Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATIONS ET TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE POLYNÔME DE JONES-CONWAY

Autor: Vogel, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56602

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 333-356

REPRÉSENTATIONS ET TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE POLYNÔME DE JONES-CONWAY

par Pierre VOGEL

§ 0. INTRODUCTION

La théorie des nœuds et entrelacs classiques a eu, ces dernières années, un renouveau considérable dû, en grande partie, à la découverte de nouveaux invariants polynomiaux. Le premier en date de ces récents invariants est un polynôme à une variable V construit par V. Jones [9], [10] en 1985 à l'aide de traces construites sur certaines algèbres de von Neumann. Ce polynôme a été immédiatement généralisé à un polynôme à deux variables P [6] appelé polynôme de Jones-Conway ou polynôme HOMFLY. Un autre polynôme à deux variables K a été également construit par Kauffman [13] un peu plus tard. Les deux polynômes P et K généralisent le polynôme original de Jones, et P généralise également le polynôme d'Alexander [2] connu quant à lui depuis une cinquantaine d'années.

Si le polynôme d'Alexander est parfaitement compris et a été très utile pour l'étude du complémentaire du nœud ou de l'entrelacs, la situation est quelque peu différente en ce qui concerne les autres polynômes. Ils sont tout d'abord très précis, en ce sens qu'ils permettent de distinguer de nombreux nœuds indiscernables par l'utilisation seule du polynôme d'Alexander, par exemple les nœuds de trèfle droit et gauche. Ils sont, de plus, très bien adaptés à l'étude de certaines familles de nœuds ou d'entrelacs. Par exemple le polynôme de Jones, grâce à une très jolie construction de Kauffman, a permis à Kauffmann et Murasugi [16] de montrer certaines conjectures sur les nœuds alternés, vieilles de plus d'un siècle.

En un certain sens, on peut dire que ces polynômes sont des témoins extrêmement précis de la forme géométrique des nœuds et des entrelacs. Ils restent cependant très mystérieux. Par exemple les questions suivantes sont, à l'heure actuelle, toujours sans réponse:

— Quelles sont les significations géométriques exactes des polynômes P et K? Est-il possible, comme pour le polynôme d'Alexander, de les décrire à l'aide du type d'homotopie du complémentaire?

— Existe-t-il un nœud non trivial avec un polynôme P ou K trivial? On connaît actuellement des nœuds distingués par P et non par K ainsi que des nœuds distingués par K et non par P. En ce sens aucun des deux polynômes P et K n'est conséquence de l'autre. On connaît également des nœuds qui ne sont distingués ni par P ni par K. Cependant, dans tous ces exemples, ces nœuds sont non triviaux, et l'on ne sait pas si P ou K ou les deux, permettent de déterminer si un nœud est ou n'est pas dénoué.

— On sait que si un nœud K est slice, c'est-à-dire qu'il borde un disque dans la boule B^4, le polynôme d'Alexander $\Delta(t)$ du nœud est de la forme $P(t)P(t^{-1})$ où P est un polynôme en t à coefficients entiers. Est-ce qu'un phénomène du même genre a lieu pour le polynôme P ou le polynôme K? On sait que cette propriété du polynôme d'Alexander ne se généralise pas telle quelle, car on connaît des nœuds slices pour lesquels les polynômes de Jones-Conway sont irréductibles et non triviaux. Cependant, il est possible que le fait qu'un nœud soit slice impose à son polynôme de Jones-Conway ou son polynôme de Kauffman certaine condition algébrique.

— Quelles sont les formes possibles pour les polynômes P et K d'un nœud ou d'entrelacs? Comme ces polynômes prennent en certains points des valeurs bien précises, ils ne sont absolument pas quelconques.

Il y a à ce jour essentiellement deux méthodes pour construire les polynômes de Jones-Conway et de Kauffman. La première consiste à définir le polynôme P d'un entrelacs représenté par une projection régulière sur le plan, récursivement sur les projections de plus en plus complexes. Puis à montrer que ce polynôme ne dépend pas des choix que l'on a été obliger de faire et qu'il ne change pas si l'on effectue des modifications élémentaires de type Markov sur la projection de l'entrelacs. L'avantage de cette méthode est qu'elle est totalement élémentaire et n'utilise aucun outil théorique complexe. L'inconvénient est qu'elle n'offre aucune vision un tant soit peu globale de ces invariants. Conceptuellement elle n'explique rien. La deuxième méthode utilise des résultats d'Alexander et de Markov qui ramène le problème de la construction d'invariants sur les entrelacs à celui de la recherche de certains invariants sur les tresses. Or, les groupes de tresses B_n admettent des représentations dans certaines algèbres; en particulier dans les algèbres de Hecke et les algèbres de Brauer. On peut alors chercher des invariants sur les entrelacs en construisant certaines traces sur les algèbres de Hecke ou sur les algèbres de Brauer. Les résultats de Jones, Ocneanu pour l'algèbre de Hecke [9] et de Kauffman [13], Birman et Wenzl [4] pour l'algèbre de Brauer montrent que ces traces existent et sont uniques. Comme ces traces sont à valeurs dans un anneau de polynômes à deux variables

on en déduit l'existence des deux polynômes P et K. Cette dernière méthode est en un certain sens plus globale, mais elle pèche encore sur un point. Elle n'explique pas vraiment ce que sont ces traces ni quelle est leur signification.

Le but de cet article est de donner un nouvel éclairage sur cette dernière construction du polynôme de Jones-Conway. Si l'on considère toutes les traces sur l'algèbre de Hecke, H_n on remarque qu'elles proviennent d'une trace universelle à valeur dans un module Λ_n. De plus, la juxtaposition de tresses induit des applications de $H_p \otimes H_q$ dans H_{p+q} et de $\Lambda_p \otimes \Lambda_q$ dans Λ_{p+q}, ce qui fait de la somme directe des modules Λ_n une algèbre commutative graduée. On montre alors que cette algèbre est une algèbre de polynômes en des variables $c_i \in \Lambda_i$. Si l'on spécialise les coefficients qui définissent les algèbres de Hecke d'une certaine façon, celles-ci deviennent les algèbres des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, et les classes c_i correspondent aux classes de conjugaison de cycles d'ordre i dans $\mathscr{S}_i$.

Ainsi, pour toute tresse τ de B_n sa trace $t(\tau)$ est un polynôme en les classes c_i homogène de degré n, l'anneau des coefficients étant lui-même un anneau de polynômes à deux variables. On montre alors que le polynôme de Jones-Conway de l'entrelacs associé à la tresse τ est, à un scalaire c^{-1} près, le polynôme $t(\tau)$ où l'on a donné à tous les c_i une certaine valeur c. Si l'on spécialise les variables de façon que les algèbres de Hecke deviennent les algèbres des groupes symétriques, le polynôme $t(\tau)$ devient simplement un monôme $\prod_i c_{n_i}$, si la permutation σ associée à τ est formée de cycles d'ordre n_i. Si l'on identifie de plus les classes c_i, $t(\tau)$ devient égal à c^n, n étant le nombre d'orbites de σ, c'est-à-dire le nombre de composantes connexes de l'entrelacs associé à τ. En ce sens, le polynôme de Jones-Conway peut être considéré comme une déformation de l'application qui, à tout entrelacs à n composantes, associe c^{n-1}.

En plus des traces universelles sur les algèbres de Hecke H_n, on construit des traces associées à des représentations explicites associées à chaque partition de n. Ces représentations ne proviennent pas des diagrammes de Young. Le point de vue est direct et assez différent de celui de Jones [11] et de Wenzl [18]. La trace de Jones-Ocneanu peut s'exprimer explicitement en fonction de ces traces.

