Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE THÉORIE DE DENJOY DES MARTINGALES DYADIQUES

Autor: Kahane, Jean-Pierre

Kapitel: CITATIONS ET PASTICHE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56598

$$f = \sum_{1}^{\infty} f^{(n)}. \tag{19}$$

Alors f est limite de martingale dyadique et sa distribution est μ.

f) μ vérifie (9). On la décompose encore sous la forme (17), on définit les $f^{(n)}$ et f par (19). La condition est la même, et la totale de f, f_0, est nulle. En remplaçant 0 par α dans le second membre de (18) ce qui est possible à cause de l'hypothèse (9), on obtient $f_0 = \alpha$. Le théorème est démontré.

Remarquons que la totalisation de la fonction f nécessite une seule étape dans les cas a), b), c), d), et qu'elle est pratiquement terminée à l'étape ω (K^ω est réduit à $\{0\}$) dans les cas e) et f).

Dans le cas f) on peut introduire un « arbre de distribution » permettant le calcul de f_0. Il s'agit de l'arbre des mesures $\mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}$ qui sont les distributions de f sur les cellules $C(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Ainsi

$$\begin{cases} \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} = \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0} + \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 1} \\ \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}(C(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)) = \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}(X) = 2^{-n} \end{cases} \tag{20}$$

($n=0, 1, \ldots$; $\varepsilon_j=0$ ou 1). La condition (20) est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante. La théorie de la totalisation dyadique montre que se trouve nécessairement dans l'arbre une infinité de mesures à supports compacts; la première étape de la totalisation consiste à remplacer ces mesures par des mesures ponctuelles ayant même masse et même centre de gravité; dans le nouvel arbre, on recommence l'opération, et ainsi de suite, transfiniment au besoin, jusqu'à obtenir un arbre stationnaire. Cet arbre stationnaire décrit alors la martingale dyadique (au niveau n, on obtient la distribution de f_n). Il serait intéressant de connaître la caractérisation des arbres de distributions des limites de martingales dyadiques.

Citations et pastiche

1. Si une part de mon œuvre mathématique vient a sauver mon nom de l'oubli, sans doute resterai-je l'analyste qui le premier a trouvé les moyens d'intégrer toute dérivée et de calculer les coefficients de toute série trigonométrique convergente de somme donnée.

Arnaud Denjoy
Notice sur les travaux scientifiques,
Paris, Hermann, 1934 (p. 5)

2. Les théories les plus audacieuses des mathématiques récentes n'effrayaient nullement Painlevé. Il avait une aptitude admirable à les saisir, malgré toute leur nouveauté, et même à les résumer avec un bonheur d'expression auquel l'auteur lui-même n'aurait pas su atteindre. Quelqu'un lui exposait un jour, dans une conversation, l'économie d'une méthode d'intégration, procédant par une infinité d'étapes successives, chacune d'elles s'arrêtant à un ensemble-barrière, dont l'étape suivante enlève au moins un morceau. « Oui, tout y passe », répondit Painlevé qui suivait avec une attention et une lucidité parfaites les explications de son interlocuteur. Ce mot exprimait d'une façon merveilleusement compréhensive, et l'impossibilité qu'un irréductible noyau de résistance à la méthode se constituât, et l'achèvement nécessaire des opérations au terme accessible d'une chaîne de calculs.

Arnaud DENJOY
Hommes, forme et le nombre
Paris, Blanchard, 1964 (p. 87-88)

3. La dérivée dyadique est une forteresse. Elle a été construite, par des bâtisseurs géomètres, à partir d'un terre-plein de grande hauteur, suivant un plan dont on a perdu la trace; on ignore même la hauteur du terre-plein de départ. On sait seulement que les bâtisseurs procédaient par étapes et selon un système: au départ, ils ont divisé le terre-plein en deux parties égales, porté de la terre d'une partie sur l'autre et nivelé; sur chacun des niveaux ils ont procédé de même, et ainsi de suite, construisant ainsi, de plus en plus hauts, de plus en plus profonds, de plus en plus tourmentés, des tours et des fossés, des créneaux et des puits, des clochers, des ravins, un édifice fantastique joignant le ciel et les abîmes. Le totalisateur va démanteler la forteresse, et la ramener au terre-plein de départ. Pour cela, il s'attaque d'abord aux places les plus faibles, aux plages sur lesquelles le relief est borné et donc facile à niveler. Une fois nivelée chacune de ces plages, la forteresse est à peine entamée. Mais le nivellement qu'on vient d'opérer fait apparaître de nouvelles places faibles, que le totalisateur nivelle à leur tour. Ainsi de proche en proche, autour du cœur encore inviolé, des plateaux remplacent les morceaux abattus, s'agrandissant et s'enrichissant sans cesse de nouveaux décombres. A chaque étape, de nouveaux murs s'écroulent, le cœur de la forteresse se réduit. Mais si les bâtisseurs ont été habiles, ni mille ni mille milliards d'étapes ne suffisent à détruire ce qui reste. Tout l'art du totalisateur est alors de bien employer son temps. Accélérant son œuvre, il fait tenir une infinité d'étapes en une heure. L'heure

écoulée, s'il reste encore à faire il se donne une demi-heure pour une infinité de nouveaux assauts. Si cela ne suffit pas, encore un quart d'heure et ainsi de suite. Si, la seconde heure écoulée, quelque chose reste debout, il presse encore le rythme. Chaque attaque emportant un morceau, s'il les précipite comme il convient, rien ne résiste, tout y passe, il vient un instant où le dernier pan de mur s'effondre, et le nivellement est achevé.

RÉFÉRENCES

[1] DENJOY, A. Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue. *C. R. Acad. Sc. Paris 154* (1er avril 1912), 859-861.

[2] —— Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale. *C. R. Acad. Sc. Paris 154* (15 avril 1912), 1075-1078.

[3] —— *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique.* Cinq volumes. Paris, Gauthier-Villars, 1941-1949.

[4] HENSTOCK, R. *Linear analysis.* Butterworth, 1967.

[5] PACQUEMENT, A. Détermination d'une fonction au moyen de sa dérivée sur un réseau binaire. *C. R. Acad. Sc. Paris 284, A* (1977), 365-368.

[6] SKVORCOV, V. A. (= SKVORTSOV, V. A.). On Haar series with convergent subsequences of partial sums. *Soviet Math. Dokl. 9* (1968), 1469-1471.

[7] —— Calcul des coefficients des séries de Haar partout convergentes (en russe). *Matemat. Sbornik 75* (1968), 349-360.

[8] —— Generalized integrals in the theory of trigonometric, Haar, and Walsh series. *Real Analysis Exchange 12* (1986-87), 59-62.

[9] —— A dyadic Henstock integral. *Real Analysis Exchange 14* (1988-89), à paraître.

(Reçu le 5 janvier 1988)

Jean-Pierre Kahane

Unité Associée CNRS 757
Université de Paris-Sud
Mathématiques — Bât. 425
91405 Orsay Cedex (France)