Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATIONS ET TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE POLYNÔME DE JONES-CONWAY

Autor: Vogel, Pierre

Kapitel: §0. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56602

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 333-356

REPRÉSENTATIONS ET TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE POLYNÔME DE JONES-CONWAY

par Pierre VOGEL

§ 0. INTRODUCTION

La théorie des nœuds et entrelacs classiques a eu, ces dernières années, un renouveau considérable dû, en grande partie, à la découverte de nouveaux invariants polynomiaux. Le premier en date de ces récents invariants est un polynôme à une variable V construit par V. Jones [9], [10] en 1985 à l'aide de traces construites sur certaines algèbres de von Neumann. Ce polynôme a été immédiatement généralisé à un polynôme à deux variables P [6] appelé polynôme de Jones-Conway ou polynôme HOMFLY. Un autre polynôme à deux variables K a été également construit par Kauffman [13] un peu plus tard. Les deux polynômes P et K généralisent le polynôme original de Jones, et P généralise également le polynôme d'Alexander [2] connu quant à lui depuis une cinquantaine d'années.

Si le polynôme d'Alexander est parfaitement compris et a été très utile pour l'étude du complémentaire du nœud ou de l'entrelacs, la situation est quelque peu différente en ce qui concerne les autres polynômes. Ils sont tout d'abord très précis, en ce sens qu'ils permettent de distinguer de nombreux nœuds indiscernables par l'utilisation seule du polynôme d'Alexander, par exemple les nœuds de trèfle droit et gauche. Ils sont, de plus, très bien adaptés à l'étude de certaines familles de nœuds ou d'entrelacs. Par exemple le polynôme de Jones, grâce à une très jolie construction de Kauffman, a permis à Kauffmann et Murasugi [16] de montrer certaines conjectures sur les nœuds alternés, vieilles de plus d'un siècle.

En un certain sens, on peut dire que ces polynômes sont des témoins extrêmement précis de la forme géométrique des nœuds et des entrelacs. Ils restent cependant très mystérieux. Par exemple les questions suivantes sont, à l'heure actuelle, toujours sans réponse :

— Quelles sont les significations géométriques exactes des polynômes P et K ? Est-il possible, comme pour le polynôme d'Alexander, de les décrire à l'aide du type d'homotopie du complémentaire ?

— Existe-t-il un nœud non trivial avec un polynôme P ou K trivial? On connaît actuellement des nœuds distingués par P et non par K ainsi que des nœuds distingués par K et non par P. En ce sens aucun des deux polynômes P et K n'est conséquence de l'autre. On connaît également des nœuds qui ne sont distingués ni par P ni par K. Cependant, dans tous ces exemples, ces nœuds sont non triviaux, et l'on ne sait pas si P ou K ou les deux, permettent de déterminer si un nœud est ou n'est pas dénoué.

— On sait que si un nœud K est slice, c'est-à-dire qu'il borde un disque dans la boule B^4, le polynôme d'Alexander $\Delta(t)$ du nœud est de la forme $P(t)P(t^{-1})$ où P est un polynôme en t à coefficients entiers. Est-ce qu'un phénomène du même genre a lieu pour le polynôme P ou le polynôme K? On sait que cette propriété du polynôme d'Alexander ne se généralise pas telle quelle, car on connaît des nœuds slices pour lesquels les polynômes de Jones-Conway sont irréductibles et non triviaux. Cependant, il est possible que le fait qu'un nœud soit slice impose à son polynôme de Jones-Conway ou son polynôme de Kauffman certaine condition algébrique.

— Quelles sont les formes possibles pour les polynômes P et K d'un nœud ou d'entrelacs? Comme ces polynômes prennent en certains points des valeurs bien précises, ils ne sont absolument pas quelconques.