Enfin, on montre que la représentation du groupe des tresses B_n dans l'algèbre de Hecke H_n s'étend à un monoïde $\hat{B}_n$ contenant B_n et formé de tresses généralisées (appelées semi-tresses), une semi-tresse étant une variété différentiable compacte L de dimension 1 contenue dans la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$ de l'espace et standard sur le bord, c'est-à-dire que ∂L est égal à $\partial[0, 1] \times \{1, 2, ..., n\} \times 0$ avec des orientations compatibles.

§ 1. Une description du polynôme de Jones-Conway

Soit B_n le groupe des tresses à n brins. Ce groupe est engendré par les éléments $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$ et σ_i est la tresse élémentaire qui croise le i-ième et le $i+1$-ième brin de la façon suivante:

De plus, deux de ces tresses σ et σ' commutent si elles ne sont pas d'indices consécutifs, et vérifient la formule suivante dans le cas contraire:

$$\sigma\sigma'\sigma = \sigma'\sigma\sigma'$$

On a ainsi un système complet de générateurs et relations du groupe B_n.

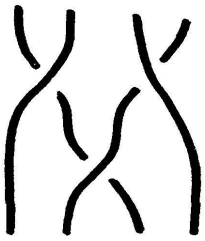
Les groupes B_0 et B_1 sont triviaux et le groupe B_2 est commutatif libre de rang 1. Les groupes B_n sont non commutatifs pour $n > 2$.

Soient p et q deux entiers positifs ou nuls. Soient σ et τ deux tresses à p et q brins. On peut alors juxtaposer ces deux tresses et obtenir une nouvelle tresse à $p+q$ brins que l'on notera $\sigma \times \tau$. Ceci définit ainsi un morphisme de groupes de $B_p \times B_q$ dans B_{p+q}. Il est facile de vérifier que ce produit est associatif et unitaire, d'unité $1_0 \in B_0$, en notant pour tout $i \geqslant 0$, 1_i l'unité de B_i.

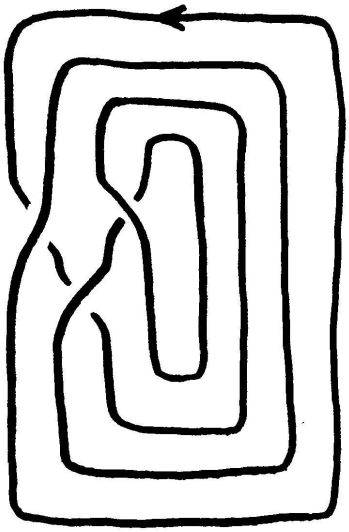
D'autre part, si τ est une tresse de B_n, on peut fermer τ en connectant les extrémités supérieures de la tresse à ses extrémités inférieures, et cela sans rajouter de croisements. On obtient de ce fait un entrelacs orienté $\hat{\tau}$.

Exemple:

τ:



$\hat{\tau}$:



Ceci nous donne une application $\hat{}$ de l'union disjointe B des groupes B_n, $n \geqslant 0$, dans l'ensemble E des classes d'isotopie d'entrelacs orientés. Le

théorème d'Alexander [1], [15] montre que cette application est surjective. Le théorème de Markov [15] dit, plus précisément, que E s'identifie, via l'application $\hat{}$, au quotient de B par la relation d'équivalence $\equiv$ engendrée par:

$$\forall \sigma, \tau \in B_n, \quad \sigma\tau \equiv \tau\sigma$$
$$\forall \sigma \in B_n, \quad \sigma \equiv (\sigma \times 1_1)\sigma_n \equiv (\sigma \times 1_1)\sigma_n^{-1}.$$

Définition 1-1. On appellera bi-algèbre graduée, une suite d'algèbres A_n, $n \geqslant 0$, sur un anneau commutatif k, munies d'applications μ_{pq} de $A_p \otimes A_q$ dans A_{p+q}, qui vérifient les propriétés suivantes:

— Les applications μ_{pq} sont des morphismes de k-algèbres.

— Elles sont associatives:

$$\forall x \in A_n, \ \forall y \in A_p, \ \forall z \in A_q, \ \mu_{n+pq}(\mu_{np}(x \otimes y) \otimes z) = \mu_{np+q}(x \otimes \mu_{pq}(y \otimes z)).$$

— Elles ont un élément neutre:

$$\forall x \in A_n, \ x = \mu_{0n}(1_0 \otimes x) = \mu_{n0}(x \otimes 1_0).$$

Une telle bi-algèbre sera simplement notée A_*, et le produit μ sera noté $\times$.

Définition 1-2. Soit A_* une bi-algèbre graduée. On appellera représentation des groupes de tresses dans A_*, une suite ρ_n, $n \geqslant 0$, telle que:

— pour tout $n \geqslant 0$, ρ_n est une représentation du groupe B_n dans le groupe des unités de A_n,

— ces représentations ρ sont compatibles avec les produits $\times$.

Exemples. On a une représentation universelle en posant:

$$\forall n \geqslant 0, A_n \equiv k[B_n]$$

et en étendant le produit $\times$ à tout A_n.

On peut également considérer les algèbres: $A_n = k[\mathfrak{S}_n]$, et prendre les représentations canoniques de B_n dans $\mathfrak{S}_n$.

Soit k l'anneau $\mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}]$. Soit H_n la k-algèbre quotient de $k[B_n]$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments:

$$\sigma_i^2 - \alpha\sigma_i + \beta, 0 < i < n$$

PROPOSITION 1-3. *Les algèbres H_n forment une bi-algèbre graduée et les applications canoniques de B_n dans H_n forment une représentation des groupes de tresses.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que les applications $\times$ de $k[B_p] \otimes k[B_q]$ dans $k[B_{p+q}]$ passent au quotient et définissent des applications de $H_p \otimes H_q$ dans H_{p+q}.

Remarque. Les algèbres H_n sont en fait des algèbres de Hecke formelles. Si dans la définition de H_n, on remplace k par un corps K, avec $\alpha = q - 1$ et $\beta = -q$, où q est un paramètre de K, on obtient exactement l'algèbre de Hecke classique.

PROPOSITION 1-4. *Soit A_* une bi-algèbre graduée sur un anneau commutatif k. Alors les k-modules $H_0(A_n)$ forment une k-algèbre unitaire graduée.*

Démonstration. Si A est une k-algèbre, le groupe d'homologie de Hochschild $H_0(A)$ est un k-module quotient de A par le sous-k-module engendré par les éléments de la forme $ab - ba$, a et b parcourant A. On désignera par t l'application quotient de A dans $H_0(A)$. On peut voir t comme la trace universelle sur A. Il n'est pas difficile de vérifier que H_0 est un foncteur de la catégorie des k-algèbres dans la catégorie des k-modules. De plus, si A et B sont deux k-algèbres, $H_0(A \otimes B)$ est canoniquement isomorphe à $H_0(A) \otimes H_0(B)$.

Il en résulte que le produit $\times$ de $A_p \otimes A_q$ dans A_{p+q} induit un produit de $H_0(A_p) \otimes H_0(A_q)$ dans $H_0(A_{p+q})$. Ce produit est clairement associatif et possède $t(1_0)$ comme unité.

Dans toute la suite on désignera par Λ_n le k-module $H_0(H_n)$. La k-algèbre graduée formée des modules Λ_n sera notée Λ. L'application canonique t de H_n dans Λ_n sera notée t_n. Enfin, on désignera par c_n l'élément $t_n(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})$ de Λ_n.

