

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE THÉORIE DE DENJOY DES MARTINGALES DYADIQUES  
**Autor:** Kahane, Jean-Pierre  
**Kapitel:** CITATIONS ET PASTICHE  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56598>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$(19) \quad f = \sum_1^{\infty} f^{(n)}.$$

Alors  $f$  est limite de martingale dyadique et sa distribution est  $\mu$ .

f)  $\mu$  vérifie (9). On la décompose encore sous la forme (17), on définit les  $f^{(n)}$  et  $f$  par (19). La condition est la même, et la totale de  $f$ ,  $f_0$ , est nulle. En remplaçant 0 par  $\alpha$  dans le second membre de (18) ce qui est possible à cause de l'hypothèse (9), on obtient  $f_0 = \alpha$ . Le théorème est démontré.

Remarquons que la totalisation de la fonction  $f$  nécessite une seule étape dans les cas a), b), c), d), et qu'elle est pratiquement terminée à l'étape  $\omega$  ( $K^\omega$  est réduit à  $\{0\}$ ) dans les cas e) et f).

Dans le cas f) on peut introduire un « arbre de distribution » permettant le calcul de  $f_0$ . Il s'agit de l'arbre des mesures  $\mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$  qui sont les distributions de  $f$  sur les cellules  $C(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ . Ainsi

$$(20) \quad \begin{cases} \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} = \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0} + \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1} \\ \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(C(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) = \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(X) = 2^{-n} \end{cases}$$

( $n=0, 1, \dots$ ;  $\varepsilon_j=0$  ou 1). La condition (20) est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante. La théorie de la totalisation dyadique montre que se trouve nécessairement dans l'arbre une infinité de mesures à supports compacts; la première étape de la totalisation consiste à remplacer ces mesures par des mesures ponctuelles ayant même masse et même centre de gravité; dans le nouvel arbre, on recommence l'opération, et ainsi de suite, transfinitement au besoin, jusqu'à obtenir un arbre stationnaire. Cet arbre stationnaire décrit alors la martingale dyadique (au niveau  $n$ , on obtient la distribution de  $f_n$ ). Il serait intéressant de connaître la caractérisation des arbres de distributions des limites de martingales dyadiques.

#### CITATIONS ET PASTICHE

1. Si une part de mon œuvre mathématique vient à sauver mon nom de l'oubli, sans doute resterai-je l'analyste qui le premier a trouvé les moyens d'intégrer toute dérivée et de calculer les coefficients de toute série trigonométrique convergente de somme donnée.

Arnaud DENJOY

*Notice sur les travaux scientifiques,*  
Paris, Hermann, 1934 (p. 5)

2. Les théories les plus audacieuses des mathématiques récentes n'effrayaient nullement Painlevé. Il avait une aptitude admirable à les saisir, malgré toute leur nouveauté, et même à les résumer avec un bonheur d'expression auquel l'auteur lui-même n'aurait pas su atteindre. Quelqu'un lui exposait un jour, dans une conversation, l'économie d'une méthode d'intégration, procédant par une infinité d'étapes successives, chacune d'elles s'arrêtant à un ensemble-barrière, dont l'étape suivante enlève au moins un morceau. « Oui, tout y passe », répondit Painlevé qui suivait avec une attention et une lucidité parfaites les explications de son interlocuteur. Ce mot exprimait d'une façon merveilleusement compréhensive, et l'impossibilité qu'un irréductible noyau de résistance à la méthode se constituât, et l'achèvement nécessaire des opérations au terme accessible d'une chaîne de calculs.

Arnaud DENJOY

*Hommes, forme et le nombre*

Paris, Blanchard, 1964 (p. 87-88)

3. La dérivée dyadique est une forteresse. Elle a été construite, par des bâtisseurs géomètres, à partir d'un terre-plein de grande hauteur, suivant un plan dont on a perdu la trace; on ignore même la hauteur du terre-plein de départ. On sait seulement que les bâtisseurs procédaient par étapes et selon un système: au départ, ils ont divisé le terre-plein en deux parties égales, porté de la terre d'une partie sur l'autre et nivelé; sur chacun des niveaux ils ont procédé de même, et ainsi de suite, construisant ainsi, de plus en plus hauts, de plus en plus profonds, de plus en plus tourmentés, des tours et des fossés, des créneaux et des puits, des clochers, des ravins, un édifice fantastique joignant le ciel et les abîmes. Le totalisateur va démanteler la forteresse, et la ramener au terre-plein de départ. Pour cela, il s'attaque d'abord aux places les plus faibles, aux plages sur lesquelles le relief est borné et donc facile à niveler. Une fois nivelée chacune de ces plages, la forteresse est à peine entamée. Mais le nivellement qu'on vient d'opérer fait apparaître de nouvelles places faibles, que le totalisateur nivelle à leur tour. Ainsi de proche en proche, autour du cœur encore inviolé, des plateaux remplacent les morceaux abattus, s'agrandissant et s'enrichissant sans cesse de nouveaux décombres. A chaque étape, de nouveaux murs s'écroulent, le cœur de la forteresse se réduit. Mais si les bâtisseurs ont été habiles, ni mille ni mille milliards d'étapes ne suffisent à détruire ce qui reste. Tout l'art du totalisateur est alors de bien employer son temps. Accélégrant son œuvre, il fait tenir une infinité d'étapes en une heure. L'heure

écoulée, s'il reste encore à faire il se donne une demi-heure pour une infinité de nouveaux assauts. Si cela ne suffit pas, encore un quart d'heure et ainsi de suite. Si, la seconde heure écoulée, quelque chose reste debout, il presse encore le rythme. Chaque attaque emportant un morceau, s'il les précipite comme il convient, rien ne résiste, tout y passe, il vient un instant où le dernier pan de mur s'effondre, et le nivellement est achevé.

### RÉFÉRENCES

- [1] DENJOY, A. Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue. *C. R. Acad. Sc. Paris* 154 (1<sup>er</sup> avril 1912), 859-861.
- [2] ——— Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale. *C. R. Acad. Sc. Paris* 154 (15 avril 1912), 1075-1078.
- [3] ——— *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*. Cinq volumes. Paris, Gauthier-Villars, 1941-1949.
- [4] HENSTOCK, R. *Linear analysis*. Butterworth, 1967.
- [5] PACQUEMENT, A. Détermination d'une fonction au moyen de sa dérivée sur un réseau binaire. *C. R. Acad. Sc. Paris* 284, A (1977), 365-368.
- [6] SKVORCOV, V. A. (= SKVORTSOV, V. A.). On Haar series with convergent subsequences of partial sums. *Soviet Math. Dokl.* 9 (1968), 1469-1471.
- [7] ——— Calcul des coefficients des séries de Haar partout convergentes (en russe). *Matemat. Sbornik* 75 (1968), 349-360.
- [8] ——— Generalized integrals in the theory of trigonometric, Haar, and Walsh series. *Real Analysis Exchange* 12 (1986-87), 59-62.
- [9] ——— A dyadic Henstock integral. *Real Analysis Exchange* 14 (1988-89), à paraître.

(Reçu le 5 janvier 1988)

Jean-Pierre Kahane

Unité Associée CNRS 757  
 Université de Paris-Sud  
 Mathématiques — Bât. 425  
 91405 Orsay Cedex (France)