Il y a à ce jour essentiellement deux méthodes pour construire les polynômes de Jones-Conway et de Kauffman. La première consiste à définir le polynôme P d'un entrelacs représenté par une projection régulière sur le plan, récursivement sur les projections de plus en plus complexes. Puis à montrer que ce polynôme ne dépend pas des choix que l'on a été obliger de faire et qu'il ne change pas si l'on effectue des modifications élémentaires de type Markov sur la projection de l'entrelacs. L'avantage de cette méthode est qu'elle est totalement élémentaire et n'utilise aucun outil théorique complexe. L'inconvénient est qu'elle n'offre aucune vision un tant soit peu globale de ces invariants. Conceptuellement elle n'explique rien. La deuxième méthode utilise des résultats d'Alexander et de Markov qui ramène le problème de la construction d'invariants sur les entrelacs à celui de la recherche de certains invariants sur les tresses. Or, les groupes de tresses B_n admettent des représentations dans certaines algèbres; en particulier dans les algèbres de Hecke et les algèbres de Brauer. On peut alors chercher des invariants sur les entrelacs en construisant certaines traces sur les algèbres de Hecke ou sur les algèbres de Brauer. Les résultats de Jones, Ocneanu pour l'algèbre de Hecke [9] et de Kauffman [13], Birman et Wenzl [4] pour l'algèbre de Brauer montrent que ces traces existent et sont uniques. Comme ces traces sont à valeurs dans un anneau de polynômes à deux variables on en déduit l'existence des deux polynômes P et K. Cette dernière méthode est en un certain sens plus globale, mais elle pèche encore sur un point. Elle n'explique pas vraiment ce que sont ces traces ni quelle est leur signification.

Le but de cet article est de donner un nouvel éclairage sur cette dernière construction du polynôme de Jones-Conway. Si l'on considère toutes les traces sur l'algèbre de Hecke, H_n on remarque qu'elles proviennent d'une trace universelle à valeur dans un module Λ_n. De plus, la juxtaposition de tresses induit des applications de $H_p \otimes H_q$ dans H_{p+q} et de $\Lambda_p \otimes \Lambda_q$ dans Λ_{p+q}, ce qui fait de la somme directe des modules Λ_n une algèbre commutative graduée. On montre alors que cette algèbre est une algèbre de polynômes en des variables $c_i \in \Lambda_i$. Si l'on spécialise les coefficients qui définissent les algèbres de Hecke d'une certaine façon, celles-ci deviennent les algèbres des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, et les classes c_i correspondent aux classes de conjugaison de cycles d'ordre i dans $\mathcal{S}_i$.

Ainsi, pour toute tresse τ de B_n sa trace $t(\tau)$ est un polynôme en les classes c_i homogène de degré n, l'anneau des coefficients étant lui-même un anneau de polynômes à deux variables. On montre alors que le polynôme de Jones-Conway de l'entrelacs associé à la tresse τ est, à un scalaire c^{-1} près, le polynôme $t(\tau)$ où l'on a donné à tous les c_i une certaine valeur c. Si l'on spécialise les variables de façon que les algèbres de Hecke deviennent les algèbres des groupes symétriques, le polynôme $t(\tau)$ devient simplement un monôme $\prod_i c_{n_i}$, si la permutation σ associée à τ est formée de cycles d'ordre n_i. Si l'on identifie de plus les classes c_i, $t(\tau)$ devient égal à c^n, n étant le nombre d'orbites de σ, c'est-à-dire le nombre de composantes connexes de l'entrelacs associé à τ. En ce sens, le polynôme de Jones-Conway peut être considéré comme une déformation de l'application qui, à tout entrelacs à n composantes, associe c^{n-1}.

En plus des traces universelles sur les algèbres de Hecke H_n, on construit des traces associées à des représentations explicites associées à chaque partition de n. Ces représentations ne proviennent pas des diagrammes de Young. Le point de vue est direct et assez différent de celui de Jones [11] et de Wenzl [18]. La trace de Jones-Ocneanu peut s'exprimer explicitement en fonction de ces traces.

Enfin, on montre que la représentation du groupe des tresses B_n dans l'algèbre de Hecke H_n s'étend à un monoïde $\hat{B}_n$ contenant B_n et formé de tresses généralisées (appelées semi-tresses), une semi-tresse étant une variété différentiable compacte L de dimension 1 contenue dans la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$ de l'espace et standard sur le bord, c'est-à-dire que ∂L est égal à $\partial[0, 1] \times \{1, 2, \ldots, n\} \times 0$ avec des orientations compatibles.