THÉORÈME 1-5. *L'algèbre Λ est l'algèbre des polynômes sur k en les variables c_i, $i \geqslant 1$.*

THÉORÈME 1-6. *Soit I un sous $\mathbf{Z}$-module de Λ. Soit f l'application de la somme disjointe des groupes de tresses B_n dans $\Lambda/_I$ déduite de la représentation des groupes de tresses dans H_* et des applications t_n. Alors pour toute tresse σ, $f(\sigma)$ ne dépend que de l'entrelacs $\hat{\sigma}$, si et seulement si I contient l'idéal J de Λ engendré par les éléments:*

$$c_i - c_1, i \geqslant 2, \qquad c_1(1+\beta-\alpha c_1).$$

Remarque. Soit I_0 l'idéal de Λ engendré par les éléments $c_i - c_1$. Alors $\Lambda/_{I_0}$ est isomorphe à l'algèbre $k[c] = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]$, c représentant la

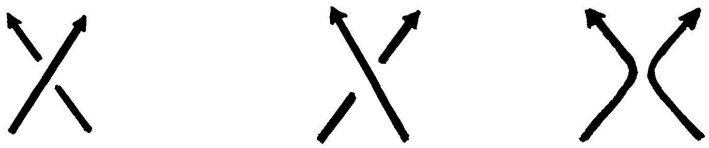
classe commune des éléments c_i. Si maintenant τ est une tresse de B_n, $n > 0$, la trace $t_n(\tau)$ est un élément homogène de Λ de degré n et sa classe modulo I_0 est de la forme cP où P est un polynôme de $k[c]$. Il en résulte que la classe de $t_n(\tau)$ modulo J est représentée par cP', où P' est égal à la classe de P modulo $1 + \beta - \alpha c$. Le polynôme P' appartient donc à l'anneau A quotient de $k[c]$ par $1 + \beta - \alpha c$. Cet anneau est isomorphe au sous-anneau de $\mathbf{Z}[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$ engendré par $\alpha, \beta, \beta^{-1}$ et $(1+\beta)\alpha^{-1}$.

THÉORÈME 1-7. *Soit A le sous-anneau de $\mathbf{Z}[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$ engendré par $\alpha, \beta, \beta^{-1}$ et $c = (1+\beta)\alpha^{-1}$. Alors il existe pour tout entrelacs orienté E un polynôme P_E de A tel que:*

— *P_E ne dépend que de la classe d'isotopie de E.*

— *Si E est le nœud trivial, le polynôme P_E est égal à 1.*

— *Si E_+, E_- et E_0 sont trois entrelacs orientés ayant la même forme excepté près d'un croisement où ils ont les configurations suivantes:*



E_+ E_- E_0

on a

$$P_{E_+} - \alpha P_{E_0} + \beta P_{E_-} = 0 . \tag{F}$$

De plus, si E provient d'une tresse $\sigma \in B_n$, et si la trace $t_n(\sigma)$ est un polynôme $P(\alpha, \beta, c_1, c_2, \ldots)$, on a

$$P(\alpha, \beta, c, c, \ldots) = cP_E(\alpha, \beta) .$$

Remarque. Le polynôme P_E est, à un changement de variables près, le polynôme de Jones-Conway (ou polynôme HOMFLY) de E. Le changement de variable dépend de la forme que l'on veut obtenir pour la formule (F). Si l'on veut, par exemple, que (F) prenne la forme suivante:

$$xP_{E_+} + yP_{E_-} + zP_{E_0} = 0$$

on doit poser

$$\alpha = -zx^{-1} \qquad \beta = yx^{-1}$$

et P_E est un polynôme à coefficients entiers en zx^{-1}, yx^{-1}, xy^{-1} et $(x+y)z^{-1}$.

§ 2. Représentations des algèbres de Hecke

Dans toute la suite, on désignera par K l'extension quadratique de l'anneau k définie par

$$K = k[\lambda]/_{\lambda^2-\alpha\lambda+\beta}\,.$$

On posera également $\mu = \alpha - \lambda$. On a donc

$$\alpha = \lambda + \mu\,, \qquad \beta = \lambda\mu\,,$$

et K est l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers en les variables λ et μ.

Soit n un entier positif. On désignera par X_n l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et l'on notera M le K-module librement engendré par l'ensemble F_n des fonctions de X_n dans $\mathbf{Z}$. Soit i un entier compris strictement entre 0 et n. On notera s_i l'application linéaire de M dans lui-même définie par:

$$\forall f \in F_n,\, s_i(f) = \begin{cases} \lambda f \circ \varepsilon_i & \text{si} \quad f(i) < f(i+1) \\ \lambda f & \text{si} \quad f(i) = f(i+1) \\ (\lambda+\mu)f - \mu f \circ \varepsilon_i & \text{si} \quad f(i) > f(i+1) \end{cases}$$

où ε_i désigne la permutation de X_n qui échange i et $i+1$.

Lemme 2-1. *Les endomorphismes* s_i *vérifient les formules suivantes:*

$$s_i^2 - \alpha s_i + \beta = 0\,,$$
$$\forall i, j < n\,, \quad j > i+1 \quad \Rightarrow \quad s_i s_j = s_j s_i$$
$$j = i+1 \quad \Rightarrow \quad s_i s_j s_i = s_j s_i s_j\,.$$

Démonstration. La deuxième formule est évidente car les supports des permutations ε_i et ε_j sont disjoints. La première formule à vérifier sur une fonction f est évidente si f prend les mêmes valeurs en i et en $i+1$. Il y a donc essentiellement les cas $f(i) > f(i+1)$ et $f(i) < f(i+1)$ et chacun de ces cas se montre aisément. Quant à la dernière formule, il faut considérer, pour une fonction f de F_n, les différentes positions respectives de $f(i)$, $f(i+1)$, $f(i+2)$. Lorsque deux de ces nombres sont égaux, la formule est facile à vérifier. Sinon il reste à priori six cas à examiner. A ce stade il est plus facile de poser:

$$\forall a, b \in \mathbf{Z}\,, \quad a < b \quad \Rightarrow \quad [a, b] = 0 \qquad <a, b> = \lambda$$
$$a > b \quad \Rightarrow \quad [a, b] = \lambda + \mu \quad <a, b> = -\mu\,.$$

On a alors, si $f(i)$ est différent de $f(i+1)$,

$$s_i(f) = [f(i), f(i+1)]f + <f(i), f(i+1)> f \circ \varepsilon_i .$$

Désignons par a, b et c les trois nombres $f(i)$, $f(i+1)$ et $f(i+2)$ que l'on suppose distincts. On vérifie les formules suivantes:

$$\begin{aligned} s_i s_j s_i(f) = {} & ([a, b]^2[b, a] + [a, c] <a, b> <b, a>)f \\ & + ([a, b] [b, c] <a, b> + [a, c] [b, a] <a, b>)f \circ \varepsilon_i \\ & + [a, b] [a, c] <b, c> f \circ \varepsilon_j + [a, b] <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ & + [b, c] <a, b> <a, c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ & + <a, b> <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_i , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j s_i s_j(f) = {} & ([a, b] [b, c]^2 + [a, c] <b, c> <c, b>)f \\ & + ([a, b] [b, c] <b, c> + [a, c] [c, b] <b, c>)f \circ \varepsilon_j \\ & + [a, c] [b, c] <a, b> f \circ \varepsilon_i + [a, b] <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ & + [b, c] <a, b> <a, c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ & + <a, b> <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \varepsilon_j . \end{aligned}$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que les deux expressions sont égales quelles que soient les positions respectives des trois nombres a, b et c.

COROLLAIRE 2-2. *Il existe une représentation de l'algèbre H_n dans l'algèbre des endomorphismes de M, qui envoie les générateurs σ_i de H_n en l'endomorphisme s_i. De ce fait M devient un H_n-module.*

Soit φ une application à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. On appellera poids de φ le nombre $\sum_{p \in \mathbf{Z}} \varphi(p)$. Soit $M(\varphi)$ le sous-module de M (n étant égal au poids de φ) engendré par les fonctions f de F_n telles que

$$\forall p \in \mathbf{Z}, \quad \varphi(p) = \operatorname{card}(f^{-1}(p)) .$$

PROPOSITION 2-3. *Pour toute fonction φ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, à support fini, le sous-module $M(\varphi)$ de M est un H_n-module.*

Démonstration. Evidente.

Soient $p < n$ des entiers strictement positifs. On notera Σ_p l'ensemble des éléments de H_n de la forme: $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$, avec $1 \leqslant i \leqslant p$. Si i est égal à 1, cet élément est égal à 1. On notera S_n l'ensemble des éléments de H_n de la forme: $\tau_1\tau_2 \dots \tau_n$, chaque élément τ_i appartenant à Σ_i. L'ensemble S_n possède $p!$ éléments. L'importance de cet ensemble provient du résultat classique suivant:

PROPOSITION 2-4. *L'algèbre* H_n *est un k-module libre de base* S_n.

Démonstration. Soit $p \leqslant n$ un entier strictement positif. Notons, pour tout i compris entre 1 et p (au sens large), τ_i l'élément $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$. Il est facile de vérifier les formules suivantes:

$$\forall i \leqslant p, \forall j < p, \tau_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_j \tau_i & \text{si} \quad j < i-1 \\ \tau_j & \text{si} \quad j = i-1 \\ \alpha\tau_i - \beta\tau_{i-1} & \text{si} \quad j = i \\ \sigma_{j-1}\tau_i & \text{si} \quad j > i. \end{cases}$$

Il en résulte que le sous-module de H_n engendré par S_n est stable par multiplication à droite par tous les générateurs σ_i de H_n, ce qui prouve que H_n est engendré linéairement par S_n.

Soit maintenant φ l'application de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, de support $\{1, 2, ..., n\}$ et qui vaut 1 sur son support. Le K-module $M(\varphi)$ est alors isomorphe à l'anneau du groupe symétrique $K[\mathfrak{S}_n]$. Soit f_0 l'inclusion de $\{1, ..., n\}$ dans $\mathbf{Z}$. La multiplication à droite par f_0 induit une application K-linéaire γ de $H_n \otimes K$ dans $M(\varphi)$. Si l'on tensorise ces modules par $\mathbf{Z}$ au-dessus de K, via le morphisme de K dans $\mathbf{Z}$ qui envoie λ et μ en 1 et -1, $H_n \otimes \mathbf{Z}$ devient $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$ ainsi que $M(\varphi)$ et γ devient l'identité. On en déduit que $\gamma(S_n)$ est une base de $M(\varphi) \otimes \mathbf{Z}$ et un système libre de $M(\varphi)$. Ce qui prouve que S_n est une base de H_n.

COROLLAIRE 2-5. *Pour tout entier* $n > 0$, H_n *est un* H_{n-1}*-module à gauche libre de base* $\Sigma_n = \{1, \sigma_{n-1}, ..., \sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \dots \sigma_1\}$.

COROLLAIRE 2-6. *Pour tout* $n > 0$, H_{n+1} *est un* H_n*-bimodule isomorphe à* $H_n \oplus H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n$.

Démonstration. L'isomorphisme provient de la stabilisation i de H_n dans H_{n+1} et de l'application de $H_n \times H_n$ dans H_{n+1} qui à (u, v) associe $i(u)\sigma_n i(v)$. L'application qui s'en déduit respecte les bases (pour la structure le H_n-module à gauche). C'est donc un isomorphisme.

§ 3. TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE

Soit $n > 0$ un entier. Via la stabilisation i de H_n dans H_{n+1}, H_{n+1} est un H_n-bimodule. On peut donc considérer le module $E_n = H_0(H_n, H_{n+1})$, quotient de H_{n+1} par le sous-module engendré par les éléments de la forme:

$$ax - xa\,, \qquad a \in i(H_n)\,, \qquad x \in H_{n+1}\,.$$

Comme précédemment, le produit $\times$ induit un produit associatif de $\Lambda_p \otimes E_q$ dans E_{p+q} et E est un Λ-module gradué.

PROPOSITION 3-1. *L'application qui, à tout élément* $x \in H_n$, *associe l'élément* $(x \times 1_1)\sigma_n$ *de* H_{n+1}, 1 *étant l'unité de* H_1, *induit pour tout* $n > 0$ *une application de* E_{n-1} *dans* E_n. *Cette application sera notée* θ.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\sigma_n \in H_{n+1}$ commute avec tout élément stabilisé d'un élément de H_{n-1}.

Notations 3-2. On désignera par s_0 la classe de $1 \in H_1$ et, pour tout $n > 0$, on posera

$$s_n = \theta(s_{n-1})\,.$$

L'application quotient de E_n dans Λ_{n+1} sera notée f; f est une forme Λ-linéaire surjective, et l'on a: $\forall n \geqslant 0$, $f(s_n) = c_{n+1}$.

PROPOSITION 3-3. E *est un* Λ-*module libre de base* $\{s_0, s_1, s_2 \ldots\}$.

Démonstration. D'après le corollaire 2-6, on a

$$E_n = \Lambda_n \oplus H_0(H_n, H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n)\,.$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'application de $H_n \otimes H_n$ dans H_n qui à $u \otimes v$ associe vu induit un isomorphisme de $H_0(H_n, H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n)$ sur $H_0(H_{n-1}, H_n) = E_{n-1}$. Ce qui montre que l'application de $\Lambda_n \oplus E_{n-1}$ dans E_n, qui à $u \oplus v$ associe $us_0 + \theta(v)$, est un isomorphisme.

On en déduit, par récurrence sur n, la formule

$$E_n = \Lambda_n s_0 \oplus \Lambda_{n-1} s_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_0 s_n\,,$$

ce qui montre le résultat cherché.

LEMME 3-4. *L'algèbre* Λ *est engendrée par les éléments* c_i, $i > 1$.

Démonstration. La formule

$$E_n = \Lambda_n s_0 \oplus \Lambda_{n-1} s_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_0 s_n$$

montre que Λ_{n+1} est engendré par les sous-modules $\Lambda_{n-i} c_{i+1}$, pour i variant de 0 à n. Comme ceci a lieu pour tout $n > 0$, on en déduit le résultat.

LEMME 3-5. *L'algèbre* Λ *est commutative.*

Démonstration. Soient σ et τ deux tresses. Comme les tresses $\sigma \times \tau$ et $\tau \times \sigma$ sont clairement conjuguées, les traces de σ et de τ commutent dans Λ. Comme de plus les classes c_i proviennent de tresses, Λ est commutatif.

Soit φ une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$ à support fini. Le module $M(\varphi)$ (voir § 2) est un module libre de dimension fini sur l'anneau $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$ et l'algèbre H_n (n étant égal au poids de φ) agit sur $M(\varphi)$. Pour tout élément u de H_n on notera $t_\varphi(u)$ la trace de l'endomorphisme de $M(\varphi)$ induit par la multiplication par u. Comme t_φ est linéaire et prend la même valeur en uv qu'en vu, t_φ induit une application linéaire T_φ de Λ_n dans K que l'on prolongera par 0 sur tous les modules Λ_p, $p \neq n$. Ainsi, l'application T_φ est une application k-linéaire de Λ dans K.

LEMME 3-6. *On a la formule:*

$$T_\varphi(c_n) = \lambda^{n-k}(\lambda+\mu)^{k-1}$$

k *désignant le cardinal du support de* φ.

Démonstration. Soit S le support de φ. C'est une partie de $\mathbf{Z}$ à k éléments. Par définition $M(\varphi)$ a une base $B(\varphi)$ formée des fonctions f de $X_n = \{1, 2, ..., n\}$ dans S telles que pour tout i de S, f prend la valeur i exactement $\varphi(i)$ fois. Si l'on munit $M(\varphi)$ d'un produit scalaire $< \, , \, >$ tel que $B(\varphi)$ soit une base orthonormée, on a

$$T_\varphi(c_n) = \sum_{f \in B(\varphi)} < f, s_1 s_2 \dots s_{n-1}(f) > .$$

Soit f un élément de la base $B(\varphi)$. L'élément $s_{n-1}(f)$ est de la forme $af + bf \circ \varepsilon_{n-1}$, b étant supposé nul si f prend les mêmes valeurs en n et en $n-1$. Comme la valeur de $f \circ \varepsilon_{n-1}$ en n n'est pas modifiée après action des éléments s_i, $i < n-1$, on a

$$< f, s_1 s_2 \dots s_{n-1}(f) > \; = a < f, s_1 s_2 \dots s_{n-2}(f) > .$$

Si $f(n-1)$ est strictement inférieur à $f(n)$, a est nul. Sinon a est égal à λ ou $\lambda + \mu$ suivant que $f(n-1)$ est égal ou non à $f(n)$. En itérant ce raisonnement de proche en proche, on vérifie la formule

$$< f, s_1 s_2 \dots s_{n-1}(f) > \; = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i < n \text{ tel que } f(i) < f(i+1) \\ \lambda^p(\lambda+\mu)^q & \text{sinon}, \end{cases}$$

p (resp. q) étant égal au nombre d'entiers non nuls $i < n$ tels que $f(i)$ et égal (resp. strictement supérieur) à $f(i+1)$.

Si la suite $f(1), ..., f(n)$ est décroissante, q est égal au cardinal de l'image de f diminué d'une unité, et p est égal à $n - 1 - q$. Comme de plus la base $B(\varphi)$ ne contient qu'une seule fonction décroissante, on vérifie aisément le lemme.

PROPOSITION 3-7. *Soit* φ *une fonction de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{N}$ *de poids* $n = p + q$. *Soient* u *et* v *deux éléments de* Λ_p *et* Λ_q. *Alors on a*

$$T_\varphi(uv) = \sum T_{\varphi'}(u) T_{\varphi-\varphi'}(v),$$

la sommation ayant lieu sur toutes les fonctions φ' *de poids* p, *comprises au sens large entre* 0 *et* φ.

Démonstration. Désignons par $H_p \times H_q$ l'image par l'application $\times$ de $H_p \otimes H_q$ dans H_n. Le module $M(\varphi)$ est isomorphe, en tant que $H_p \times H_q$-module à la somme directe des modules $M(\varphi') \otimes M(\varphi - \varphi')$, φ' appartenant à l'ensemble des fonctions de poids p et comprises entre 0 et φ. Soient x et y des représentants de u et v dans H_p et H_q. Comme la trace de $u \otimes v$ agissant sur $M(\varphi') \otimes M(\varphi - \varphi')$ est égal au produit de la trace de u agissant sur $M(\varphi')$ par la trace de v agissant sur $M(\varphi - \varphi')$, on obtient le résultat cherché.

COROLLAIRE 3-8. *Soit* φ *une fonction à support fini de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{N}$. *Soit* ε *une bijection de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{Z}$. *Alors les formes linéaires* T_φ *et* $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ *sont égales.*

Démonstration. D'après le lemme 3-6 T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent la même valeur sur les éléments c_n de Λ. D'après la proposition 3-7, si, pour tout φ, T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent les mêmes valeurs en u et en v, elles prennent, pour tout φ, la même valeur en uv. On en déduit que T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ sont égales quel que soit φ.

Il en résulte que T_φ ne dépend que de la partition du poids n de φ en les nombres $\varphi(p)$. Cette partition est caractérisée par la suite finie $p_1, p_2, \ldots; p_i$ désignant le nombre de fois où φ prend la valeur i. On notera alors T_φ sous la forme T_u, où u est le mot $c_1^{p_1} c_2^{p_2} \ldots$.

§ 4. LA TRACE T

Soit $x = (x_i)$ une famille de symboles. On désignera par $A(x)$ l'algèbre des séries en les x_i à coefficients dans $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$. Un élément de

$A(x)$ est donc une combinaison linéaire finie ou infinie de monômes finis en les x_i, à coefficients dans K. En affectant à chaque x_i un degré 1, $A(x)$ devient une algèbre graduée. Si x et y sont deux familles de symboles, $A(x, y)$ désignera l'algèbre $A(z)$, z étant l'union disjointe des deux familles.

Le i-ième polynôme symétrique élémentaire en les variables x_i sera noté $c_i(x)$. L'algèbre des séries symétriques de $A(x)$ est donc l'anneau gradué des séries formelles $K[[c_1(x), c_2(x), \ldots]]$, $c_i(x)$ étant affecté du degré i.

Soit x une famille de symboles indexée par $\mathbf{Z}$. Les éléments $c_i(x)$ seront notés c_i. On définit alors une application T de Λ dans $K[c_1, c_2, \ldots]$ de la façon suivante:

$$\forall n \geqslant 0\,, \qquad \forall u \in \Lambda_n\,, \qquad T(u) = \sum_{\varphi} T_{\varphi}(u) \prod_i x_i^{\varphi(i)}\,,$$

la sommation ayant lieu sur toutes les fonctions φ à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$.

Pour tout u de Λ_n, $T(u)$ est une série homogène de degré n et symétrique, c'est donc un polynôme homogène de degré n en les c_i.

THÉORÈME 4-1. *T est un morphisme de k-algèbres graduées de Λ dans $K[c_1, c_2, \ldots]$ et les images par T des classes c_i de Λ sont données par la formule suivante:*

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) = \prod_i \frac{1 + \mu x_i}{1 - \lambda x_i} = \frac{1 + \mu c_1 + \mu^2 c_2 + \ldots}{1 - \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 - \ldots}\,.$$

Démonstration. Il est clair que T est k-linéaire. Le fait que T respecte le produit est conséquence de la proposition 3-7. D'après le lemme 3-6, on a pour tout $n > 0$,

$$(\lambda+\mu)T(c_n) = \sum \lambda^{n-k}(\lambda+\mu)^k \prod_i x_i^{\varphi(i)}\,,$$

la sommation ayant sur toutes les fonctions φ de poids n de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, k désignant le cardinal du support de φ.

Si a est un entier de $\mathbf{N}$, désignons par $\bar{a}$ le nombre qui vaut 0 ou 1 suivant que a est nul ou non. Le cardinal k du support de φ est donc égal à la somme des nombres $\overline{\varphi(i)}$ et l'on a

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) = \sum_{\varphi} \prod_i (1+\mu\lambda^{-1})^{\overline{\varphi(i)}} (\lambda x_i)^{\varphi(i)}\,,$$

la somme ayant lieu sur toutes les fonctions φ à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. Ce qui implique

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) = \prod_i \sum_{a\geq 0} (1+\mu\lambda^{-1})^{\bar{a}}(\lambda x_i)^a$$

$$= \prod_i \left(1+(1+\mu\lambda^{-1})\frac{\lambda x_i}{1-\lambda x_i}\right)$$

$$= \prod_i \frac{1+\mu x_i}{1-\lambda x_i} = \frac{1+\mu c_1+\mu^2 c_2+\dots}{1-\lambda c_1+\lambda^2 c_2-\dots}\,.$$

4-2. *Démonstration du théorème 1-5.* On sait déjà que l'algèbre Λ est engendrée par les classes c_i, $i > 0$. Or, modulo les décomposables de l'algèbre $K[c_1, c_2, \dots]$, on a

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) \equiv (1+\mu c_1+\mu^2 c_2+\dots)(1+\lambda c_1-\lambda^2 c_2+\dots)$$

$$\equiv 1 + (\lambda+\mu)c_1 + (\mu^2-\lambda^2)c_2 + (\mu^3+\lambda^3)c_3 + \dots$$

$T(c_i)$ est donc, modulo les décomposables de $K[c_1, c_2, \dots]$, un multiple non nul de c_i et les éléments $T(c_i)$ sont algébriquement indépendants. Il en est donc de même des classes c_i de Λ et Λ est la k-algèbre des polynômes en les variables c_i.

Il est possible de donner une forme assez concise de la trace T de la façon suivante. Soient x et y des familles de symboles. Si f est une série de l'anneau $A(x, y)$, symétrique en x et en y, f est une combinaison linéaire de monômes de la forme uv, u étant un monôme en les éléments $c_i(x)$ et v un monôme en les éléments $c_i(y)$. Si l'on remplace dans chacun de ces monômes, u par le monôme correspondant en les classes c_i et v par l'application $T_{v'}$ où v' est obtenu en remplaçant dans v chaque $c_i(y)$ par la classe c_i, on obtient une application linéaire de $K[c_1, c_2, \dots]$ dans lui-même que l'on notera $\hat{f}$.

THÉORÈME 4-3. *La trace T est égale à $\hat{f}$, f étant la série*

$$f = \prod_{ij} (1+x_i y_j)\,.$$

Démonstration. Par définition la trace T est égale à $\hat{f}$, avec

$$f = \sum_\varphi u(\varphi) \prod_i x_i^{\varphi(i)}\,,$$

$u(\varphi)$ étant le monôme $c_1(y)^{p_1} c_2(y)^{p_2} \dots$ et p_i désignant le nombre de fois où φ prend la valeur i. C'est-à-dire que l'on a

$$u(\varphi) = \prod_i c_{\varphi(i)}(y) \qquad \text{en convenant que } c_0(y) \text{ est égal à } 1\,.$$

Et cela implique

$$f = \sum_{\varphi} \prod_i c_{\varphi(i)}(y) x_i^{\varphi(i)} = \prod_i \sum_{n>0} c_n(y) x_i^n = \prod_i \prod_j (1 + x_i y_j) .$$

§ 5. La trace de Jones-Ocneanu

On se propose ici de montrer les théorèmes 1-6 et 1-7.

5-1. Soit donc $\equiv$ une relation d'équivalence additive sur Λ possédant la propriété suivante:

(P) $\forall n > 0, \forall u \in H_n, \quad t_n(u) \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}]$.

Comme σ_n^{-1} est égal à $\alpha\beta^{-1} - \beta^{-1}\sigma_n$, on a

$$t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}] = \alpha\beta^{-1} c_1 t_n(u) - \beta^{-1} t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] .$$

D'autre part, l'application de H_n dans H_{n+1} qui à u associe $(ux1_1)\sigma_n$ induit l'application θ de E_{n-1} dans E_n (voir 3-2). La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0, \forall u \in E_{n-1}, \quad f(u) \equiv f(\theta u) \equiv \alpha\beta^{-1} c_1 f(u) - \beta^{-1} f(\theta u) ,$$

c'est-à-dire

$$\forall u \in E , \quad f(u) \equiv f(\theta u) \quad \text{et} \quad (1 + \beta - ac_1) f(u) \equiv 0 ,$$

f désignant la projection canonique de E sur Λ.

D'autre part, E est un Λ-module libre de base $(s_0, s_1, s_2, ...)$ et l'on a

$$\forall n > 0 , \quad \theta s_n = s_{n+1} \quad \text{et} \quad f(s_n) = c_{n+1} .$$

La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0 , \quad \forall u \in \Lambda , \quad uc_n \equiv uc_{n+1} \quad \text{et} \quad uc_n(1 + \beta - \alpha c_1) \equiv 0 ,$$

et la plus petite relation $\equiv$ vérifiant la propriété (P) est donc la congruence modulo l'idéal J de Λ engendré par les éléments

$$c_n - c_1 , \quad n > 1 \quad \text{et} \quad c_1(1 + \beta - \alpha c_1) ,$$

ce qui achève de démontrer le théorème 1-6.

5-2. Soit τ une tresse de $B_n, n > 0$. La classe de $t_n(\tau)$ modulo l'idéal I_0 de Λ engendré par les éléments $c_i - c_1$ est de la forme cP, où c représente

la classe commune des c_i et P est un polynôme de $k[c] = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]$. Il en résulte que la classe de $t_n(\tau)$ modulo J est représentée par cP', P' désignant la classe de P dans l'anneau $A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c}$. D'après les théorèmes d'Alexander et Markov, le polynôme P' ne dépend que de l'entrelacs $\hat{\tau}$. On a ainsi associé à tout entrelacs orienté E un polynôme $P_E = P'$ de l'anneau A. Cet anneau est en fait le sous-anneau de $k[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$ engendré par α, β, β^{-1} et $(1+\beta)\alpha^{-1}$.

Si x est un croisement d'un entrelacs E dessiné dans le plan, la méthode d'Alexander permet de modifier le dessin de E sans changer le croisement x de façon à obtenir un entrelacs E' isotope à E et de la forme $\hat{\tau}$, où τ est une tresse de B_n. Il en résulte que les trois entrelacs E_+, E_- et E_0 obtenus par modification de E au voisinage de x sont isotopes à des entrelacs de la forme $\hat{\tau}_+$, $\hat{\tau}_-$ et $\hat{\tau}_0$ où l'on a

$$\tau_+ = \tau'\sigma_i\tau'', \quad \tau_- = \tau'\sigma_i^{-1}\tau'', \quad \tau_0 = \tau'\tau''.$$

On a alors dans l'algèbre H_n l'égalité suivante:

$$\tau_+ - \alpha\tau_0 + \beta\tau_- = 0,$$

ce qui implique

$$P_{E_+} - \alpha P_{E_0} + \beta P_{E_-} = 0.$$

Si E est le nœud trivial il est de la forme $\hat{1}_1$ et la classe de 1_1 dans le quotient de Λ par I_0 est égal à c. On a donc

$$P_E = 1$$

et le théorème 1-7 est alors clair.

§ 6. Une généralisation du polynôme de Jones-Conway

Soit $n > 0$ un entier. Soit L une sous-variété différentiable compacte orientée de dimension 1 de l'espace usuel $\mathbf{R}^3$ entièrement contenue dans la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$. On suppose que le bord de L est standard. C'est-à-dire qu'il est formé des $2n$ points de coordonnées $(i, j, 0)$ avec $i = 0, 1$ et j variant de 1 à n. On suppose de plus qu'en chacun de ces points, le vecteur tangent à L est vertical descendant, c'est-à-dire à projection nulle sur le plan horizontal $0 \times \mathbf{R}^2$ et à projection négative sur l'axe vertical $\mathbf{R} \times 0$.

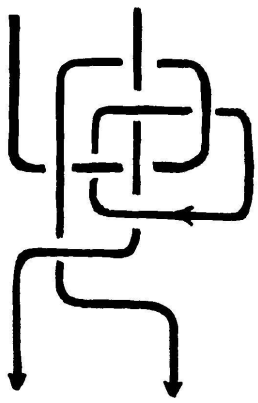
Définition. Une telle variété L sera appelée semi-tresse à n brins. Deux semi-tresses à n brins seront dites isotopes s'il existe une isotopie de la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$ fixe sur le bord qui envoie l'une sur l'autre.

Soient L et L' deux semi-tresses à n brins. En recollant les deux bandes l'une au-dessus de l'autre (celle contenant L étant au-dessus), on obtient une nouvelle semi-tresse. Cette semi-tresse sera appelée produit de L par L' et notée LL'.

PROPOSITION 6-1. *L'ensemble des classes d'isotopie de semi-tresses à n brins est un monoïde unitaire pour le produit. Ce monoïde contient le groupe des tresses B_n comme sous-monoïde. Il sera noté $\hat{B}_n$.*

Remarque. Contrairement au groupe B_n, le monoïde $\hat{B}_n$ est très gros, même pour n petit. Ainsi $\hat{B}_0$ est isomorphe au monoïde des classes d'isotopie d'entrelacs orientés, la loi de composition étant la somme disjointe.

Exemple de semi-tresse à 2 brins:



Comme précédemment, on posera

$$A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c} = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]/_{1+\beta-\alpha c}\,.$$

THÉORÈME 6-2. *Il existe pour tout $n > 0$ une unique représentation ρ du monoïde $\hat{B}_n$ dans l'algèbre de Hecke $H_n \underset{k}{\otimes} A$, possédant les propriétés suivantes:*

— *ρ étend la représentation canonique de B_n dans H_n,*

— *si L_+, L_- et L_0 sont trois semi-tresses à n brins obtenues à partir d'une semi-tresse par modifications au voisinage d'un croisement (avec les mêmes notations que dans le cas des entrelacs), on a*

$$\rho(L_+) + \beta\rho(L_-) - \alpha\rho(L_0) = 0\,.$$

Démonstration. Elle occupera tout le reste du paragraphe.

i) Construction de ρ.

Soit K le corps de fraction de A. Soit ε l'application canonique de H_n dans A, composée de la trace de H_n dans Λ et de l'application quotient de Λ dans A qui envoie chaque classe c_i en c.

LEMME 6-3. L'application qui à u et v de H_n associe $\varepsilon(uv)$ induit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur le K-espace vectoriel $H_n \otimes K$.

Démonstration. Posons, pour tout u et v de H_n, $<u, v>$ l'élément $\varepsilon(uv)$ de A. Il est clair que le produit scalaire $< \, , \, >$ est symétrique. Si l'on quotiente k, A, H_n et Λ par les relations

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1,$$

k devient $\mathbf{Z}$, Λ devient l'anneau $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$, A devient $\mathbf{Z}[c]$ et H_n devient $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$. Si σ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$, sa classe dans Λ est le monôme $c_1^{p_1} c_2^{p_2} \ldots$, où p_i représente le nombre d'orbites de σ à i éléments. En effet, si σ est un cycle d'ordre n, il est conjugué à la permutation $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}$ et sa classe dans Λ est c_n. Si σ est formé de cycles d'ordres q_i, σ est conjugué à une permutation $\tau_1\tau_2 \ldots$ où les τ_i sont des cycles d'ordres q_i et sa classe est le produit des classes c_{q_i}.

Il en résulte que la classe de σ dans $\mathbf{Z}[c]$ est égale à c^m, m étant le nombre d'orbites de σ. Et le produit scalaire $<\sigma, \tau>$ de deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ est égal à c^m, m étant le nombre d'orbites de $\sigma\tau$. Soit Δ le déterminant de ce produit scalaire calculé dans la base $\mathfrak{S}_n$ de $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$. On a

$$\Delta = \sum_f [f] \prod_\sigma c^{m(\sigma f(\sigma))},$$

le produit portant sur toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ et la somme sur toutes les bijections de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même. Le symbole $[f]$ désigne la signature de f et $m(\tau)$ désigne le nombre d'orbites de τ.

Comme $m(\tau)$ est majoré par n, quelle que soit la permutation τ, le degré de Δ est majoré par $nn!$. D'autre part, le coefficient de $c^{nn!}$ dans Δ est la somme des nombres $[f]$, f parcourant l'ensemble des bijections de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même telles que $\sigma f(\sigma)$ ait n orbites quel que soit σ, c'est-à-dire telles que $\sigma f(\sigma)$ soit l'identité quel que soit σ. Cet ensemble de bijections est donc réduit à un élément et le coefficient de $c^{nn!}$ dans Δ est non nul. Il en résulte que Δ est non nul. Or Δ est la classe du déterminant de la forme bilinéaire symétrique $< \, , \, >$ dans le quotient $\mathbf{Z}[c]$ de A. On en déduit que le produit scalaire $< \, , \, >$ est non dégénéré dans K.

Soit L une semi-tresse à n brins. Pour toute tresse σ de B_n on peut refermer la semi-tresse $L\sigma$ et l'on obtient un entrelacs orienté E_σ. On notera $F(\sigma)$ le polynôme de Jones-Conway de E_σ.

LEMME 6-4. *L'application F s'étend en une application linéaire, toujours notée F, de l'algèbre H_n dans l'anneau A.*

Démonstration. On étend linéairement F à l'algèbre de groupe $k[B_n]$. Soient σ et τ deux tresses et $i < n$ un entier. D'après les propriétés du polynôme de Jones-Conway, on a

$$F(\sigma\sigma_i^2\tau) - \alpha F(\sigma\sigma_i\tau) + \beta F(\sigma\tau) = 0$$

et F se factorise à travers l'algèbre H_n.

Comme le produit scalaire $< \, , \, >$ est non dégénéré sur K, il existe un unique élément U de l'algèbre $H_n \otimes K$ tel que

$$\forall u \in H_n, \quad cF(u) = \langle U, u \rangle$$

et U ne dépend que de la classe d'isotopie de la semi-tresse L; U sera noté $\rho(L)$.

ii) Propriétés de ρ.

LEMME 6-5. *Si L est une tresse τ, $\rho(\tau)$ est égal à la classe de τ dans H_n.*

Démonstration. Soit σ une tresse. En refermant la tresse $\tau\sigma$ on obtient l'entrelacs E_σ. On en déduit que la classe $\varepsilon(\tau\sigma)$ dans A est égale à cP_{E_σ} et l'on a

$$cF(\sigma) = \langle \tau, \sigma \rangle .$$

Comme ceci a lieu pour toute tresse σ et donc pour tout élément de H_n, $\rho(\tau)$ est égal à la classe de τ dans H_n.

LEMME 6-6. *Si L est une semi-tresse à n brins et σ une tresse de B_n, on a*

$$\rho(L\sigma) = \rho(L)\rho(\sigma) .$$

Démonstration. Soit τ une tresse de B_n. Le produit scalaire $\langle \rho(L\sigma), \tau \rangle$ est égal au produit de c par le polynôme de Jones-Conway de l'entrelacs obtenu en fermant $L\sigma\tau$. Il en résulte que $\langle \rho(L\sigma), \tau \rangle$ est égal à $\langle \rho(L), \sigma\tau \rangle$

c'est-à-dire à $<\rho(L)\sigma, \tau>$. Comme ceci a lieu pour toute tresse τ, $\rho(L\sigma)$ est égal à $\rho(L)\rho(\sigma)$.

LEMME 6-7. *Soient* L_+, L_- *et* L_0 *trois semi-tresses obtenues par modification d'une semi-tresse près d'un croisement. Le croisement étant de signe positif pour* L_+ *et négatif pour* L_- *et ayant disparu dans* L_0. *Alors on a*

$$\rho(L_+) + \beta\rho(L_-) - \alpha\rho(L_0) = 0 .$$

Démonstration. Soit σ une tresse. Alors les trois entrelacs obtenus en fermant $L_+\sigma$, $L_-\sigma$ et $L_0\sigma$ sont obtenus d'un entrelacs par modifications au voisinage d'un croisement. D'après les propriétés du polynôme de Jones-Conway, on a

$$<\rho(L_+), \sigma> + \beta<\rho(L_-), \sigma> - \alpha<\rho(L_0), \sigma> = 0$$

et l'on en déduit la formule cherchée.

iii) Unicité de ρ.

