I. Groupe des isométries linéaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Notre travail s'achève par l'étude d'un exemple qui illustre doublement ce qui précède: à la structure euclidienne dans $\mathbf{R}^2$, correspond la norme des opérateurs dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, $\mathbf{R}$ espace de dimension 4; ainsi apparaît une norme non euclidienne dans $\mathbf{R}^4$. Mais l'introduction des opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ permet de surcroît d'identifier $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ à $\mathbf{C}^2$, et de reconnaître dans la norme étudiée la norme l^1 de $\mathbf{C}^2$. Si Γ désigne le groupe des isométries $\mathbf{R}$ linéaires de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même, on peut distinguer dans Γ trois sous-groupes intéressants:

1) *Un sous-groupe isomorphe à* $O(2) \times O(2)$.

2) *Le groupe des éléments de* Γ *de déterminant* $+1$, image de $O(2) \times O(2)$ par la représentation d'indice 2 définie ainsi: Si v et w appartiennent à $O(2)$, on note $\Phi_{v,w}$ l'application $u \mapsto vuw^{-1}$, de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même; $\Phi_{v,w}$ est une isométrie de déterminant 1, et toute telle isométrie peut s'écrire $\Phi_{v,w}$ pour un double choix du couple (v, w).

3) *Le groupe des éléments* $\mathbf{C}$*-linéaires de* Γ, dans lequel opère naturellement le groupe c_2 à 2 éléments, ce qui le rend isomorphe au produit semi-direct de $SO(2)$ par lui-même.

Je remercie le référé pour la documentation intéressante qu'il m'a signalée.

I. Groupe des isométries linéaires

Dans ce paragraphe p désigne une fonction définie et continue dans $\mathbf{R}^n$, à valeurs strictement positives hors de 0, positivement homogène (pour que p soit une norme il faudrait en plus que p soit symétrique et sous additive).

On note $\mathscr{G}_p$ l'ensemble des applications linéaires u de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, telles que $p \circ u = p$.

Lemme 1. *$\mathscr{G}_p$ est un groupe compact.*

Démonstration. $\mathscr{G}_p$ est stable pour la composition des applications; tout u de $\mathscr{G}_p$ est inversible car la relation $u(x) = 0$ implique $p(x) = p \circ u(x) = 0$, d'où $x = 0$. $\mathscr{G}_p$ est fermé en vertu de la continuité de p.

Etant continue, p atteint sur la sphère euclidienne unité une borne inférieure $a > 0$, et une borne supérieure A; on a donc, pour $u \in \mathscr{G}_p$:

$$A \| x \| \geqslant p(x) = p \circ u(x) \geqslant a \| u(x) \| .$$

Par conséquent $\mathscr{G}_p$ est un sous-ensemble borné de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$, normé par

$$\| u \| = \sup_{\| x \| = 1} \| u(x) \| .$$

LEMME 2. *Pour tout groupe compact $\mathscr{G}$ contenu dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, il existe une forme quadratique Φ, à valeurs strictement positives hors de 0, et invariante par $\mathscr{G}$.*

Démonstration. Soit μ la mesure de Haar du groupe $\mathscr{G}$, et φ une forme quadratique, à valeurs > 0 hors de 0; en posant $\Phi = \int_{\mathscr{G}} \varphi \circ u d\mu(u)$, on définit une forme quadratique qui a les propriétés requises.

D'une autre façon, on peut appliquer un théorème démontré par Hochschild ([4], XV 3-1): G_1 étant la composante connexe de l'élément neutre du groupe de Lie G, on suppose G/G_1 fini; il existe alors un sous-groupe compact K, tel que tout autre sous-groupe compact de G soit contenu dans un conjugué de K; dans le cas présent on prend $G = GL(n, \mathbf{R})$, et le rôle de K peut être joué par $O(n)$ qui en est un sous-groupe compact maximal.

II. LA BOULE UNITÉ DE $\mathscr{L}(E)$

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, muni d'une norme N, et $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E muni de la norme $\mathscr{N}$ des opérateurs:

$$\mathscr{N}(u) = \sup_{N(x) = 1} N \circ u(x) .$$

Soit $\mathscr{B}_N$ la boule unité fermée de $\mathscr{L}(E)$.

LEMME 1. *Soit N non euclidienne, $\mathscr{G}_N$ l'ensemble des isométries linéaires pour N, $\mathscr{K}_N$ l'enveloppe convexe fermée de $\mathscr{G}_N$. Alors l'inclusion $\mathscr{K}_N \subset \mathscr{B}_N$ est stricte.*

Démonstration. Le choix d'une base de E permet de se ramener à la situation du paragraphe I, et de prouver l'existence d'une forme quadratique > 0 hors de 0, invariante par $\mathscr{G}_N$. Munissons E de la structure euclidienne définie par cette forme quadratique; de cette façon $\mathscr{G}_N$ est contenu dans le groupe des isométries euclidiennes de E