

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CARACTÉRISATION DES NORMES EUCLIDIENNES EN DIMENSION FINIE
Autor: Lion, Georges
Kapitel: I. Groupe des isométries linéaires
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56586>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Notre travail s'achève par l'étude d'un exemple qui illustre doublement ce qui précède: à la structure euclidienne dans \mathbf{R}^2 , correspond la norme des opérateurs dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$, \mathbf{R} espace de dimension 4; ainsi apparaît une norme non euclidienne dans \mathbf{R}^4 . Mais l'introduction des opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ permet de surcroît d'identifier $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ à \mathbf{C}^2 , et de reconnaître dans la norme étudiée la norme l^1 de \mathbf{C}^2 . Si Γ désigne le groupe des isométries \mathbf{R} linéaires de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même, on peut distinguer dans Γ trois sous-groupes intéressants:

1) *Un sous-groupe isomorphe à $O(2) \times O(2)$.*

2) *Le groupe des éléments de Γ de déterminant $+1$, image de $O(2) \times O(2)$ par la représentation d'indice 2 définie ainsi: Si v et w appartiennent à $O(2)$, on note $\Phi_{v,w}$ l'application $u \mapsto vuw^{-1}$, de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même; $\Phi_{v,w}$ est une isométrie de déterminant 1, et toute telle isométrie peut s'écrire $\Phi_{v,w}$ pour un double choix du couple (v, w) .*

3) *Le groupe des éléments \mathbf{C} -linéaires de Γ , dans lequel opère naturellement le groupe c_2 à 2 éléments, ce qui le rend isomorphe au produit semi-direct de $SO(2)$ par lui-même.*

Je remercie le référé pour la documentation intéressante qu'il m'a signalée.

I. GROUPE DES ISOMÉTRIES LINÉAIRES

Dans ce paragraphe p désigne une fonction définie et continue dans \mathbf{R}^n , à valeurs strictement positives hors de 0, positivement homogène (pour que p soit une norme il faudrait en plus que p soit symétrique et sous additive).

On note \mathcal{G}_p l'ensemble des applications linéaires u de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^n , telles que $p \circ u = p$.

LEMME 1. *\mathcal{G}_p est un groupe compact.*

Démonstration. \mathcal{G}_p est stable pour la composition des applications; tout u de \mathcal{G}_p est inversible car la relation $u(x) = 0$ implique $p(x) = p \circ u(x) = 0$, d'où $x = 0$. \mathcal{G}_p est fermé en vertu de la continuité de p .

Etant continue, p atteint sur la sphère euclidienne unité une borne inférieure $a > 0$, et une borne supérieure A ; on a donc, pour $u \in \mathcal{G}_p$:

$$A \|x\| \geq p(x) = p \circ u(x) \geq a \|u(x)\|.$$

Par conséquent \mathcal{G}_p est un sous-ensemble borné de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, espace vectoriel des endomorphismes de \mathbf{R}^n , normé par

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$

LEMME 2. *Pour tout groupe compact \mathcal{G} contenu dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, il existe une forme quadratique Φ , à valeurs strictement positives hors de 0, et invariante par \mathcal{G} .*

Démonstration. Soit μ la mesure de Haar du groupe \mathcal{G} , et φ une forme quadratique, à valeurs > 0 hors de 0; en posant $\Phi = \int_{\mathcal{G}} \varphi \circ u d\mu(u)$, on définit une forme quadratique qui a les propriétés requises.

D'une autre façon, on peut appliquer un théorème démontré par Hochschild ([4], XV 3-1): G_1 étant la composante connexe de l'élément neutre du groupe de Lie G , on suppose G/G_1 fini; il existe alors un sous-groupe compact K , tel que tout autre sous-groupe compact de G soit contenu dans un conjugué de K ; dans le cas présent on prend $G = GL(n, \mathbf{R})$, et le rôle de K peut être joué par $O(n)$ qui en est un sous-groupe compact maximal.

II. LA BOULE UNITÉ DE $\mathcal{L}(E)$

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n , muni d'une norme N , et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E muni de la norme \mathcal{N} des opérateurs:

$$\mathcal{N}(u) = \sup_{N(x)=1} N \circ u(x).$$

Soit \mathcal{B}_N la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$.

LEMME 1. *Soit N non euclidienne, \mathcal{G}_N l'ensemble des isométries linéaires pour N , \mathcal{K}_N l'enveloppe convexe fermée de \mathcal{G}_N . Alors l'inclusion $\mathcal{K}_N \subset \mathcal{B}_N$ est stricte.*

Démonstration. Le choix d'une base de E permet de se ramener à la situation du paragraphe I, et de prouver l'existence d'une forme quadratique > 0 hors de 0, invariante par \mathcal{G}_N . Munissons E de la structure euclidienne définie par cette forme quadratique; de cette façon \mathcal{G}_N est contenu dans le groupe des isométries euclidiennes de E