Soit L une semi-tresse représentée par une projection régulière sur une bande $[0, 1] \times \mathbf{R}$ du plan. Notons $C_1, C_2, ..., C_n$ les composantes connexes de L qui partent de la partie supérieure de la bande en les numérotant de façon que les points supérieurs des composantes soient placés de la gauche vers la droite. On notera E l'entrelacs formé des composantes fermées de L. On dira que L est ascendante si E est en dessous de chaque C_i et si, en parcourant C_1 puis C_2 et ainsi de suite jusqu'à C_n, chaque fois que l'on croise une portion de courbe déjà vue, on la croise par dessus. Il est clair que si L est ascendante, l'union des C_i est dénouée et L est isotope à la somme disjointe d'une tresse et d'un entrelacs. Si L est une semi-tresse il suffit de modifier les positions dessus-dessous de certains croisements et l'on obtient une semi-tresse ascendante.

LEMME 6-8. *Pour toute semi-tresse* L *à* n *brins,* $\rho(L)$ *appartient à* $H_n \otimes A$.

LEMME 6-9. *Soit* ρ' *une application de* $\hat{B}_n$ *dans* $H_n \otimes A$ *qui vérifie les propriétés du théorème 6-1. Alors pour toute semi-tresse* L, $\rho'(L)$ *est égal à* $\rho(L)$.

LEMME 6-10. *Soient* L *et* L' *deux semi-tresses à* n *brins. Alors on a*

$$\rho(LL') = \rho(L)\rho(L') .$$

Démonstrations. Ces lemmes vont être démontrés par récurrence sur le nombre de croisements de L. Supposons donc que les lemmes sont vérifiés pour toute semi-tresse ayant au plus $m - 1$ croisements. Soit L une semi-tresse ayant m croisements. Si l'on modifie un croisement de L (par modification dessus-dessous) on obtient une nouvelle semi-tresse L_1. Soit L_0 la semi-tresse obtenue en supprimant le croisement. D'après le lemme 6-7, on a

$$\rho(L) + \beta\rho(L_1) = \alpha\rho(L_0) \quad \text{ou} \quad \beta\rho(L) + \rho(L_1) = \alpha\rho(L_0)$$

suivant le signe du croisement considéré. Comme L_0 a $m - 1$ croisements, $\rho(L_0)$ appartient à $H_n \otimes A$, $\rho'(L_0)$ est égal à $\rho(L_0)$ et $\rho(L_0L')$ est égal à $\rho(L_0)\rho(L')$. On en déduit que $\rho(L)$ appartient à $H_n \otimes A$ si et seulement si $\rho(L_1)$ appartient à $H_n \otimes A$, que ρ' et ρ sont égaux en L si et seulement si ils sont égaux en L_1 et que $\rho(LL')$ est égal à $\rho(L)\rho(L')$ si et seulement si $\rho(L_1L')$ est égal à $\rho(L_1)\rho(L')$.

Pour montrer les propriétés cherchées on peut supposer, quitte à modifier les croisements non ascendants de L, que L est ascendant. La semi-tresse L est alors isotope à l'union disjointe d'une tresse τ et d'un entrelacs E.

Soit σ une tresse. L'entrelacs obtenu en fermant $L\sigma$ est l'union disjointe de E et de l'entrelacs obtenu en fermant τ. On a donc

$$<\rho(L), \sigma> \; = \; <\tau, \sigma> \, cP_E$$

ce qui implique que $\rho(L)$ est égal à $\rho(\tau)cP_E$ et par suite appartient à $H_n \otimes A$.

D'autre part, pour tout entrelacs orienté E', on peut considérer l'image par ρ' de l'union disjointe de τ et de E'. On construit ainsi un invariant polynomial d'entrelacs qui vérifie les propriétés du polynôme de Jones-Conway, sauf la propriété de valoir 1 sur l'entrelacs trivial. D'après l'unicité du polynôme de Jones-Conway, on a

$$\rho'(\tau \bigcup E') = \rho(\tau)cP_E \, .$$

Comme il en est de même pour ρ, ρ et ρ' prennent la même valeur en L.

Enfin, on remarque que LL' est isotope à l'union disjointe de ε et de $\tau L'$. On a donc pour toute tresse σ

$$<\rho(LL'), \sigma> \; = \; <\rho(L'), \sigma\tau> \, cP_E \, ,$$

ce qui implique

$$\rho(LL') = \rho(\tau)\rho(L')cP_E \, .$$

Comme ceci a lieu quel que soit L', on a

$$\rho(L) = \rho(\tau)cP_E$$

et l'on a

$$\rho(LL') = \rho(L)\rho(L') .$$

Les lemmes sont alors démontrés, ce qui prouve que ρ est une représentation de $\hat{B}_n$ dans $H_n \otimes A$ qui prolonge la représentation canonique de B_n dans H_n, qu'elle vérifie la formule voulue sur les semi-tresses L_+, L_- et L_0, et que c'est la seule représentation vérifiant ces propriétés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDER, J. W. A lemma on a system of knotted curves. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA 9* (1923), 93-95.

[2] —— A matrix knot invariant. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA 19* (1933), 272-275.

[3] BIRMAN, J. S. *Braids, links and mapping class group.* Annals of Math. Studies n° 82. Princeton Univ. Press. Princeton, N.J. (1976).

[4] BIRMAN, J. S. and H. WENZL. Braids, links, polynomials and a new algebra. Preprint 1986.

[5] BRANDT, R. D., W. B. R. LICKORISH and K. C. MILLETT. A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Invent. Math. 84* (1986), 563-573.

[6] FREYD, P., D. YETTER, J. HOSTE, W. B. R. LICKORISH, K. C. MILLETT and A. OCNEANU. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. AMS 12* (1985), 239-246.

[7] de la HARPE, P., M. KERVAIRE and C. WEBER. On the Jones polynomial. *L'Ens. Math. 32* (1986), 271-335.

[8] HOSTE, J. A new polynomial for knots and links. *Pac. J. of Math. 124* (1986), 295-320.

[9] JONES, V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin AMS 12* (1985), 103-111.

[10] —— A new knot polynomial and von Neumann algebras. *Notices AMS 33* (1986), 219-225.

[11] —— Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Annals of Math. 126* (1987), 389-414.

[12] KAUFFMAN, L. State models and the Jones polynomial. *Topology 26* (1987), 395-407.

[13] —— An invariant of regular isotopy. Preprint.

[14] LICKORISH, W. B. R. and K. C. MILLETT. A polynomial invariant of oriented links. *Topology 26* (1987), 107-141.

[15] MORTON, H. Threading knot diagrams. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 99* (1986), 247-260.

[16] MURASUGI, K. Jones polynomial and classical conjectures in knot theory. *Topology 26 n° 2* (1987), 187-194.

[17] THISTLETHWAITE, M. B. Knot tabulations and related topics. In *Aspects of Topology*. In memory of Hugh Dowker 1912-1982. Cambridge Univ. Press (1985), 1-76.

[18] WENZL, H. Representations of Hecke algebras and subfactors, Thesis, Univ. of Pennsylvania (1985).

(Reçu le 29 février 1988)

Pierre Vogel

Université de Nantes
Département de Mathématiques
2, rue de la Houssinière
F-44072 Nantes Cedex 03
(France)