

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE CARACTÉRISATION DES NORMES EUCLIDIENNES EN DIMENSION FINIE  
**Autor:** Lion, Georges  
**Kapitel:** II. La boule unité de  $L(E)$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56586>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Par conséquent  $\mathcal{G}_p$  est un sous-ensemble borné de  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ , espace vectoriel des endomorphismes de  $\mathbf{R}^n$ , normé par

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$

LEMME 2. *Pour tout groupe compact  $\mathcal{G}$  contenu dans  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ , il existe une forme quadratique  $\Phi$ , à valeurs strictement positives hors de 0, et invariante par  $\mathcal{G}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mu$  la mesure de Haar du groupe  $\mathcal{G}$ , et  $\varphi$  une forme quadratique, à valeurs  $> 0$  hors de 0; en posant  $\Phi = \int_{\mathcal{G}} \varphi \circ u d\mu(u)$ , on définit une forme quadratique qui a les propriétés requises.

D'une autre façon, on peut appliquer un théorème démontré par Hochschild ([4], XV 3-1):  $G_1$  étant la composante connexe de l'élément neutre du groupe de Lie  $G$ , on suppose  $G/G_1$  fini; il existe alors un sous-groupe compact  $K$ , tel que tout autre sous-groupe compact de  $G$  soit contenu dans un conjugué de  $K$ ; dans le cas présent on prend  $G = GL(n, \mathbf{R})$ , et le rôle de  $K$  peut être joué par  $O(n)$  qui en est un sous-groupe compact maximal.

## II. LA BOULE UNITÉ DE $\mathcal{L}(E)$

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ , muni d'une norme  $N$ , et  $\mathcal{L}(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes de  $E$  muni de la norme  $\mathcal{N}$  des opérateurs:

$$\mathcal{N}(u) = \sup_{N(x)=1} N \circ u(x).$$

Soit  $\mathcal{B}_N$  la boule unité fermée de  $\mathcal{L}(E)$ .

LEMME 1. *Soit  $N$  non euclidienne,  $\mathcal{G}_N$  l'ensemble des isométries linéaires pour  $N$ ,  $\mathcal{K}_N$  l'enveloppe convexe fermée de  $\mathcal{G}_N$ . Alors l'inclusion  $\mathcal{K}_N \subset \mathcal{B}_N$  est stricte.*

*Démonstration.* Le choix d'une base de  $E$  permet de se ramener à la situation du paragraphe I, et de prouver l'existence d'une forme quadratique  $> 0$  hors de 0, invariante par  $\mathcal{G}_N$ . Munissons  $E$  de la structure euclidienne définie par cette forme quadratique; de cette façon  $\mathcal{G}_N$  est contenu dans le groupe des isométries euclidiennes de  $E$

Par ailleurs posons  $B_N = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$ ; si  $B_N$  était une boule euclidienne, la norme  $N$  serait proportionnelle à la norme euclidienne de  $E$ , et serait elle aussi euclidienne.

Il existe donc deux éléments de  $E$ , notés  $x_1$  et  $x_2$ , tels que  $N(x_1) = N(x_2) = 1$ , et que  $x_1$  et  $x_2$  soient de normes euclidiennes distinctes;  $x_1$  et  $x_2$  engendrent un espace vectoriel  $F$  de dimension 2, et  $B_N \cap F$  n'est pas un « disque ». Nous allons montrer par l'absurde que  $B_N \cap F$  admet en au moins un point  $x_0$  une droite d'appui  $D_0$  (voir [2] § 5, déf. 3) non orthogonale à  $x_0$ .

Si ce n'était pas le cas, la frontière du convexe  $B_N \cap F$  pourrait alors être définie par une équation polaire du type  $\rho = f(\theta)$ , où  $f$  serait dérivable par suite de l'unicité de la droite d'appui (voir [9]); mais cette droite d'appui étant orthogonale au « rayon », on aurait nécessairement  $f'(\theta) = 0$  pour tout  $\theta$ , donc  $f(\theta)$  constante, ce qui contredit le fait que  $x_1$  et  $x_2$  sont de normes euclidiennes distinctes.

L'existence de  $x_0$  est donc établie; en vertu du théorème de Hahn Banach (voir [2] § 5),  $B_N$  admet en  $x_0$  un hyperplan d'appui  $H_0$  contenant  $D_0$ , donc non orthogonal à  $x_0$  (notons que  $H_0$  peut ici être construit par récurrence puisque la dimension de  $E$  est finie). Par symétrie,  $B_N$  admet en  $-x_0$  un hyperplan d'appui parallèle à  $H_0$ .

Soit  $v$  la projection de  $E$  sur  $\mathbf{R}x_0$ , parallèlement à  $H_0$ . On a  $v(B_N) \subset B_N$ , donc  $\mathcal{N}(v) = 1$ , et  $v \in \mathcal{B}_N$ . Par ailleurs  $\|v\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|v(x)\| > 1$ , car  $v$  augmente strictement la norme euclidienne de tout vecteur non nul orthogonal à  $H_0$ . Nous allons montrer que  $v$  appartient à  $\mathcal{B}_N \setminus \mathcal{K}_N$ .

Remarquons d'abord que  $\mathcal{L}(E)$  est de dimension  $n^2$ , et donc tout élément de  $\mathcal{K}_N$  peut s'exprimer comme barycentre d'au plus  $n^2 + 1$  éléments de  $\mathcal{G}_N$  (théorème de Carathéodory, [2] § 2 exercice 9).

Si l'on avait  $v \in \mathcal{K}_N$ , il existerait alors

$$\begin{cases} v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathcal{G}_N \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in ]0, 1[ \end{cases} \quad (m \leq n^2 + 1)$$

tels que  $v = \sum_1^m \alpha_i v_i$  et  $1 = \sum_1^m \alpha_i$ . Chaque  $v_i$  est une isométrie euclidienne (inclusion de  $\mathcal{G}_N$ ); on aurait donc

$$1 < \|v\| \leq \sum_1^m \alpha_i \|v_i\| = \sum_1^m \alpha_i = 1; \quad \text{d'où la contradiction.}$$

LEMME 2. Munissons  $E$  d'une norme euclidienne; soit  $\mathcal{B}$  la boule unité qu'on en déduit dans  $\mathcal{L}(E)$ . Alors tout élément extrémal ([2] § 7, déf. 1) de  $\mathcal{B}$  est une isométrie euclidienne de  $E$ .

Démonstration. On suppose le résultat acquis pour la dimension  $n - 1$ ; soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , tel que  $\|u\| = 1$ , mais que  $u$  ne soit pas une isométrie. Il existe  $x_1 \in E$ , tel que  $\|u(x_1)\| = \|x_1\| > 0$ ; composant  $u$  avec une rotation, on se ramène au cas où  $u(x_1) = x_1$ .

L'orthogonal  $V$  de  $x_1$  est stable par  $u$ ; en effet pour  $y \in V$  et  $t \in \mathbf{R}$ , on a

$$\|u(x_1 + ty)\|^2 \leq \|x_1 + ty\|^2,$$

c'est-à-dire

$$\|u(x_1)\|^2 + 2t(x_1 | u(y)) + t^2 \|u(y)\|^2 \leq \|x_1\|^2 + t^2 \|y\|^2,$$

d'où  $(x_1 | u(y)) = 0$ ,  $u(y) \in V$ ,  $u(V) \subset V$ .

Mais la restriction de  $u$  à  $V$  n'est pas une isométrie (car alors  $u$  en serait une). D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$u|_V = (u_1 + u_2)/2, \quad \text{où} \quad u_1 \neq u_2 \quad \text{et} \quad \|u_1\| = \|u_2\| = 1.$$

On peut prolonger  $u_1$  et  $u_2$ , de  $V$  à  $E$ , en  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{u}_2 \in \mathcal{B}$  tels que les restrictions de  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{u}_2$  à  $\mathbf{R}x_1$  soient l'identité. Comme  $u = (\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)/2$  et  $\tilde{u}_1 \neq \tilde{u}_2$ ,  $u$  n'est pas un point extrémal de  $\mathcal{B}$ .

Désormais pour tout convexe  $A$ , on note  $\partial A$  l'ensemble des éléments extrémaux de  $A$ .

THÉORÈME 1. Soit  $E$  espace vectoriel réel de dimension finie. Alors

- 1) Pour toute norme  $N$  sur  $E$ , on a  $\mathcal{G}_N \subset \partial \mathcal{B}_N$ .
- 2) L'égalité  $\mathcal{G}_N = \partial \mathcal{B}_N$ , équivaut à l'assertion:  $N$  est euclidienne.

Démonstration.

1) Soit  $u \in \mathcal{G}_N$ . Supposons que  $u = (u_1 + u_2)/2$ , avec  $u_1$  et  $u_2 \in \mathcal{B}_N$ . Si  $B_N$  est la boule unité fermée de  $E$ , on a  $u(\partial B_N) = \partial B_N$ . Pour  $x \in \partial B_N$ , l'égalité  $u(x) = (u_1(x) + u_2(x))/2$  implique  $u_1(x) = u_2(x) = u(x)$ . Les restrictions de  $u$ ,  $u_1$  et  $u_2$  à  $\partial B_N$  sont identiques, donc  $u = u_1 = u_2$ , et finalement  $u \in \partial \mathcal{B}_N$ .

2) D'après le lemme 1 ci-dessus, on a  $\partial \mathcal{B}_N \neq \mathcal{G}_N$  lorsque  $N$  n'est pas euclidienne. Inversement supposons  $N$  euclidienne; le lemme 2 permet d'écrire  $\partial \mathcal{B}_N \subset \mathcal{G}_N$ . Puisque, d'après 1), l'inclusion inverse a lieu, on en déduit  $\partial \mathcal{B}_N = \mathcal{G}_N$ .