2-5. *Pour tout entier* $n > 0$, H_n *est un* H_{n-1}*-module à gauche libre de base* $\Sigma_n = \{1, \sigma_{n-1}, ..., \sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \dots \sigma_1\}$.

COROLLAIRE 2-6. *Pour tout* $n > 0$, H_{n+1} *est un* H_n*-bimodule isomorphe à* $H_n \oplus H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n$.

Démonstration. L'isomorphisme provient de la stabilisation i de H_n dans H_{n+1} et de l'application de $H_n \times H_n$ dans H_{n+1} qui à (u, v) associe $i(u)\sigma_n i(v)$. L'application qui s'en déduit respecte les bases (pour la structure le H_n-module à gauche). C'est donc un isomorphisme.

§ 3. TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE

Soit $n > 0$ un entier. Via la stabilisation i de H_n dans H_{n+1}, H_{n+1} est un H_n-bimodule. On peut donc considérer le module $E_n = H_0(H_n, H_{n+1})$, quotient de H_{n+1} par le sous-module engendré par les éléments de la forme: